

Khalil
MOUSSA
PST

Physique Chap 4: Électromagnétisme

①

I) Champ $\vec{E}$ et équation de Maxwell

1) Équation de Maxwell en régime variable

Maxwell-Gauss (MG)

$$\text{div } \vec{E} = \rho / \epsilon_0$$

Maxwell-Faraday (MF)

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Champ électromagnétique: $\vec{E}(M, t)$ et $\vec{B}(M, t)$

• MG relie le champ à ses causes $\rightarrow$ la distribution de charges D.

$\vec{E}(M, t)$ ρ densité volumique de charges

$\rho(M, t)$

Unité: ρ en C/m^3 E en V/m

- ODS de $\vec{E}$ / charge résiduel

créé par les rayons $100 V/m$

champ résiduel "classique" sur Terre $10 V/m$

$$c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}$$

$$\text{avec } c \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

ϵ_0 permittivité diélectrique du vide

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$$

2) Régime stationnaire = électrostatique

Exemple: Dipoles et multipôles de $t \rightarrow \vec{E}$ et $\vec{B}$ indépendants de t .

$$\rho(0, t) = \rho(M)$$

Avec $\vec{E}(M, t) = \vec{E}(M)$

$$\text{div } \vec{E} = \rho / \epsilon_0$$

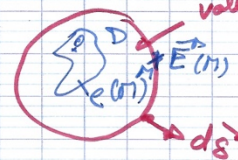
MG

$$\text{rot } \vec{E} = \vec{0}$$

$\rightarrow$ $\vec{E}$ irrotationnel

3) Théorème de Gauss = équation intégrale

volume V def. par Σ surface fermée



$$\iiint_V \text{div } \vec{E} dV = \iiint_V \rho / \epsilon_0 dV$$

(Théorème d'Ostrogradsky) $\rho = \frac{dq}{dV}$

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \frac{dq}{\epsilon_0}$$

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

Le flux de $\vec{E}$ à travers une surface fermée est égal à la somme des charges intérieures / ϵ_0 .

4) Circulation conservative de $\vec{E}$

Σ contour fermé orienté



Circulation $\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l}$ Théorème de Stokes

$$\text{rot } \vec{E} = \vec{0} \rightarrow \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

La circulation de $\vec{E}$ sur tout contour fermée est nulle.

II) Potentiel scalaire électrique

1) Existence du potentiel électrique et circulation de $\vec{E}$

$$\text{rot } (\text{grad } A) = \vec{0} \text{ avec } A(M) \text{ scalaire}$$

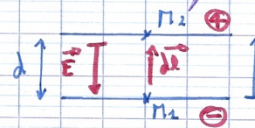
$\text{rot } \vec{E} = \vec{0}$ donc il existe un scalaire / pot ($-\text{grad } V$) = 0
avec $\vec{E} = -\text{grad } V$  $\rightarrow \vec{E}$ dans le sens des potentiels décroissants
 $\rightarrow \vec{E}$ orienté des charges $\oplus \rightarrow \ominus$.

Par définition: $dV = \text{grad } V \cdot d\vec{l} \rightarrow dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l}$ 
du gradient V en volt

$$dV = V(M_2) - V(M_1) = - \int_{M_1}^{M_2} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

M_1 M_2
 $\mathcal{C}$ contour ouvert

La différence de potentiel est égale à la circulation de $\vec{E}$ entre ces 2 points. • Exemple: condensation



$$V = V(M_2) - V(M_1)$$

$$U = V(M_2) - V(M_1)$$

$$U = - \int_{M_1}^{M_2} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

} uniforme

$$U = Ed$$

$$\begin{aligned} &= \int_{M_1}^{M_2} E dl \\ &= E \cdot \int_{M_1}^{M_2} dl \\ &= Ed \end{aligned}$$

1) Lien avec l'Ep électrique statique

Justification du signe $\ominus$ / $\vec{E} = -\text{grad } V$

Force conservative: $\delta W = -dE_p \rightarrow$
avec ici $\delta W = \vec{F}_{\text{élect}} \cdot d\vec{l}$
 $\Leftrightarrow -dE_p = q \vec{E} \cdot d\vec{l}$
 $\Leftrightarrow -dE_p = -q dV$
 $\Leftrightarrow dE_p = q dV$

$$E_p = qV + \text{cst}$$

3) Équation de Poisson

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{E} &= \text{div } (-\text{grad } V) \\ &= -\Delta V = \rho / \epsilon_0 \end{aligned}$$

$$\Delta V + \rho / \epsilon_0 = 0 \rightarrow \text{équation aux dérivées partielles (2ème ordre) qui relie } V \text{ à sa cause!}$$

($\Delta T = 0$ en régime statique)
 $\hookrightarrow$ température

III) Propriétés topographiques

1) Eraseur du tube de champ et norme de $\vec{E}$

- ligne de champ: courbe tangente en tout point à $\vec{E}$ orientée selon $\vec{E}$
- tube de champ: surface définie par des lignes de champs qui s'appuient sur $\mathcal{C}$ fermée.

