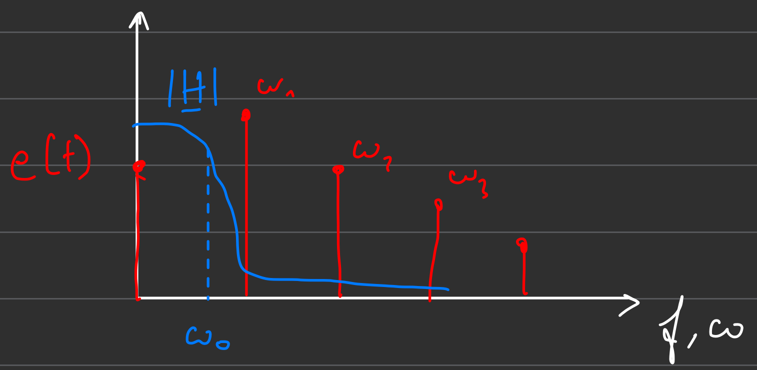
• Action du filtre sur un signal périodique :

spectre, amplitude



Fonctions :

- Extraire la composante continue ⟶ moyenne du signal

- Atténuer les hautes fréquences, $\omega_k \gg \omega_0$ (avec déphasage) et intégrer le signal

$$\boxed{\text{Caractère intégrateur (dans les } -20\,\text{dB/déc)}}$$

$$\underline{H} = \frac{1}{1+jx} \quad , \quad x = \frac{\omega}{\omega_0}$$

Pour $\omega \gg \omega_0 \longrightarrow x \gg 1$

$$\text{et} \quad \underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} \simeq \frac{1}{jx}$$

$$s \times jx = \underline{e} \longrightarrow \underline{s} \times j\omega = \omega_0 \underline{e}$$

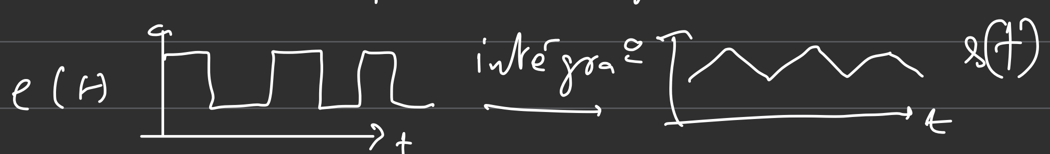
réel

$$\boxed{\frac{ds}{dt} = \omega_0\, e(t)}$$

intégration

$$\boxed{s(t) - s(t=0) = \omega_0 \int_{t=0}^{t} e(t)\,dt}$$

On réalise la pseudo-intégration du signal d'entrée



À partir de : $\neq$lle :

$$\frac{ds}{dt} + \omega_0 s(t) = \omega_0 e(t)$$

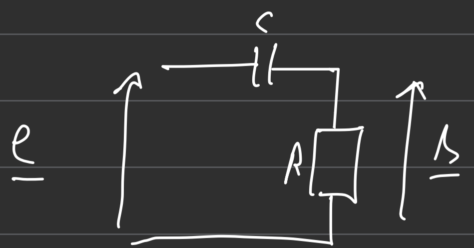
$$\left|\frac{\omega_0 s(t)}{\frac{ds}{dt}}\right| = \omega_0 \left|\frac{s}{\frac{s}{T}}\right| = \frac{\omega_0}{\omega}$$

ODG
ordre de grandeur

Pour $\omega \gg \omega_0 \Rightarrow \left|\frac{\omega_0 s(t)}{\frac{ds}{dt}}\right| \ll 1$

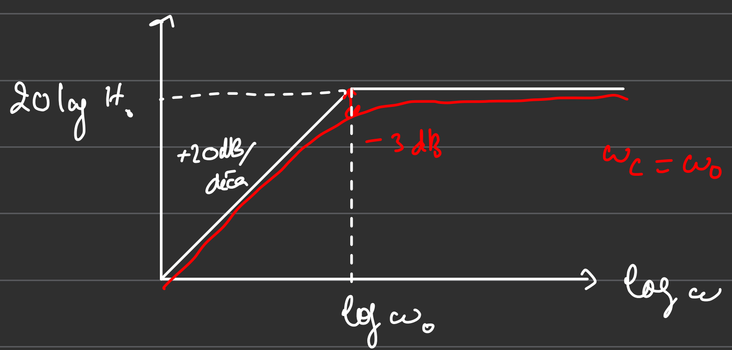
donc : $\boxed{\frac{ds}{dt} \approx \omega_0 e(t)}$ m̂ résultat

