

Topographie du champ électrostatique – relation avec les équipotentiels

Exemple d'une distribution de charges réparties sur un cercle

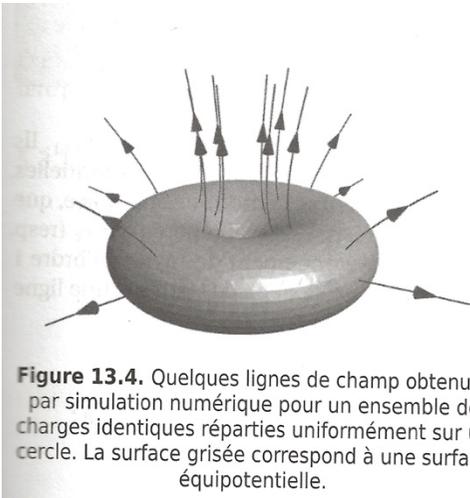


Figure 13.4. Quelques lignes de champ obtenues par simulation numérique pour un ensemble de charges identiques réparties uniformément sur un cercle. La surface grisée correspond à une surface équipotentielle.

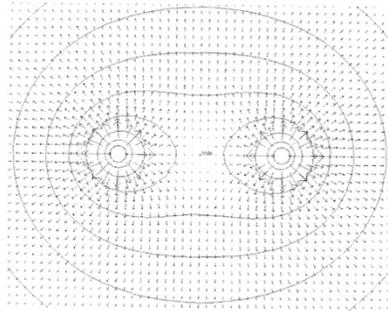


Figure 13.5. Représentation dans un plan des lignes de champ et des traces des équipotentiels pour un ensemble de charges identiques réparties uniformément sur un cercle. Le plan passe par l'axe de la spire.

Exemple d'un dispositif à deux fils parallèles de charges opposées

Représentation dans le plan (Oxy) pour des fils selon l'axe (Oz)

- L'axe Oy, dont tous les points sont à égale distance des deux fils, est équipotentiel (il est d'ailleurs sur l'équipotentielle nulle).
- Près de l'un ou l'autre fil, les surfaces équipotentiels tendent à devenir des cylindres ayant le fil pour axe.

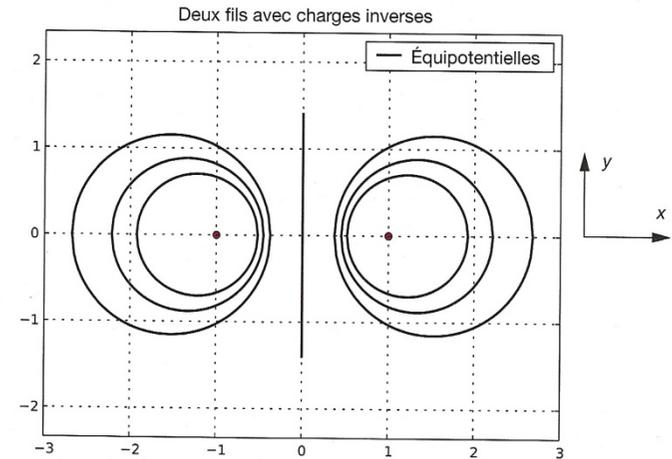


Figure 39

- L'examen des lignes de champ électrostatique confirme les propriétés d'orthogonalité avec les équipotentiels qui sont attendues (Fig. 40).
- Le champ est radial au voisinage de l'un ou l'autre des fils (c'est alors le champ créé par le fil concerné qui domine).