Dans un domaine vide de charges: $\text{div } \vec{E} = \vec{0}$
 $\Rightarrow \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$
flux conservatif

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{S_1} \vec{E}_1 \cdot d\vec{S}_1 + \int_{S_2} \vec{E}_2 \cdot d\vec{S}_2 + \int_{S_3} \vec{E}_3 \cdot d\vec{S}_3 = 0$$

$$E_1 S_1 + E_2 S_2 + E_3 S_3 = 0$$

Au sein de la source du champ E la densité S
 $\Rightarrow$ évanescence des lignes et tubes de $\vec{E}$

Nhali
MOUSSA
PSI

2) Surfaces équipotentielles

surf. équi-V
ind. d. l.

surface où V est
 $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l}$

sur la
surf. équi-V $0 = \vec{E} \cdot d\vec{l}$ donc $\vec{E} \perp d\vec{l}$
Donc $\vec{E} \perp$ avec surf. équi-V.

Remarque:

- les lignes de champ ne se rejoignent jamais
- la long. d'une ligne de champ
le potentiel car $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l}$
dK > 0 avec dK sur la ligne de champ

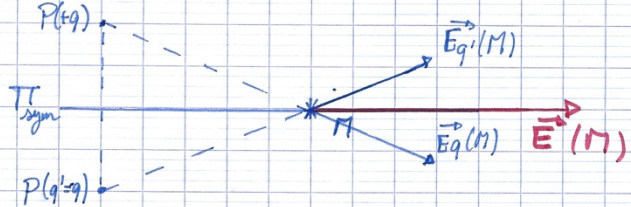
IV) Symétries et invariances de $\vec{E}$ polarisées (et du potentiel)

$\vec{E}$ est un vecteur polaire car son sens ne dépend pas de l'orientation de l'espace (propriétés continues aussi dans les équats de Maxwell).

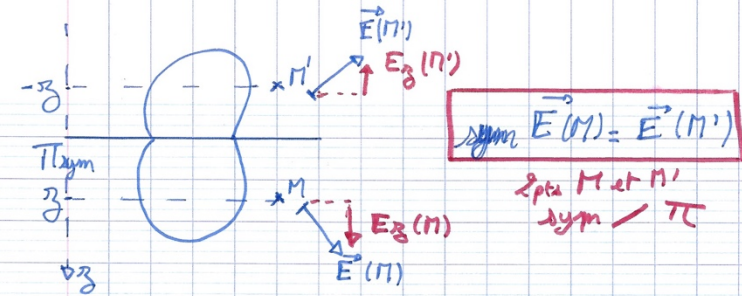
1) Symétries des distributions de charges D et conséquence

Bat: réduire les composantes de $\vec{E}$ dans une base locale bien choisie en analysant les plans de symétrie de D.

Symétrie plane.



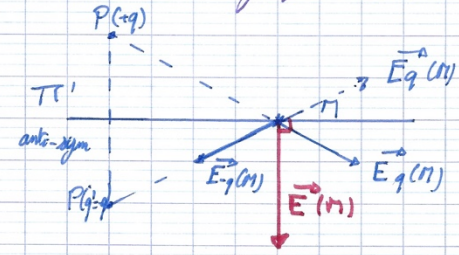
Si $M \in T_{sym}$ alors $\vec{E}(M) \in$ au plan sym. ♥



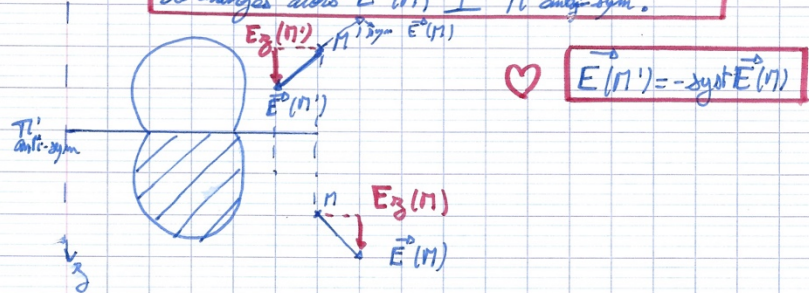
$E_z(z) = -E_z(-z)$ fonction impaire et potentiel pair

→ Anti-sym plane

Un plan Π' est plan d'anti-sym de D si les charges en 2 pts P et P' sym / à Π' sont opposées.