→ Filtre passe-haut du 1er ordre :



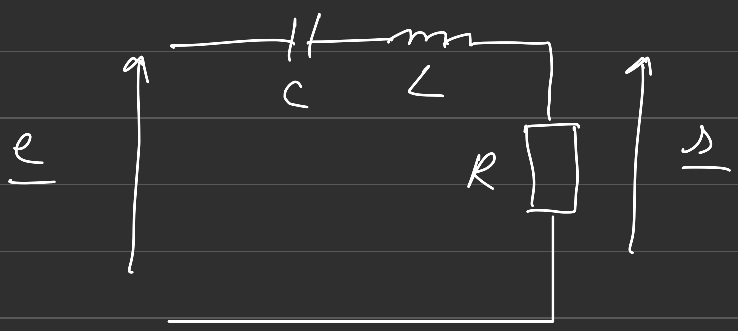
$\boxed{\underline{H} = \frac{jx}{1+jx}}$ ♡ $\quad x = \frac{\omega}{\omega_0}$ et $\omega_0 = \frac{1}{RC}$

Diagramme de Bode :



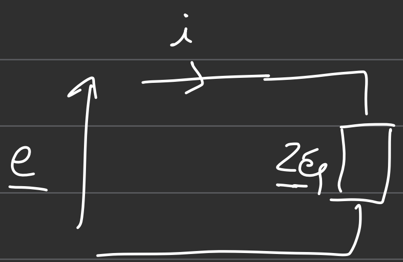
- atténuaᵒ des basses fréq et superposition de la composante continue
- dérivation des composantes BF (défaut d'ampli du bruit HF)

→ Passe bande d'ordre 2 :



(Résonance en intensité)

$$\underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} \quad \text{avec } \underline{s} = R\underline{i}$$



$$\Rightarrow \underline{e} = \underline{Z_{eq}}\,\underline{i}$$

$$\underline{H} = \frac{R\underline{i}}{\underline{e}} = \frac{R}{\underline{Z_{eq}}}$$

$$\underline{H} = \frac{R}{\underline{Z_C} + \underline{Z_L} + \underline{Z_R}} = \frac{R}{\frac{1}{jC\omega} + jL\omega + R}$$

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + j\left(\frac{L\omega}{R} - \frac{1}{RC\omega}\right)}$$

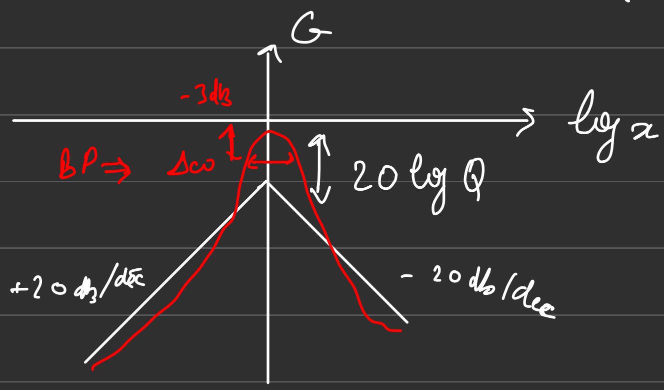
$$\underline{H} = \frac{1}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)} = \boxed{\frac{1}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)}} \qquad \text{avec } x = \frac{\omega}{\omega_0}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \omega_0^2 &= \frac{1}{LC} \\ Q &= \frac{1}{RC\omega_0} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} \end{aligned}}$$

$$\left(\begin{aligned} &\triangle! \text{ Si } RLC \ // \\ &Q = RC\omega_0 \\ &\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \end{aligned} \right)$$

Diagramme de Bode :

$Q < 1$



BP ⟹ Δω

$$\boxed{\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{1}{Q}}$$

• Passage dans le domaine temporel = obten° de l'éq. ≠ lle :

$$\underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{1}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)}$$

$\times jx$

$$\frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{jx}{jx + Q(jx)^2 + Q}$$

$\div Q$

$$\frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{jx/Q}{1 + \frac{jx}{Q} + (jx)^2}$$

