Exercice 1 – Champ créé par une nappe de courants

1. Propriétés du champ créé par une nappe de courant

On considère une distribution volumique de courant délimitée par les deux plans d'équation $z = \frac{a}{2}$ et $z = -\frac{a}{2}$ (Fig. 32). On suppose qu'entre ces plans la densité volumique de courant est uniforme : $\vec{j} = j\vec{u}_x$.

a) Examiner les invariances géométriques, pour en déduire de quelle(s) coordonnée(s) dépend le champ ?

b) Faire de même avec les symétries et préciser la direction du champ magnétique en tout point.

c) Que peut-on dire de la valeur du champ sur le plan xOy ?

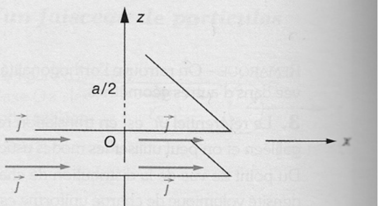

Figure 32

2. Expressions du champ créé par une nappe de courant

On poursuit l'étude du champ créé par une nappe de courant volumique comprise entre les plans $z = \frac{a}{2}$ et $z = -\frac{a}{2}$ définie ci-dessus.

a) Proposer un contour d'Ampère qui permette d'exprimer le champ créé par la distribution de courant en un point M de cote z, en exploitant la nullité du champ sur le plan xOy.

b) Préciser alors l'expression du champ magnétique au point M, selon la valeur de z, dans le cas où z est positive.

c) Tracer le graphe de $B_y = f(z)$, en précisant par des arguments de symétrie la parité ou l'imparité de cette fonction.

Exercice 2 – Câble coaxial

Un câble coaxial infiniment long d'axe Oz est constitué (Fig. 29) d'une part, d'un conducteur cylindrique plein d'axe Oz et de rayon R_1 parcouru par un courant constant d'intensité I (comptée positivement dans le sens des z croissants) uniformément réparti dans toute la section avec une densité de courant $\vec{j} = j\,\vec{u}_z$; et, d'autre part, d'un conducteur cylindrique creux d'axe Oz et de rayon R_2 parcouru par des courants dont l'intensité totale (comptée positivement dans le sens des z croissants) vaut $-I$. L'espace en dehors de ces conducteurs est vide.

1. Exprimer le champ magnétostatique créé en tout point de l'espace en dehors du cylindre de rayon R_2.

2. Ce champ est associé à une densité volumique d'énergie $\mathrm{d}U_m/\mathrm{d}\tau = B^2/2\mu_0$. Exprimer l'énergie correspondante pour une longueur h de câble. En déduire, par analogie avec le cas d'une bobine, l'expression de l'inductance propre L d'une portion de longueur h du câble. Calculer l'inductance linéique $\mathscr{L}$ pour $R_1 = 1$ mm et $R_2 = 2{,}7$ mm.

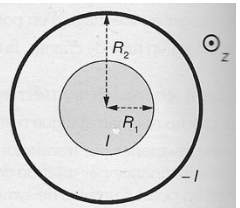

Figure 29

Exercice 3 – Modèle de fils

3. Modèles de fils

a) Un conducteur cylindrique de rayon R, de dimension infinie selon l'axe $z'Oz$, est parcouru par un courant d'intensité constante I. La distribution est modélisée dans un premier temps à l'aide d'une densité volumique de courant $\vec{j}$ uniforme (Fig. 33). Déterminer le champ magnétique en tout point.

b) Reprendre la question précédente, si la conduction n'est que superficielle (l'intensité circule uniformément selon Oz sur la seule surface du cylindre).

c) On reprend la modélisation du **a)**, mais cette fois se trouve dans le cylindre une cavité cylindrique de rayon r et d'axe $O'z$, avec O' à la distance d de Oz $(d + r < R)$. Montrer que le champ magnétique à l'intérieur de cette cavité est uniforme.

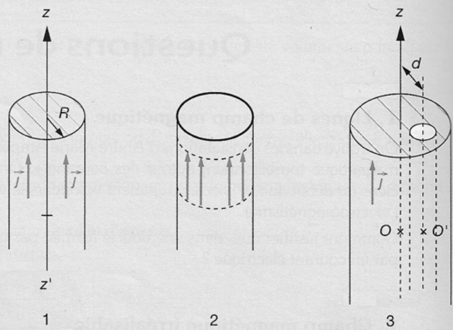

Figure 33

Exercice 4 – Mesure de champ magnétique dynamique

A. *Mesure dynamique du champ magnétique terrestre* (d'après oral CCP)

Sur une paillasse de laboratoire, une boussole assimilable à un dipôle magnétique de moment dipolaire $\vec{m}$ est libre de tourner autour de l'axe vertical $\Delta = Oz$ (Fig. 24). On note J son moment d'inertie par rapport à Δ.