Si MG a un plan d'anti-sym de la distribution de charges alors $\vec{E}(M) \perp T_{anti-sym}$.



$E(z) = E(-z) \rightarrow \vec{E}$ est pair et potentiel impair

2) Invariances de D

Bat: supprimer la dpt de $\vec{E}$ selon certaines variables d'espace!

→ invariance par translation

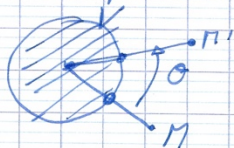


$$M' = \vec{r}(M) \quad \rightarrow \text{translat.}$$

$$\Rightarrow \vec{E}(M) = \vec{E}(M')$$

Ici $\vec{E}$ indpt de z !

→ invariance par rotat°



$$M' = \vec{r}(M) \quad \rightarrow \text{rotat.}$$

$$\Rightarrow \vec{E}(M') = \vec{E}(M)$$

$\vec{E}$ indpt de θ

V) Calcul de champ $\vec{E}$ stat et de potentiel pour des distributions de charge à symétrie de D

1) Méthode

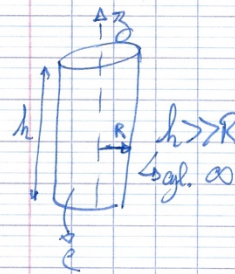
- On analyse les symétries planes et les invariances pour réduire le champ $\vec{E}$ à une composante dans une base adaptée à la symétrie de D et réduire ses dépendances spatiales.

→ On applique le théorème de Gauss en choisissant une surface équipotentielle ainsi $\vec{E} \parallel d\vec{S}$ sur cette surface équi- V que

l'on formera par des surfaces complémentaires si elle ne l'est pas!

Remarque: On n'utilisera pas directement $\text{rot } \vec{E} = \vec{0}$ mais les champs calculés le vérifieront.

2) Distribution de charge à symétrie cylindrique: cylindre ∞ uniformément chargé



→ Symétries planes:

- Tout plan contenant M et l'axe Oz est plan de symétrie ($\theta = \text{cst}$)

$$\Rightarrow E_\theta = 0$$

- Tout plan contenant M et $\perp$ à Oz ($z = \text{cst}$) est plan de symétrie de D

$$\Rightarrow E_z = 0$$

$$\Rightarrow \vec{E} = E(r, \theta, z) \vec{e}_r$$

Bien sûr $\vec{E} \in$ à l'intersection de deux plans $\Rightarrow$ m conclusion

→ Invariances

Invariance par translation selon z et par rotation selon θ .

$$\Rightarrow E(r, \theta, z) = E(r)$$

$$\vec{E} = E(r) \vec{e}_r$$

De même le potentiel $V(r)$!

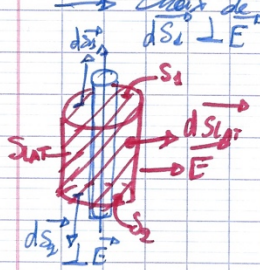
Equi-pot $\rightarrow$ cylindre ∞ d'axe Oz .

Khail
MOUSHA
PSE

D'autre part, $\vec{E} = E(r) \cdot \vec{e}_r$ implique $\text{rot } \vec{E} = \vec{0}$!

On peut faire ce calcul avec l'expression de $\text{rot } \vec{E}$ en coord. cyl.

Choix de la surface de Gauss fermée



$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S}_1 + \iint_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{S}_2 + \iint_{S_{LAT}} \vec{E} \cdot d\vec{S}_{LAT}$$

$$\begin{aligned} \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} &= \iint_{S_{LAT}} E(r) \vec{e}_r \cdot dS_{LAT} \vec{e}_r \\ &= \iint_{S_{LAT}} E(r) \times dS_{LAT} \\ E(r) \text{ uniforme} \quad &= E(r) \times S_{LAT} \\ &= E(r) \times 2\pi r h \end{aligned}$$

$r > R$: champ à l'ext de D:



$Q_{int} = "Q_{initiale}" = \rho \text{ Vint} = \rho \pi R^2 h$

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \quad E(r) \times 2\pi r h = \frac{\rho \pi R^2 h}{\epsilon_0}$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \frac{1}{r} \vec{e}_r} \quad \rightarrow E(r=R) = \frac{\rho R}{2\epsilon_0}$$