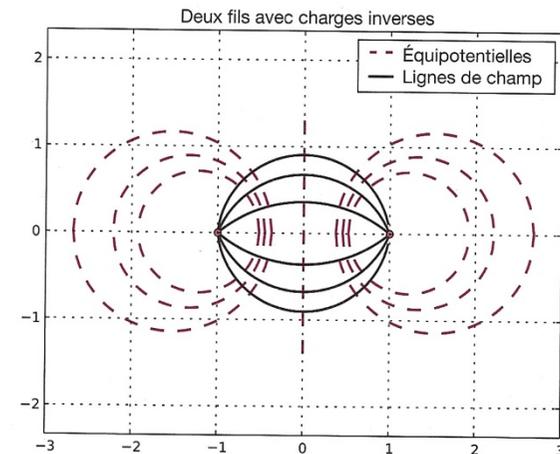


Figure 40

Exemple d'un dispositif à 4 électrodes de forme hyperbolique

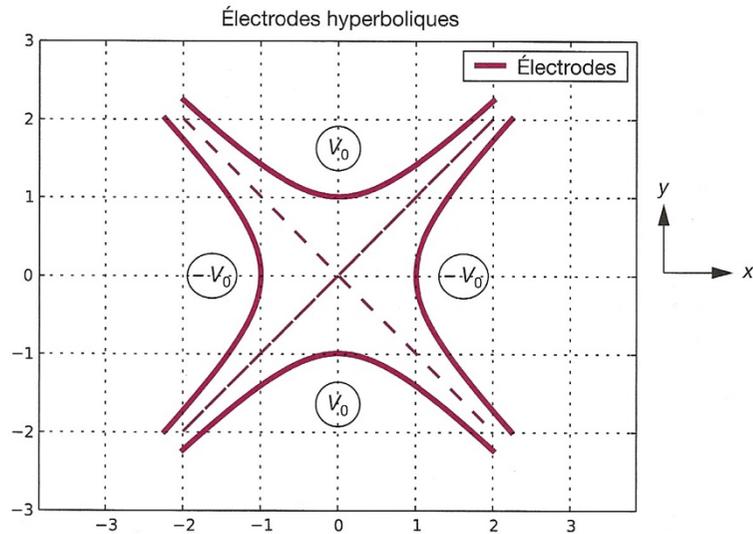


Figure 36

L'étude des équipotentiels (Fig. 37) confirme les propriétés de **symétrie** jouées par les axes Ox et Oy.

Les bissectrices (en pointillés) jouent un rôle d'axes d'**antisymétrie** : le potentiel y est donc nul.

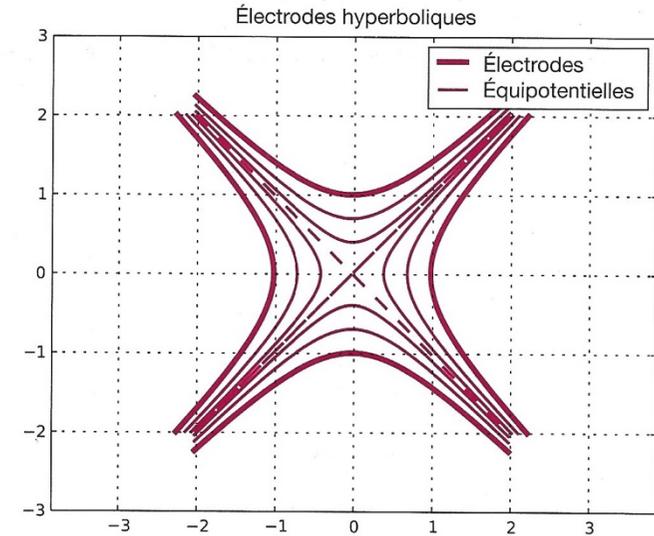


Figure 37

La représentation des lignes de champ (Fig. 38) amène les commentaires suivants :

- les axes Ox et Oy sont des lignes de champ (symétrie) ;
- les lignes de champ coupent les équipotentiels perpendiculairement ;
- les lignes sont orientées dans le sens des potentiels décroissants.

On note la situation très singulière au niveau de l'origine O du repère. En fait, le champ est nul (intersection de plans de symétrie, imposant des contraintes incompatibles sur la direction du champ).