Elle est plongée dans un champ magnétique uniforme horizontal $\vec{B} = B\vec{u}_x$; on néglige les frottements.

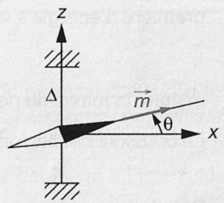

Figure 24

1. Équilibre dans un champ extérieur

Rappeler l'expression de l'énergie potentielle d'interaction entre le dipôle et le champ, et en déduire les positions d'équilibre.

2. Vitesse angulaire

On libère la boussole sans vitesse angulaire initiale, alors qu'elle fait un angle droit avec la direction du champ. Décrire le mouvement et préciser sa plus grande valeur de vitesse angulaire (on pourra proposer une analogie avec un système mécanique simple).

4. Mesure du champ magnétique terrestre

a) Aucun autre champ n'est présent que le champ magnétique terrestre, dont la composante horizontale est dirigée selon Ox et avec une intensité notée B_0. On constate que, libérée avec un petit angle par rapport à cet axe, la boussole oscille avec une période T_0.
Quelle relation lie B_0 à T_0 ?
Quelle difficulté rencontre-t-on pour déduire de la mesure de T_0 la valeur de B_0 ?

b) On crée un champ magnétique supplémentaire $\vec{B}_1 = B_1\vec{u}_x$, d'intensité réglable et connue, à l'aide d'un ensemble de bobines de Helmholtz parcourues par un courant électrique. On mesure la période T des petites oscillations autour de l'axe Ox lorsque le champ supplémentaire et le champ géomagnétique ont même direction et même sens. En inversant alors le sens de l'intensité du courant électrique, on constate que les oscillations ont toujours lieu autour de la même position angulaire, mais qu'elles s'effectuent avec une période T'.
Relier la valeur de B_0 à celle de B_1, de T et de T'.
A-t-on remédié ainsi aux difficultés citées précédemment ?

Exercice 5 – Interaction entre un fil et un cadre

Un cadre carré de côtés de longueur a parallèles à $\vec{u}_x$ et $\vec{u}_z$ parcouru par un courant I est soumis au champ magnétique d'un fil infini parcouru par un courant I identique. Le centre C du carré est sur l'axe Ox à la distance $x \gg a$ du fil (Fig. 47).

a) Déterminer la résultante des forces exercées par le fil sur le cadre en utilisant la loi de Laplace.

b) Retrouver le résultat en utilisant l'expression $E_p = -\vec{\mathfrak{M}} \cdot \vec{B}$ de l'énergie potentielle dont dérive la force subie par un dipôle magnétique rigide dans un champ magnétique stationnaire.

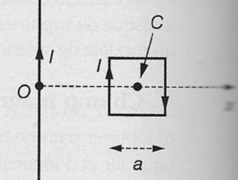

Figure 47

<u>Pour aller plus loin</u>

5. Sources créant un champ donné *(d'après oral Centrale-Supélec)*

On se place en coordonnées cylindriques. Trouver la densité de courant permettant de créer un champ $\vec{B} = B(r)\,\vec{u_\theta}$ avec $B(r < a) = B_0\, r^2/a^2$ et $B(r > a) = B_0\, a/r$.

6. Paratonnerre *(d'après oral Mines-Ponts)*

Un paratonnerre est assimilé à la portion $z < 0$ de la droite Oz et la Terre est assimilée au demi-espace $z > 0$ supposé conducteur de conductivité γ (Fig. 48). On suppose que le paratonnerre est parcouru par un courant d'intensité constante I comptée positivement dans le sens des z croissants. On repère un point de la Terre par ses coordonnées sphériques (r, θ, φ) de centre O et on suppose que le vecteur densité de courant dans le sol est de la forme $\vec{j} = j(r)\,\vec{u_r}$.

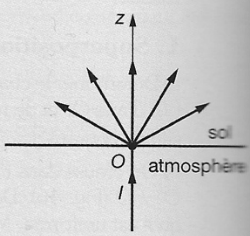

Figure 48

a) Montrer que $\vec{B} = B_\varphi(r, \theta)\,\vec{u_\varphi}$.

b) Déterminer $B_\varphi(r, \theta)$ dans le domaine $z < 0$.

c) Montrer que $j(r) = I/2\pi r^2$. Calculer le flux de $\vec{j}$ à travers le cercle (C) d'axe Oz passant par un point M du domaine $z > 0$ orienté dans le sens trigonométrique autour de Oz.

d) Déterminer $B_\varphi(r, \theta)$ dans le domaine $z > 0$. Que se passe-t-il sur l'axe Oz ? Pouvait-on le prévoir ?

