

Exercice 1 – Distribution plane d'épaisseur finie

Entre les deux plans d'équations $z = \frac{a}{2}$ et $z = -\frac{a}{2}$ se trouve une distribution volumique de charge uniforme ρ_0 (Fig. 42).

1. Examiner les invariances et les symétries du problème et en déduire que le champ électrique prend en tout point la forme :

$$\vec{E}(M) = E(z) \cdot \vec{u}_z.$$

2. Montrer, par des arguments de symétrie, que le champ est nul sur le plan xOy .

3. Choisir une surface de Gauss permettant de calculer le champ en un point M de cote z . Distinguer les cas $z < -\frac{a}{2}$, $-\frac{a}{2} < z < \frac{a}{2}$ et $z > \frac{a}{2}$.

Tracer le graphe de la fonction $E(z)$.

4. Proposer une solution pour le potentiel $V(M)$.

5. On envisage le passage à une épaisseur a tendant vers 0, la densité surfacique restant constante σ_0 .

a) Déterminer σ_0 en fonction de ρ_0 et a .

b) Préciser la valeur du champ dans chaque demi-espace $z > 0$ et $z < 0$.

c) Que devient le graphe de la fonction $E(z)$? Vérifier la conformité aux résultats obtenus dans le cours.

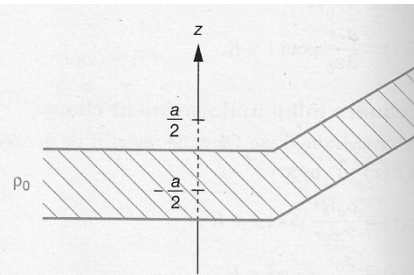


Figure 42

Exercice 2 – Modèle d'orbitale atomique

L'atome d'hydrogène est composé d'un proton formant le noyau et d'un nuage électronique (Fig. 49), dont la théorie quantique permet de déterminer la densité de charge $\rho_e(M)$. En coordonnées sphériques, la densité dans l'état fondamental prend la forme suivante : $\rho_e(r) = K \cdot \exp\left(-\frac{2r}{a_0}\right)$, où a_0 est le rayon de Bohr.

a) Déterminer la valeur de K permettant d'assurer la neutralité de l'atome.

b) Préciser les caractéristiques du champ électrique créé en tout point de l'espace par l'atome.

c) Comment décroît le champ électrique avec la distance au noyau ? Commenter.

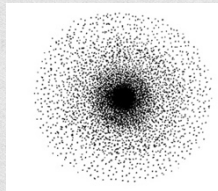


Figure 49

Exercice 3 – Etude d'une membrane cellulaire

Une membrane cellulaire est assimilée au plan yOz ; l'axe Ox est orienté vers l'extérieur de la cellule (Fig. 50). Toutes les grandeurs physiques sont supposées ne dépendre que de l'abscisse x .

Une micro-électrode relevant l'évolution du potentiel à la traversée de la membrane (de l'extérieur vers l'intérieur de la cellule), indique une variation de potentiel électrique en général négative.

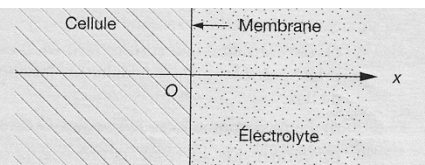


Figure 50

On schématise le potentiel par la fonction $V(x)$ suivante :

$$\begin{cases} \text{pour } x \leq 0, V(x) = -V_0 \\ \text{pour } x > 0, V(x) = -V_0 \cdot \exp\left(-\frac{x}{a}\right), \end{cases}$$

où V_0 est une constante positive homogène à un potentiel et où a est une distance.

a) Exprimer le champ électrique en tout point.

b) Appliquer le théorème de Gauss à une surface cylindrique d'axe Ox et de base S , limitée par les plans d'abscisses x et $x + dx$ (Fig. 51). En déduire la densité volumique de charge ρ en tout point.

Quel est le signe de ρ ? Comment une densité volumique de charge peut-elle exister dans un liquide (quels sont les porteurs de charge présents) ?

c) En examinant l'éventuelle discontinuité du champ électrique, déterminer la densité surfacique de charge σ présente sur la surface d'équation $x = 0$.

d) Calculer la charge totale contenue dans un cylindre d'axe Ox et de base S , s'étendant indéfiniment le long de l'axe Ox (de $-\infty$ à $+\infty$). Commenter ce résultat.