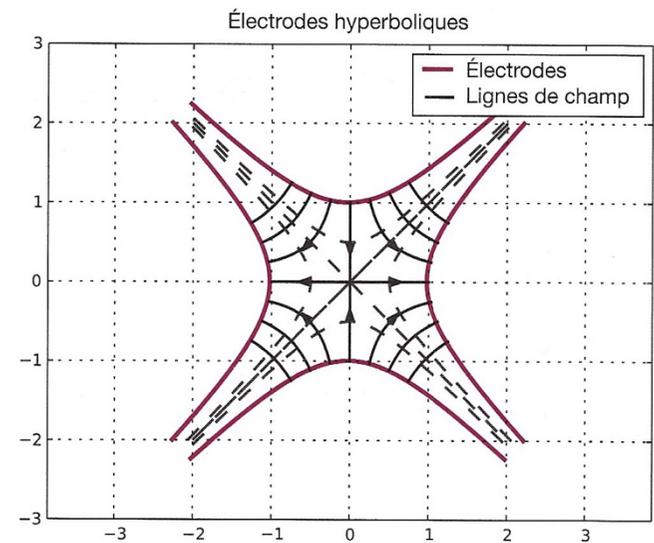


Figure 38

Topographie et cartes de champ : symétrie et équipotentiels

Exemple d'un système de deux charges de même signe ou de signes opposés

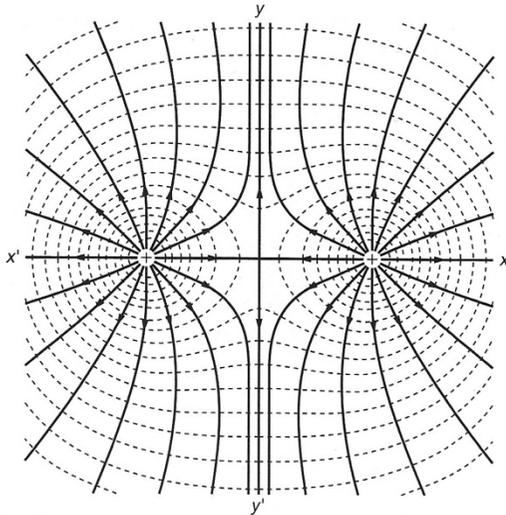


Figure 31

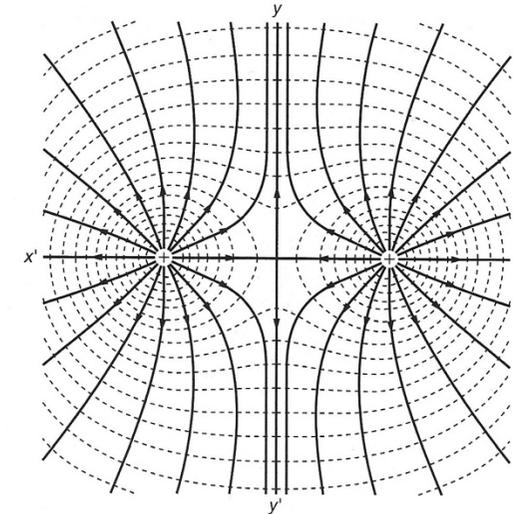


Figure 31

2.a) Le plan de la feuille est un plan de symétrie des charges, ce qui permet en fait de pouvoir tracer une carte de champ.

Le plan \mathcal{P} passant par les deux charges et perpendiculaire au plan de la feuille est un plan de symétrie des charges, le champ électrique doit se transformer en son symétrique de part et d'autre, ce qui est bien le cas (Fig. 29). Enfin, le plan \mathcal{P}' médiateur des deux charges est aussi un plan de symétrie, avec les mêmes conséquences (Fig. 30).

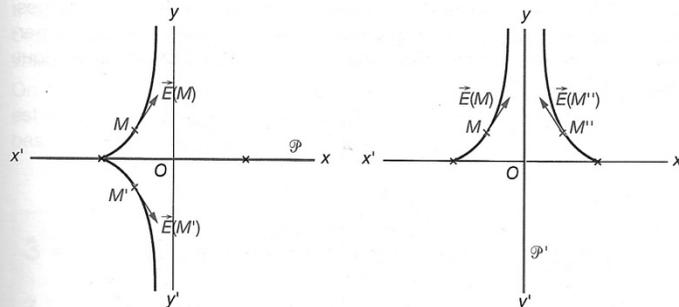


Figure 29

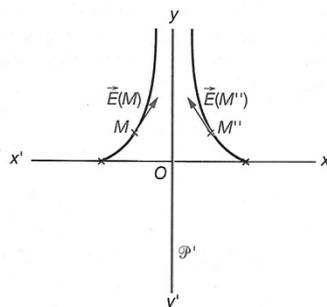


Figure 30

b) Près d'une charge donnée, le potentiel s'identifie à celui créé par la charge considérée. Les équipotentiels sont donc quasiment des sphères, dont l'intersection avec le plan de la feuille donne des cercles centrés sur la charge.