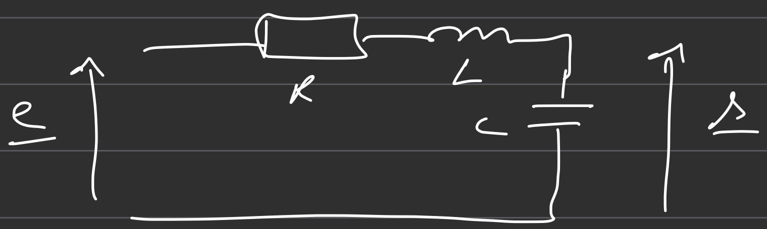
$$\underline{s} \times \left(1 + \frac{jx}{Q} + (jx)^2\right) = \frac{jx}{Q}\underline{e}$$

$$\frac{1}{\omega_0^2}\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{1}{Q\omega_0}\frac{ds}{dt} + s(t) = \frac{1}{Q\omega_0}\frac{de}{dt}$$

$$\boxed{\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s(t) = \frac{\omega_0}{Q}\frac{de}{dt}}$$

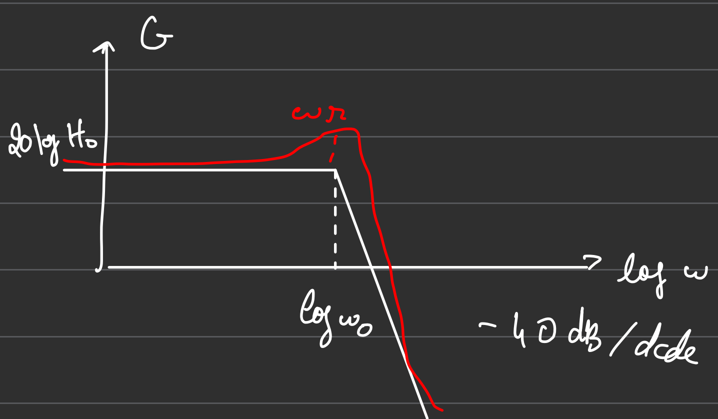
Le sys. est un oscillateur amorti ($2^{ème}$ ordre) qui répond à la dérivée de l'excitaº.

→ Filtre passe-bas d'ordre 2 :



$$\boxed{\underline{H} = \frac{H_0}{1 - x^2 + \frac{jx}{Q}}}$$

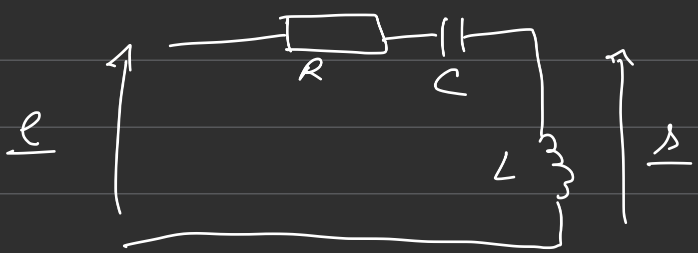
$Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$ → résonance



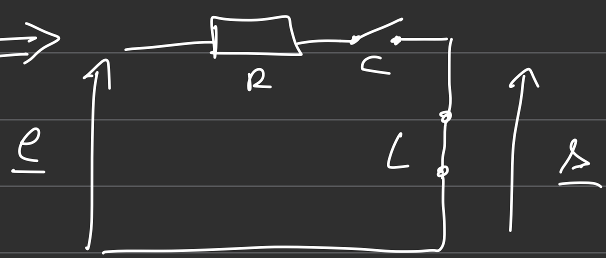
pour $Q \gg 1$

$\omega_r \simeq \omega_0$

→ Filtre passe-haut du second ordre :