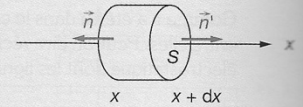
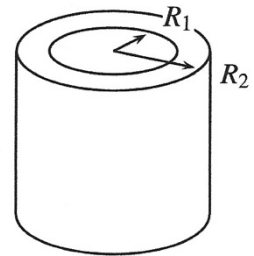


Figure 51

Exercice 4 – Condensateur cylindrique

19.1 Condensateur cylindrique (*)

Un condensateur cylindrique est constituée de deux armatures. L'armature intérieure est un cylindre de rayon R_1 et de hauteur h , elle porte la charge Q ; l'armature extérieure est un cylindre de même axe, de rayon R_2 , de même hauteur et porte la charge $-Q$. L'espace inter-armatures est vide. On néglige les effets de bord.



1. Que signifie négliger les effets de bord ?

2. Établir l'expression du champ électrique en tout point de l'espace.

3. Établir l'expression de la différence de potentiel entre les deux armatures.

4. En déduire l'expression de la capacité du condensateur cylindrique.

Pour aller plus loin

Autour de l'énergie électrostatique et gravitationnelle

Exercice 5 – Energie et capacité d'un condensateur sphérique

On considère un ensemble de deux conducteurs sphériques de même centre et de rayons R_1 et R_2 (Fig. 25). Le conducteur central porte la charge Q répartie sur sa surface et le conducteur extérieur est uniformément au potentiel nul. Il n'y a pas de champ électrique à l'extérieur de la sphère de rayon R_2 (potentiel uniformément nul jusqu'à l'infini).

On admet que la densité volumique de charge est nulle en tout point des conducteurs (voir Question de raisonnement 3).

- Exprimer le champ électrique en tout point.
- En déduire l'expression de l'énergie électrique totale U_E de ce système.
- Le dispositif constitue un condensateur : exprimer sa capacité C .
- La relation entre U_E , Q et C est-elle conforme aux attentes ?

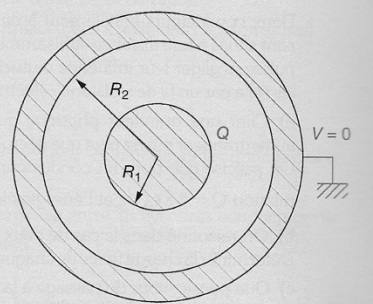


Figure 25

Exercice 6 – Cohésion d'une goutte liquide

Une goutte de liquide conducteur, seule dans l'espace, porte une charge électrique. On envisage la transformation correspondant à la division de cette goutte en deux gouttes sphériques, séparées d'une distance suffisante pour qu'on puisse négliger leur interaction (Fig. 26).

On précise que pour un corps sphérique conducteur portant la charge Q , celle-ci se répartit en surface (la densité volumique de charge est nulle dans le volume du corps).

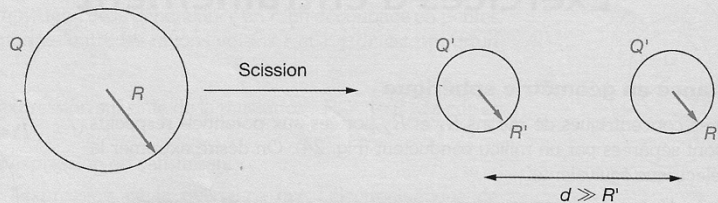


Figure 26

- Justifier alors la relation :
$$U_E = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R}$$

où R est le rayon de la goutte.

- Déterminer la variation d'énergie électrostatique du système lors de la transformation. Commenter le signe.
- Les effets de tension de surface doivent également être pris en compte. On admet que l'énergie nécessaire à l'accroissement de l'aire de la surface, d'une valeur dS , s'écrit $\delta W = A \cdot dS$ où A est un facteur constant. Exprimer l'énergie nécessaire lors de la transformation précédente.

d) Pour une goutte de rayon initial 10^{-4} m, sachant que l'ordre de grandeur de A est $A \approx 10^{-2} \text{ J}\cdot\text{m}^{-2}$, quelle devrait être la charge initiale pour que la scission soit spontanée ? Quelle valeur du champ électrique observerait-on alors, dans l'état initial, au voisinage de la goutte ? Conclure.