Au loin, l'ensemble des charges $+q$ est équivalent à une charge unique $+2q$, ce qui donne là encore des équipotentiels sphériques centrés sur le milieu des deux charges.

En faisant attention au fait que les équipotentiels sont perpendiculaires aux lignes de champ, et vu les symétries, on déduit l'allure de la figure 31.

c) Les lignes de champ ont pour origine les deux charges positives q (où le potentiel est infini). Comme elles sont orientées selon les potentiels décroissants et ne peuvent s'arrêter en un point vide de charge, elles aboutissent forcément à l'infini. On obtient l'allure de la figure 31.

d) La différence majeure est que le plan \mathcal{P}' , médiateur des deux charges, est désormais plan d'antisymétrie. Le champ électrique lui est donc perpendiculaire en ses points et se transforme en l'opposé de son symétrique de part et d'autre (Fig. 32).

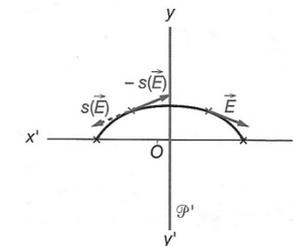
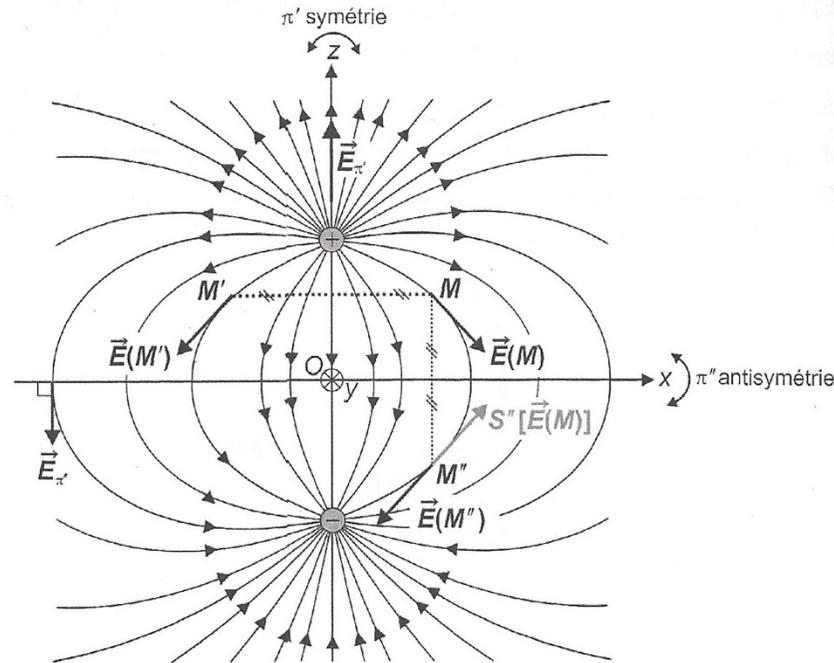


Figure 32

En ce qui concerne les équipotentiels, celles-ci sont des sphères centrées sur les charges, proches de celles-ci. Le plan \mathcal{P}' est l'équipotentielle nulle. Toutes les autres équipotentiels ne peuvent donc traverser \mathcal{P}' et sont confinées d'un côté ou de l'autre. L'antisymétrie permet de conclure qu'elles ont même forme géométrique de chaque côté (Fig. 33).

Encore le doublet de charges opposées : le dipôle électrostatique

Le plan yOz (ou tout plan contenant Oz) est un plan π' de symétrie de D , alors que le plan xOy (plan médiateur des charges) est un plan π'' d'antisymétrie de D .



En un point de l'axe Oz portant les deux charges, le champ doit être contenu dans tous les plans de symétrie passant par ce point, donc dans tout plan contenant Oz : le champ est porté par \vec{e}_z .