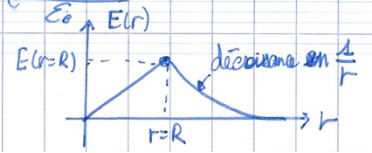
$r < R$: champ à l'int de D:



$Q_{int} = \rho \times \pi r^2 h$

$$E(r) \times 2\pi r h = \frac{\rho \pi r^2 h}{\epsilon_0} \quad E(r) = \frac{\rho r}{2\epsilon_0}$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\rho}{2\epsilon_0} r \vec{e}_r} \quad \rightarrow E(R) = \frac{\rho R}{2\epsilon_0}$$



- $\vec{E}$ est continue en $r=R$

- $\vec{E}$ décroît en $1/r$ (pour $r > R$)

Résumé : Modèle du fil avec ρ positif linéique, une forme de charges caractérisée par λ la densité linéique de charges $dq = \lambda dl$. λ en C/m

On fait tendre $R \rightarrow 0$ au cas précédent.

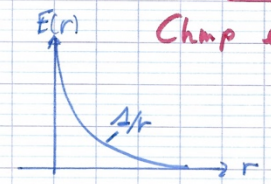
$dl \quad dq = \lambda dl$ m pte de sym & d'invariance

$E \times 2\pi r h = \frac{\lambda h}{\epsilon_0}$

$Q_{int} = \lambda h$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\lambda}{2\epsilon_0 \pi} \frac{1}{r} \vec{e}_r}$$

Champ en $1/r$ type



Effet de la modélisat° le champ diverge lorsque $r \rightarrow 0$!

Potential électrique

$$\vec{E} = -\text{grad } V \Leftrightarrow dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l}$$

avec $d\vec{l} = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + dz \vec{e}_z$

$$dV = -E dr$$

$r > R$ $dV = -\frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \frac{dr}{r}$

intégrat° $V = -\frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \ln(r) + \text{cst}$

Remarque: On ne peut choisir $V(r \rightarrow \infty) = 0$!
 Car $V(r)$ en $\ln(r)$!
 On choisit $V(r=R) = V_0$

$$V(r=R) = V_0 = -\frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \ln(R) + \text{cte}$$

$$\text{cte} = V_0 + \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \ln R$$

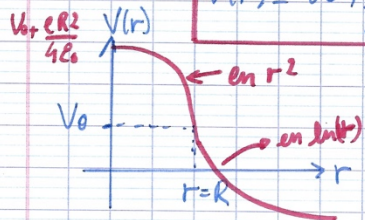
$$V(r) = V_0 - \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \ln\left(\frac{r}{R}\right)$$

• $r < R$: $dV = -E dr = -\frac{\rho r}{2\epsilon_0} dr$
 $\Rightarrow V(r) = -\frac{\rho r^2}{4\epsilon_0} + \text{cte}$

$$V(r=R) = V_0 = -\frac{\rho R^2}{4\epsilon_0} + \text{cte}$$

$$\text{cte} = V_0 + \frac{\rho R^2}{4\epsilon_0}$$

$$V(r) = V_0 + \frac{\rho}{4\epsilon_0} (R^2 - r^2)$$



le potentiel est continu
en $r = R$!

3) Symétrie à distribution sphérique = sphère uniformément chargée



→ sym. plane → tout les plans contenant M et O
 sont plans de sym.

→ plan $\varphi = \text{cte}$ $\vec{E} \in$ à ce plan → $E_\varphi = 0$

→ plan $\theta = \text{cte}$ $\vec{E} \in$ à ce plan → $E_\theta = 0$
 $\vec{E}(r, \theta, \varphi) = E(r) \vec{e}_r$

Bien sûr $\vec{E}$ à l'intersection de ces plans → $\vec{E}$ selon $\vec{e}_r$

→ Invariances

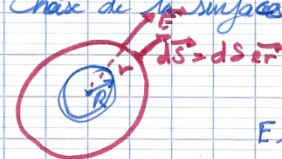
Invariance par rotation selon θ et φ → $\vec{E} = E(r, \theta, \varphi) \vec{e}_r$

$$\vec{E} = E(r) \vec{e}_r \text{ et } V(r)$$

→ implique soit $\vec{E} = \vec{0}$

→ équi-V sphérique de rayon r (fermée)

→ Choix de la surface de Gauss : sphère (fermée) de rayon r



$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_S E(r) dr \vec{e}_r \cdot d\vec{S} \vec{e}_r$$

$$E_{\text{uniforme sur } S} \oint_S E(r) dr = E(r) \times S$$

$$= E(r) \times 4\pi r^2$$

→ $r > R$: $Q_{\text{int}} = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho = E(r) \times 4\pi r^2$



$$E(r) \times 4\pi r^2 = \frac{\rho 4\pi R^3}{3\epsilon_0}$$

$$\vec{E}(r) = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \vec{e}_r \quad E(r=R) = \frac{\rho R}{3\epsilon_0}$$