Exercice 7 – Energie du champ gravitationnel terrestre

La terre de rayon $R_T = 6400$ km et de masse $M_T = 6 \cdot 10^{24}$ kg est considérée comme une sphère de masse volumique ρ uniforme.

- Rappeler les résultats du cours donnant les expressions du champ gravitationnel en tout point de l'espace.
- Par analogie avec le champ électrostatique, établir l'expression de la densité d'énergie gravitationnelle.
- Exploiter cette relation pour établir U_g l'énergie gravitationnelle terrestre totale : $U_g = -\frac{3GM_T^2}{5R_T}$. En donner une application numérique.
- Déterminer alors l'énergie qu'un empire ennemi galactique devrait fournir pour détruire la Terre à l'aide d'une bombe, ou de tout autre moyen, dont l'effet serait de partager la Terre en N boules identiques (sans perte de masse), disséminées dans tout l'espace sans vitesse finale. Vous évalueriez la différence d'énergie entre les deux états du système. Commenter votre résultat, et réaliser une application numérique pour partager la Terre en deux.

A titre de comparaison, la somme totale des énergies des bombes atomiques ayant à ce jour explosé sur Terre est de $2 \cdot 10^{18}$ J.

Au sujet du champ gravitationnel – Mesures par gravimétrie (concours CS)

La gravimétrie est l'étude des variations spatio-temporelles du champ de pesanteur. Elle permet en particulier de déterminer la répartition de la masse au sein de la Terre et ainsi de remonter à sa structure. Plus précisément, la gravimétrie est utilisée pour déterminer la forme de la Terre (géodésie), pour détecter des cavités (génie civil ou archéologie) ou encore pour suivre les stockages d'eau (hydrologie continentale).

Données numériques

Constante de gravitation universelle :	$G = 6,7 \cdot 10^{-11} \text{ kg}^{-1} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-2}$
Rayon de la Terre :	$R_T = 6,4 \cdot 10^3 \text{ km}$
Masse de la Terre :	$M_T = 6,0 \cdot 10^{24} \text{ kg}$
Unité de mesure de la pesanteur :	$1 \text{ gal} = 1,0 \text{ cm}\cdot\text{s}^{-2}$
Ordre de grandeur de la sensibilité des gravimètres actuels :	$\Delta g = 1 \mu\text{gal}$

Partie A - Champ gravitationnel et champ de pesanteur terrestre

- Énoncer le théorème de Gauss appliqué à la gravitation en précisant les analogies entre forces électrostatiques et gravitationnelles. On notera \vec{G} le champ gravitationnel.

La Terre est assimilée à une boule homogène de rayon R_T , de centre C et de masse M_T uniformément répartie en volume. On repère un point M de l'espace dans le système de coordonnées sphériques d'origine C , associé à la base locale $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$. On appelle $z = r - R_T > 0$ l'altitude d'un point M situé à l'extérieur de la Terre et on associe à ce point un axe (Oz) (verticale du lieu) dont l'origine O est en $r = R_T$ et tel que $\vec{u}_z = \vec{u}_r$.

- Déterminer l'expression du champ gravitationnel \vec{G}_T créé par la Terre à une altitude $z > 0$.

Soit un corps de masse m , assimilé à un point matériel, situé à la distance $r = R_T$ du centre C de la Terre (altitude $z = 0$). On définit le vecteur unitaire local \vec{u} perpendiculaire à l'axe (Δ) de rotation de la Terre sur elle-même (figure 12.20).

- Montrer que l'intensité du champ gravitationnel selon la verticale s'écrit, pour $z \ll R_T$:

$$G_T(z) \approx \frac{GM_T}{R_T^2} \left(1 - \frac{2z}{R_T}\right).$$

- Calculer l'altitude dont il faut s'élever pour observer une variation de 1% de G_T .
- Donner l'expression du gradient vertical du champ gravitationnel.
- Les géophysiciens utilisent comme unité de mesure du champ de pesanteur le gal avec $1 \text{ gal} = 1,00 \text{ cm.s}^{-2}$. Évaluer la valeur du gradient exprimée en $\mu\text{gal.cm}^{-1}$.

Partie B - Applications de la gravimétrie

Dans cette partie, le champ de pesanteur est assimilé au champ gravitationnel. Par une analyse gravimétrique, on cherche à déterminer les dimensions d'un corps sphérique enterré dans un sol de masse volumique moyenne μ_m (voir figure 12.21).