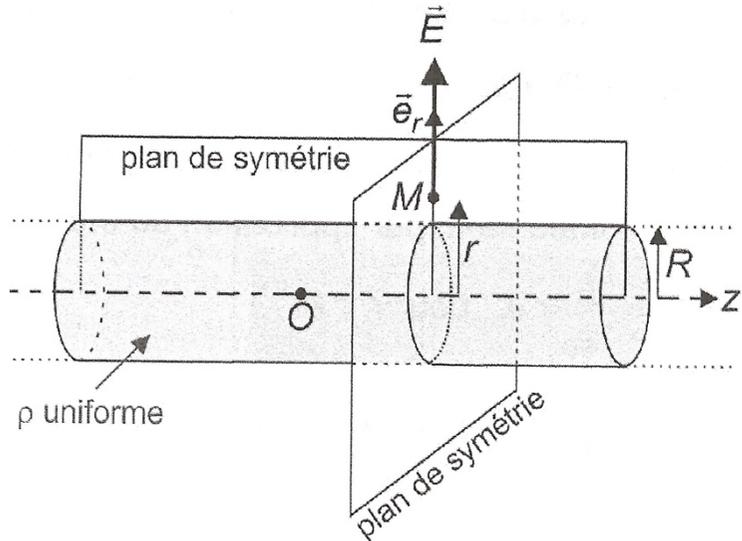
En un point du plan xOy , le champ est normal à ce plan, donc porté par \vec{e}_z .

Le plan de la figure ($y = 0$) est un plan de symétrie, donc il contient \vec{E} :

$$\vec{E}(x, z) = E_x(x, z)\vec{e}_x + E_z(x, z)\vec{e}_z, \text{ avec } \begin{cases} E_x(-x, z) = -E_x(x, z) \\ E_z(-x, z) = E_z(x, z) \end{cases} \text{ et } \begin{cases} E_x(x, -z) = -E_x(x, z) \\ E_z(x, -z) = E_z(x, z) \end{cases} .$$

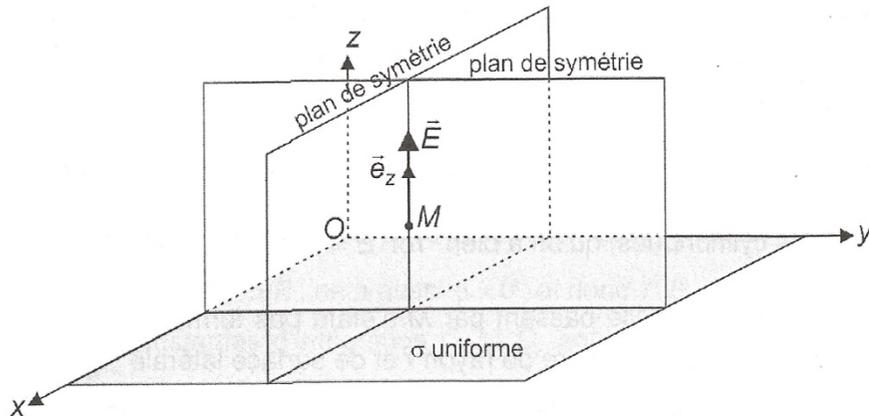
Calcul des champs pour des distributions à haut degré de symétrie

Distribution à symétrie cylindrique



Distribution surfacique de charges

Le plan $z=0$ est chargé avec une charge surfacique σ uniforme.



Analogie entre champ gravitationnel et électrostatique

	électrostatique	gravitation
caractéristique de la particule à la fois source du champ et soumise à une force	la charge q	la masse m
champ au point M	champ électrique $\vec{E}(M)$	champ de gravitation $\vec{\mathcal{G}}(M)$
force subie par la particule	$\vec{F} = q\vec{E}(M)$	$\vec{F} = m\vec{\mathcal{G}}(M)$
force entre deux particules	$\vec{F}_{1/2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_{1 \rightarrow 2}$	$\vec{F}_{1/2} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{e}_{1 \rightarrow 2}$
constante intervenant dans la force	$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$	$-G$, avec G constante universelle de gravitation : $G \approx 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$
constante intervenant dans le théorème de Gauss	$\frac{1}{\epsilon_0}$	$-4\pi G$
Théorème de Gauss	$\oiint_{\mathcal{F}} \vec{E} \cdot d^2 \vec{\mathcal{F}} = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$	$\oiint_{\mathcal{F}} \vec{\mathcal{G}} \cdot d^2 \vec{\mathcal{F}} = -4\pi G m_{\text{int}}$ <i>théorème de Gauss gravitationnel</i>

Complément hors-programme : le dipôle électrique

Cette partie est présentée pour son intérêt en Physique et en Chimie. Seule la définition du dipôle et du moment dipolaire est au programme (programme de Chimie de première année).