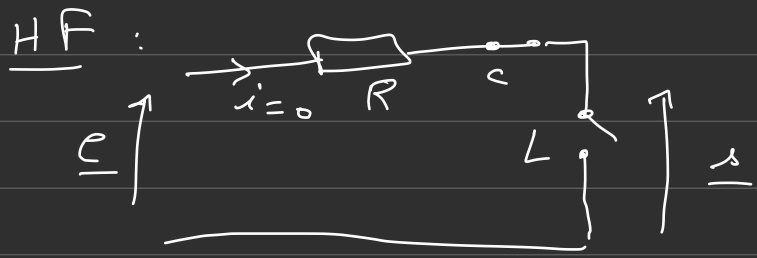


en BF $\Longrightarrow$



$\underline{s} = 0$

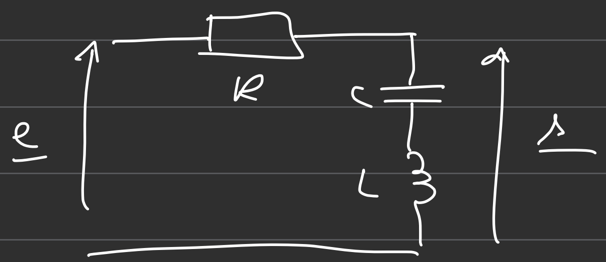
HF :



$e = u_R + u_C + s = 0 + 0 + s$

$e = s$ laisse passer les HF.

→ Filtre coupe-bande :



II) Stabilité des systèmes :

1) Critères de stabilité :

→ Stable ssi solu° éq. homogène SSM → 0 qd $t \to +\infty$
La contribu° du régime libre ne diverge pas (reste bornée)

Rqe) Système passifs sont tjr stable

2) Systèmes du 1er ordre :

$$\frac{ds}{dt} + \omega_0 s(t) = 0$$ ← éq. homogène SSM

$$\frac{ds}{dt} + \frac{s(t)}{\tau} = 0 \iff \tau \frac{ds}{dt} + s(t) = 0$$

↳ soluº $\Rightarrow s(t) = A e^{-t/\tau}$

si $\tau > 0 \Rightarrow$ le syst est stable $\underset{t \mapsto +\infty}{s(t) \to 0}$

$\boxed{\text{Si les coeff sont de m̂ signe} \longrightarrow \text{syst. stable}}$

3) 2e ordre :

On utilise :

$$\frac{d^2s}{dt^2} + b\frac{ds}{dt} + c\,s(t) = 0$$

Les soluº cherchées sont du type e^{rt} avec pour éq. caractéristique.

$$\begin{cases} r^2 + br + c = 0 \\ r_1 r_2 = c \end{cases}$$

→ $\underline{c < 0}$:

$$\Delta = b^2 - 4c > 0$$

il y a 2 racines de signe opposés (avec $r_1 r_2 = c < 0$)

Soluº de la forme :

$$A e^{r_1 t} + B e^{r_2 t}$$

Qd $t \mapsto +\infty \longrightarrow$ diverge

Donc syst. instable

Pour sys. stable $c>0$!

→ $c > 0$:

$$\Delta = b^2 - 4c$$

3 cas de figure :

$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
régime apériodique	régime critique	régime pseudo-périodique
$(A \operatorname{ch} \Omega t + B \operatorname{sh} \Omega t) \times e^{-\frac{bt}{2}}$	$(At+B)e^{-\frac{bt}{2}}$	$(A\cos\Omega t + B \sin \Omega t) \times e^{-\frac{bt}{2}}$

Si $b < 0$ → qd $t \mapsto +\infty$ → sol diverge → instable

Si $b > 0$ → solu° stable

$\boxed{\text{Système stable ssi tout les coeff sont de m̂ signes.}}$

Commentaire : approche énergétique :

Posons : $c = \omega_0^2 > 0$
$b = \frac{\omega_0}{Q}$

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s(t) = 0$$

$$\frac{ds}{dt} \times \frac{d^2 s}{dt^2} + \omega_0^2 \frac{ds}{dt} s = -\frac{\omega_0}{Q}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}\omega_0^2 s^2\right) = -\frac{\omega_0}{Q}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$$

Rappel : $E = E_c + E_p$

"masse / ressort" $= \frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2} k x^2$

Analogie : $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$

$$A \frac{dE}{dt} = -\frac{\omega_0}{Q} \left(\frac{ds}{dt}\right)^2$$

Avec $c = \omega_0^2 > 0$

$\frac{dE}{dt} < 0 \longrightarrow$ l'nrj du sys. au cours du temps

il n'y a pas de divergence de la réponse transitoire

Cas limite $\Rightarrow Q \longrightarrow +\infty$

$\frac{dE}{dt} = 0 \longrightarrow$ nrj cste $\longrightarrow$ c'est l'oscillateur harmonique.