- Déterminer l'expression du champ de pesanteur en un point M situé à l'extérieur d'une boule homogène de rayon R et de masse volumique $\mu' = \mu_m + \Delta\mu$ en fonction de μ_m , $\Delta\mu$, G , R , r , distance de M au centre de la boule, et du vecteur unitaire \vec{u}_r (voir figure 12.21). On pourra utiliser sans le redémontrer le résultat de la question A.2.

Le corps sphérique se trouve à une profondeur h dans le sol. Loin de la sphère (pour $r \gg R$), le champ de pesanteur est vertical selon Oz de valeur g_0 .

- Déterminer g_z , la composante verticale du champ de pesanteur créé par la boule au point M situé à une distance x de la verticale.
- Montrer que l'anomalie gravimétrique Δg , qui fait varier le champ de pesanteur apparent en un lieu, est identique au champ de pesanteur g'_z créé par une boule de masse volumique $\Delta\mu$.

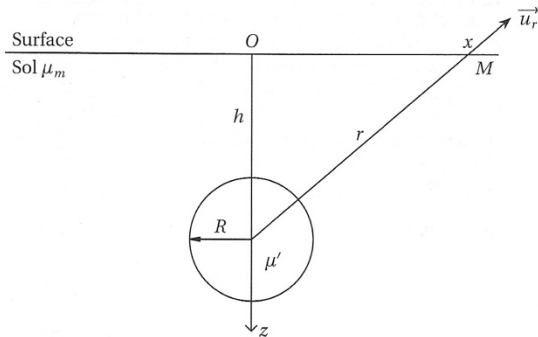


Figure 12.21

- Montrer que l'anomalie gravimétrique s'écrit $\Delta g = \frac{4\pi G \Delta\mu R^3 h}{3(x^2 + h^2)^{3/2}}$.
- Tracer l'allure de la courbe Δg en fonction de x pour des boules identiques enterrées à deux profondeurs différentes h_1 et $h_2 > h_1$.
- Quel est le lien entre la profondeur h et la largeur à mi-hauteur de la courbe? Que vaut l'anomalie gravimétrique maximale?
- Déterminer, à l'aide de la courbe de la figure 12.22, la profondeur h et le rayon R de la sphère enterrée.

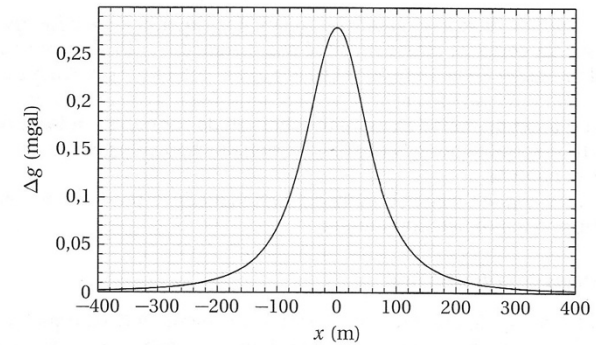


Figure 12.22. Anomalie gravimétrique Δg pour une sphère enterrée, avec $\Delta\mu = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$.

- Comment rendre indétectable par analyse gravimétrique de l'or stocké dans une grotte sphérique?
- La grotte de 1 m de rayon est à 4 m de profondeur. Quelle masse d'or est-il possible de cacher par cette méthode? La masse volumique de l'or est $\rho_{\text{or}} = 19300 \text{ kg.m}^{-3}$.
- Une étude archéologique préalable dans du grès prévoit la disposition de deux grottes sphériques de même dimension sous une couche de calcaire présente à partir de $x = 0$ (voir figure 12.23). Tracer l'allure de la courbe de l'anomalie gravimétrique attendue $\Delta g = f(x)$ en vous aidant de la figure 12.24.

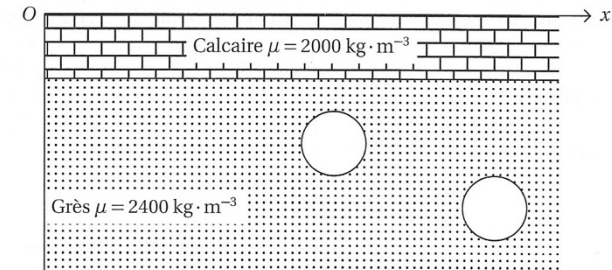


Figure 12.23. Structure du sol faisant apparaître deux grottes sphériques.