3.1 Définition / Moment dipolaire électrique

Considérons une distribution D de charges localisée, c'est-à-dire d'extension finie (nous noterons a sa taille caractéristique). On se place dans le cas où D est « petite ». Précisons ce point :

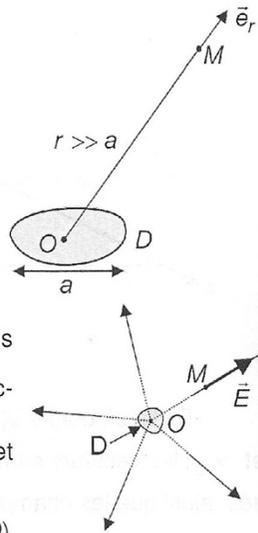
— On ne s'intéresse qu'au champ électrique créé par D « au loin » : en un point M tel que $r = OM \gg a$, si O est un point au voisinage de D (à une distance de D de l'ordre de a).

— Si D est placée dans un champ électrique extérieur (autre que celui qu'elle crée), ce champ est « localement » uniforme (il varie sur une distance caractéristique $\lambda \gg a$).

Si la charge totale Q de D est non nulle, D se comporte comme une charge ponctuelle Q en O , et crée au loin les champs $V(M) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$ et $\vec{E}(M) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$, où \vec{e}_r est le vecteur unitaire de O vers M . Le champ électrique est radial et varie en $1/r^2$.

D subit d'autre part la force $\vec{F} = Q\vec{E}_{\text{ext}}(O)$ où $\vec{E}_{\text{ext}}(O)$ est le champ extérieur à la distribution en O .

On parle de *monopôle électrique*.



En revanche, si $Q = 0$, alors le point A , barycentre des charges négatives, et B , celui des charges positives, sont affectés de charges opposées (respectivement $-q$ et q).

Si A et B ne sont pas confondus, la distribution D est dite *dipolaire* et on définit son moment dipolaire \vec{p} par $\vec{p} = q \vec{AB}$ (en $C \cdot m$).

On note O le milieu de $[AB]$ et $2a$ la distance AB .

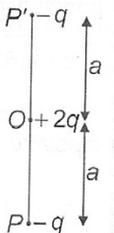
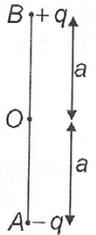
On a donc $p = \|\vec{p}\| = 2aq$.

Comme la distribution dipolaire D est « petite », la répartition exacte des charges n'intervient pas : si $\vec{p} \neq \vec{0}$, D est équivalente au doublet de charges $A(-q)$ et $B(+q)$. Plus généralement, le moment dipolaire d'une distribution de charges ponctuelles q_i en P_i est donné par $\vec{p} = \sum_i q_i \vec{OP}_i$. Il est

indépendant du point O puisque $Q = \sum_i q_i = 0$.

Un exemple de distribution de charge totale nulle, mais *non* dipolaire, est celui de deux charges identiques $-q$ en P et en P' , et d'une charge $+2q$ en O milieu de $[PP']$: le barycentre des charges négatives est confondu avec celui des charges positives. Le moment dipolaire \vec{p} est nul.

On parle dans ce cas de distribution quadrupolaire.



3.2 Champ électrique créé (complément hors-programme)

La distribution D située au point O est dipolaire. Prenons son moment dipolaire \vec{p} porté par Oz et repérons un point M à l'aide de ses coordonnées sphériques. Les barycentres $A(-q)$ et $B(+q)$ de D se trouvent sur l'axe Oz aux cotes respectives $-a$ et a .