3. Champ magnétique créé par convection de charges dans un isolant *(d'après oral Mines-Ponts)*

Un cylindre isolant, infini d'axe Oz et de rayon a, porte une charge répartie uniformément en surface avec une densité surfacique σ. Le cylindre est en rotation à vitesse angulaire ω constante autour de son axe. Le mouvement des charges crée une géométrie de courants analogue à celle d'un solénoïde infini d'axe Oz pour laquelle on cherche donc un champ magnétique de la forme $\vec{B} = B(r)\,\vec{u_z}$ avec $B(r > a) = 0$. On envisage comme contour (C) pour appliquer le théorème d'Ampère un cadre rectangulaire de hauteur h selon Oz dont les côtés parallèles à Oz sont situés l'un à l'intérieur du cylindre et l'autre à l'extérieur. On oriente (C) par sa normale parallèle à $\vec{u_\theta}$.

a) Exprimer la charge q qui traverse le contour (C) pendant que le cylindre fait un tour. En déduire l'intensité enlacée par (C) puis l'expression de $B(r < a)$.

b) En réalité le cylindre possède une longueur h finie selon son axe Oz. Exprimer l'énergie magnétique et en déduire que tout se passe comme si le cylindre possédait un moment d'inertie supplémentaire J^* dû au mouvement des charges.

20.11 Champ magnétique au voisinage de l'axe d'une spire (d'après Mines) (★★)

On donne une spire circulaire de rayon R, de centre O, d'axe (Oz). Cette spire est parcourue par un courant électrique d'intensité I constante.

1. a. Montrer par des arguments de symétrie que, sur l'axe, le champ magnétostatique $\vec{B}$ est porté par l'axe et prend la forme de $\vec{B} = B(z)\,\vec{u_z}$ où $\vec{u_z}$ est un vecteur unitaire porté par l'axe (Oz).

b. Comparer $B(z)$ et $B(-z)$.

c. Le champ magnétique en un point M de coordonnée z sur l'axe (Oz) s'écrit sous la forme $B(z) = \dfrac{\mu_0 I}{2}\dfrac{R^2}{(R^2+z^2)^{3/2}}$. Écrire $B(z)$ sous la forme $B_0 f(u)$ où $u = \dfrac{z}{R}$, identifier B_0 et $f(u)$.

d. Tracer l'allure du graphe de la fonction $B(z)$.

2. On s'intéresse maintenant au champ magnétostatique au voisinage de l'axe. On calcule donc le champ en un point M défini par des coordonnées cylindriques (r, θ, z).

a. Montrer par des arguments de symétrie très précis, qu'en M, le champ $\vec{B}$ n'a pas de composante orthoradiale B_θ.

b. Montrer que la norme de $\vec{B}$ ne dépend que de r et z.

c. Que peut on dire du flux de $\vec{B}$ à travers une surface fermée ?

d. Montrer que la circulation de $\vec{B}$ au voisinage de l'axe est conservative.

e. Calculer le flux de $\vec{B}$ à travers une surface fermée cylindrique d'axe (Oz) dont les bases sont des disques de rayon r petit et de cotes z et $z+\mathrm{d}z$. En déduire : $B_r(r,z) = -\dfrac{r}{2}\dfrac{\mathrm{d}B_z(z,0)}{\mathrm{d}z}$. Calculer l'expression de $B_r(r,z)$.

f. Calculer de même la circulation du champ magnétique le long du petit rectangle de sommets $M(r,z)$, $P(r,z+\mathrm{d}z)$, $Q(r+\mathrm{d}r, z+\mathrm{d}z)$ et $R(r+\mathrm{d}r,z)$, en supposant r petit et $\mathrm{d}r$ et $\mathrm{d}z$ encore plus petits. En déduire $\dfrac{\partial B_z}{\partial r} = \dfrac{\partial B_r}{\partial z}$, puis $B_z(r,z) = B_z(0,z) - \dfrac{r^2}{4}\dfrac{\mathrm{d}^2 B_z}{\mathrm{d}z^2}(0,z)$.

g. On se place au voisinage du centre O d'une spire de rayon R. De combien peut-on s'écarter dans le plan de la spire pour que la composante axiale du champ magnétique diffère du champ B_0 au centre de moins de 1 % ?

On donne : $\dfrac{\mathrm{d}^2 B}{\mathrm{d}z^2}(z) = -\dfrac{3B_0}{R^2}\left(1-4\dfrac{z^2}{R^2}\right)\left(1+\dfrac{z^2}{R^2}\right)^{-7/2}$.