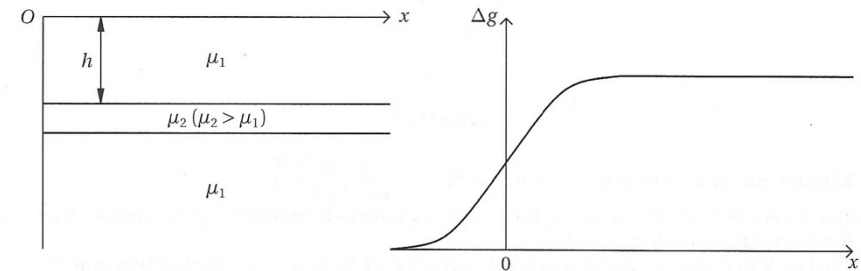


Figure 12.24. Anomalie gravimétrique pour une plaque horizontale semi-infinie.

Autour du potentiel électrique

Exercice 7 – Ecrantage d'un champ électrostatique dans un électrolyte

Une charge q est placée en un point O pris comme origine de l'espace dans un électrolyte remplissant tout l'espace et constitué de cations K^+ et d'anions A^- . On repère un point M par ses coordonnées sphériques. Le problème étant invariant par toutes les rotations autour de O , le potentiel $V(r)$ ne dépend que de r .

1. Les densités volumiques d'ions sont données par les expressions :

$$n_+(r) = n_0 \exp\left(-\frac{eV(r)}{k_B T}\right) \quad \text{et} \quad n_-(r) = n_0 \exp\left(\frac{eV(r)}{k_B T}\right).$$

Interpréter qualitativement ces expressions.

2. On suppose que $e|V(r)| \ll k_B T$. Montrer que le potentiel $V(r)$ est solution d'une équation différentielle de la forme :

$$\Delta V - \frac{V}{D^2} = 0$$

où Δ est le laplacien et D une constante qu'on explicitera en fonction de ϵ_0 , k_B , T , n_0 et e .

3. Pour une fonction $V(r)$ on a :

$$\Delta V = \frac{1}{r} \frac{d^2(rV)}{dr^2}.$$

En déduire la forme générale de $rV(r)$ puis de $V(r)$ et achever sa détermination en admettant que dans la limite $M \rightarrow O$ le potentiel doit être celui créé par la charge q seule. Que représente concrètement D ?

4. La charge q en O modélise un ion complexe dans une solution aqueuse. Expliquer qualitativement pourquoi l'ajout d'un électrolyte favorise l'agrégation de deux ions complexes. En déduire pourquoi le dépôt de sédiments est particulièrement important au débouché des fleuves sur les mers.

Exercice 8 – Problème de Laplace en géométrie cylindrique

On considère un cylindre conducteur d'axe Oz et de rayon R maintenu au potentiel nul et plongé dans un champ électrique extérieur uniforme $\vec{E} = E_0 \cdot \vec{u}_x$ (Fig. 22). Il se produit un phénomène d'influence, qui amène un déplacement des charges dans le conducteur et la production d'une électrisation superficielle. Le champ créé par le cylindre s'ajoute au champ extérieur ; on recherche ici, à l'équilibre, l'expression du potentiel et du champ électrique total, ainsi que la distribution des charges sur le cylindre.

On raisonne en coordonnées cylindriques (r, θ, z) et on pourra utiliser l'annexe « Éléments d'analyse vectorielle ».

a) Examiner les symétries et invariances (le cylindre est infini selon Oz).

b) Quelle est l'équation locale satisfaite par le potentiel V en tout point à l'extérieur du cylindre ? On se propose de chercher si une solution de la forme $V = f(r)g(\theta)$ (produit de deux fonctions d'une variable) convient. (Il est essentiel de comprendre que, dans cette résolution, on cherche à **construire** une solution. Il est donc légitime de faire des choix arbitraires !) Montrer qu'il existe alors une constante K telle que $K = r \frac{f'}{f} + r^2 \frac{f''}{f} = -\frac{g''}{g}$.

c) Chercher g sous la forme $g = \cos \theta$ et en déduire K . Chercher alors une solution pour f sous la forme $f = r^n$; puis en déduire une relation entre K et n , donc les valeurs de n . Montrer que l'expression $V(r, \theta) = \left[Ar + \frac{B}{r}\right] \cos \theta$ convient.