Calculons d'abord le potentiel $V(M)$ créé par le dipôle en un point éloigné :

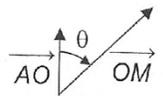
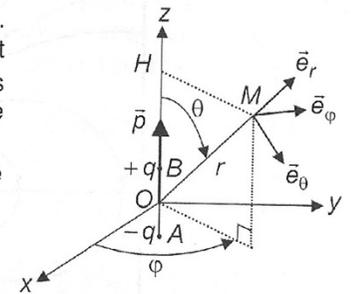
$$V(M) = V_A(M) + V_B(M) = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 AM} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 BM}$$

Pour calculer $1/AM$, on commence par mettre la relation de Chasles au carré :

$$\vec{AM} = \vec{AO} + \vec{OM} \Rightarrow \vec{AM}^2 = \vec{AO}^2 + 2\vec{AO} \cdot \vec{OM} + \vec{OM}^2, \text{ soit :}$$

$$AM^2 = a^2 + 2ar \cos \theta + r^2 = r^2 \left[1 + 2\frac{a}{r} \cos \theta + \frac{a^2}{r^2} \right], \text{ puis :}$$

$$\frac{1}{AM} = [AM^2]^{-1/2} = \frac{1}{r} \left[1 + 2\frac{a}{r} \cos \theta + \frac{a^2}{r^2} \right]^{-1/2}$$



Comme $a/r \ll 1$, on effectue le développement limité de $1/AM$ à l'ordre 1 en a/r :

$$\frac{1}{AM} = \frac{1}{r} \left[1 - \frac{a}{r} \cos \theta \right]. \text{ Pour } 1/BM, \text{ il suffit d'effectuer le changement}$$

$$\theta \rightarrow \pi - \theta \text{ et donc } \cos \theta \rightarrow -\cos \theta, \text{ d'où } \frac{1}{BM} = \frac{1}{r} \left[1 + \frac{a}{r} \cos \theta \right].$$

Finalement :

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \left[-1 + \frac{a}{r} \cos \theta + 1 + \frac{a}{r} \cos \theta \right] = \frac{2aq \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

Les termes d'ordre 0 en a/r dans le crochet s'éliminent. En effet, à l'ordre 0, tout se passe comme si les charges q et $-q$ étaient confondues en O : le champ électrique \vec{E} et le potentiel V sont nuls à cet ordre d'approximation.

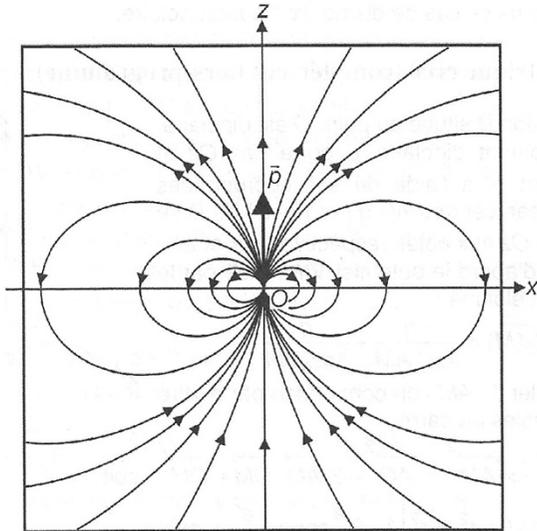
Le potentiel est une différentielle du potentiel en $1/r$ créé par les deux charges ponctuelles. Il est donc en $1/r^2$: $V(M) = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$. V ne dépend pas de φ car l'axe Oz

est un axe de symétrie de révolution : D est invariante par toute rotation autour de Oz .

Le champ \vec{E} , différentielle du champ en $1/r^2$ créé par les deux charges ponctuelles est lui en $1/r^3$. On le calcule à partir de V :

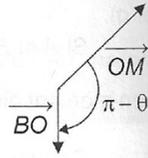
$$\vec{E} = -\text{grad} V = -\frac{\partial V}{\partial r} \vec{e}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{e}_\theta, \text{ soit } \vec{E} = \frac{2p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{e}_r + \frac{p \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{e}_\theta.$$

On obtient grâce à une simulation numérique les lignes de champ électrique dipolaire (valables seulement à grande distance de D) suivantes :



3.3 Actions subies par un dipôle électrique (complément hors-programme)

Considérons d'abord que le dipôle de moment dipolaire \vec{p} est plongé dans un champ électrique extérieur uniforme noté \vec{E} .