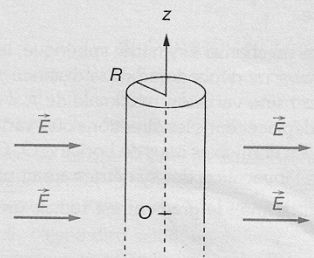


Figure 22

d) On s'intéresse à la solution dans l'espace extérieur au cylindre. À l'aide des conditions aux limites, déterminer A et B en fonction de E_0 et R .

e) Exprimer le champ électrique total à l'extérieur du cylindre. Esquisser la carte du champ dans le plan xOy .

Exercice 9 – Effet de bord dans un condensateur

Un condensateur plan est constitué de deux armatures planes parallèles de surface S et distantes de e .

On cherche à quantifier l'importance des effets de bord dans un condensateur réel. Les armatures notées (1) et (2) sont supposées rectangulaires et infinies selon \vec{u}_y , mais semi-infinies selon \vec{u}_x , c'est-à-dire comprises entre $x = 0$ et $x = +\infty$. Elles portent des charges surfaciques de densités respectives $\sigma_1 = \sigma(x)$ et $\sigma_2 = -\sigma(x)$ opposées, et sont portées aux potentiels $V(z = -e/2) = U/2$ et $V(z = +e/2) = -U/2$.

1. La figure 12.17 représente la carte de champ électrostatique associée au condensateur plan semi-infini décrit précédemment.

- Interpréter le sens des lignes de champ électrique entre les armatures.
- Interpréter la direction du champ électrique sur les armatures en $z = \pm e/2$.
- Interpréter la direction du champ électrique dans le plan $z = 0$.
- Interpréter la forme des tubes de champ loin du bord $x = 0$, puis l'évasement des tubes de champ qui sortent du condensateur près de son bord.

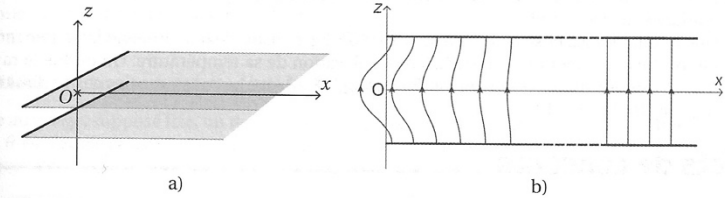


Figure 12.17. Condensateur plan semi-infini. (a) Vue en perspective (b) Lignes de champ dans le plan de coupe (xOz) .

On cherche à présent à déterminer le potentiel $V(x, z)$ régnant entre les deux armatures.

- Quelle équation vérifie le potentiel $V(x, z)$? Quelle propriété de parité en z est attendue?
 - En déduire l'expression qu'aurait le potentiel $V_0(z)$ en fonction de U , e et z si les armatures s'étendaient de $x = -\infty$ à $x = +\infty$. Quelle serait l'expression correspondante E_0 du champ électrique?
 - On pose désormais :

$$V^*(x, z) = V(x, z) + \frac{zU}{e}.$$

Quelle valeur imposent les conditions aux limites à $V^*(x, z = \pm e/2)$?

- On cherche des solutions de la forme $V^*(x, z) = f(x)g(z)$. Montrer que nécessairement :

$$\frac{d^2 f}{dx^2} - C f = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d^2 g}{dz^2} + C g = 0,$$

où C est une constante positive.

(e) En déduire que :

$$V_n^*(x, z) = A_n \sin\left(2n\pi \frac{z}{e}\right) \exp\left(-2n\pi \frac{x}{e}\right) \quad \text{avec } n \text{ entier et } A_n \text{ réel.}$$

3. La solution du problème s'obtient par combinaison linéaire des V_n^* , soit :

$$V(x, z) = -\frac{zU}{e} + \sum_{n=1}^{\infty} V_n^*(x, z),$$

mais on peut, en bonne approximation, limiter la série au premier terme et supposer $A_1 \approx U$.

- En déduire l'expression des composantes E_x et E_z du champ électrique en fonction de U , e , x et z .
- À partir de quelle valeur de x/e l'erreur relative $\|\vec{E} - \vec{E}_0\|/\|\vec{E}_0\|$ commise en négligeant les effets de bords est-elle inférieure à 10^{-3} ?