La résultante des forces s'exerçant sur $A(-q)$ et $B(+q)$ est :

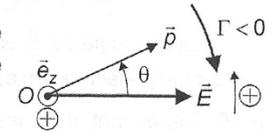
$$\vec{F} = \vec{F}_A + \vec{F}_B = -q\vec{E} + q\vec{E} = \vec{0}.$$

Le moment des actions électriques extérieures qui s'exercent sur le dipôle, calculé au point de réduction O , vaut :

$$\vec{\Gamma}_O = \vec{OA} \wedge (-q\vec{E}) + \vec{OB} \wedge q\vec{E} = (\vec{OB} - \vec{OA}) \wedge q\vec{E} = q \vec{AB} \wedge \vec{E} = \vec{p} \wedge \vec{E}.$$

La résultante \vec{F} est nulle dans un champ \vec{E} uniforme : le dipôle subit un couple de moment $\vec{\Gamma} = \vec{p} \wedge \vec{E}$ indépendant du point de réduction. Ce couple tend à aligner \vec{p} sur \vec{E} .

On peut le constater sur la figure ci-contre : le moment $\Gamma_z = -\|\vec{p}\| \cdot \|\vec{E}\| \sin \theta$ est du signe opposé à celui de $\sin \theta$.



Cette expression $\vec{\Gamma} = \vec{p} \wedge \vec{E}$ reste valable dans l'approximation dipolaire où le champ électrique extérieur n'est que localement uniforme, mais alors la résultante n'est pas rigoureusement nulle. On montre qu'elle vaut $\vec{F} = (\vec{p} \cdot \text{grad}) \vec{E}$.

Ce résultat permet d'expliquer pourquoi un dipôle a tendance à se déplacer dans le sens des champs électriques intenses. Par exemple, à une dimension, si le moment dipolaire s'écrit $\vec{p} = p\vec{e}_x$ et que $\frac{\partial E_x}{\partial x} > 0$ (le champ E_x augmente si on se déplace dans le sens des x croissants), on a bien $F_x = p \frac{\partial E_x}{\partial x} > 0$.

Calculons maintenant l'énergie potentielle d'un dipôle rigide (la distance a , et donc $\|\vec{p}\|$, ne dépendent pas du champ \vec{E} extérieur, localement uniforme, appliqué). L'énergie de constitution (énergie due aux interactions entre A et B) est alors constante, et on peut sommer les énergies $-qV(A)$ et $qV(B)$ des charges $-q$ en A et $+q$ en B placées dans le potentiel extérieur, pour former l'énergie potentielle du système :

$$E_p = -q[V(A) - V(B)] = -q \int_A^B \vec{E}(M) \cdot d\vec{OM} = -q \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{OM} = -q\vec{E} \cdot \int_A^B d\vec{OM}.$$

On a donc $E_p = -q\vec{E} \cdot \vec{AB} = -\vec{p} \cdot \vec{E}$, où \vec{E} est le champ extérieur localement uniforme dans la zone où est placé le dipôle.

L'énergie potentielle d'un dipôle rigide est $E_p = -\vec{p} \cdot \vec{E} = -\|\vec{p}\| \cdot \|\vec{E}\| \cdot \cos \theta$.

La position $\theta = 0$ (\vec{p} et \vec{E} alignés) est une position d'équilibre stable (énergie potentielle minimale), alors que $\theta = \pi$ (\vec{p} et \vec{E} « anti-alignés ») est une position d'équilibre instable (énergie potentielle maximale).

Des grains de semoule placés dans de l'huile de ricin ont la propriété de se polariser en présence d'un champ électrique assez faible. Ils se comportent alors comme des dipôles et s'orientent selon les lignes de champ électrique.

Citons quelques applications du dipôle électrostatique :

- Un matériau isolant (ou diélectrique), qui se polarise sous l'action d'un champ électrique extérieur, se comporte comme un ensemble de dipôles, créant ainsi un champ propre.
- Les molécules polaires créent un champ dipolaire à une distance égale à quelques fois leur taille, et subissent les actions décrites précédemment lorsqu'elles sont plongées dans le champ électrique créé par les autres molécules. On peut, grâce au modèle du dipôle électrique, étudier la cohésion de certains cristaux moléculaires, la solvation des ions dans un solvant polaire, etc.