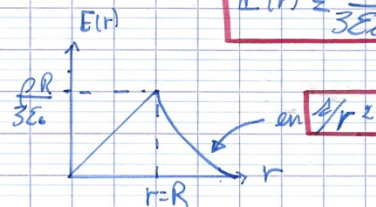
→ $r < R$



$$Q_{\text{int}} = \rho = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$$

$$E(r) \times 4\pi r^2 = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$$

$$\vec{E}(r) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r \vec{e}_r \quad \rightarrow E(r=R) = \frac{\rho R}{3\epsilon_0}$$



Khalil
MUSTA
PSI

- champ $\vec{E}$ continu en $r=R$
- décroît en $1/r^2$

→ Calcul de $V(r)$

$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l}$ avec $d\vec{l} = dr\vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + r \sin\theta d\varphi \vec{e}_\varphi$

$dV = -E \cdot dr$

• $r > R$: $\Rightarrow dV = -\frac{QR^3}{3\epsilon_0} \frac{1}{r^2} dr$

$\hookrightarrow V(r) = \frac{QR^3}{3\epsilon_0} \frac{1}{r} + \text{cst}$

$V(r \rightarrow +\infty) = 0$ compatible ici
 $\hookrightarrow \text{cst} = 0!$

$V(r) = \frac{QR^3}{3\epsilon_0} \frac{1}{r}$

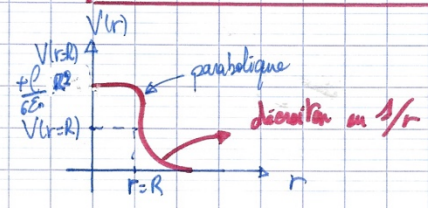
• $r \leq R$: $dV = -\frac{\rho}{3\epsilon_0} r dr$

$\hookrightarrow V(r) = -\frac{\rho}{6\epsilon_0} r^2 + \text{cst}$

En $r=R \rightarrow V(r=R) = -\frac{\rho R^2}{6\epsilon_0} + \text{cst}$

$\text{cst} = V(r=R) + \frac{\rho R^2}{6\epsilon_0}$

$V(r) = V(r=R) + \frac{\rho}{6\epsilon_0} (R^2 - r^2)$



Remarque : Sur le champ $\vec{E}$ pour $r > R$

où $\rho = 0!$
 $\text{div } \vec{E} = 0 \rightarrow \text{flux conservatif}$
 $\iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} \propto E(r) \times 4\pi r^2 = \text{cst}$

$\hookrightarrow E(r) \propto 1/r^2$

4) Cas de la charge partielle



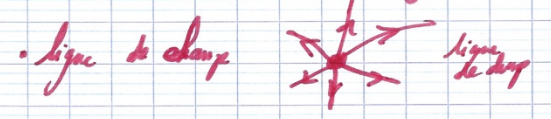
Grâce à l'inv. sym. que la dist. sphérique
 $E \times 4\pi r^2 = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \frac{q_2}{\epsilon_0}$

$\vec{E} = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$ ($\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{\vec{PM}}{PM}$)

$\vec{F} = q_1 \vec{E}$
 $\vec{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$ force entre deux charges q1 et q2 placées dans le champ de q2.

V en $1/r$ aussi:

Remarque : $r \rightarrow 0 \rightarrow \vec{E}$ diverge



5) Distribution surfacique de charges : plan ∞ uniformément chargé



$$dq = \sigma dS$$

$\hookrightarrow \sigma$ en C/m²

plan ∞ uniformément chargé

Plan de symétrie:

Tout plan $\perp$ à π et passant par M est un plan de sym.

- particulièrement (zOy) est un plan de sym.
 $\vec{E} \in$ à ce plan $\rightarrow E_x = 0$

- (zOx) est un plan de sym. passant par M donc $\vec{E} \in$ à ce plan
 $\hookrightarrow E_y = 0$

$\vec{E} = E(M) \vec{e}_z$

De la m^{me} manière, $\vec{E} \in$ à tout les plans sym donc à leur intersection selon $z \rightarrow$ m^{me} conclusion

Invariances

Invariances par translation de D selon x et y.

$\hookrightarrow \vec{E} = E(x, y, z) \vec{e}_z$

$\vec{E} = E(z) \vec{e}_z$

$\hookrightarrow$ ceci implique rot $\vec{E} = \vec{0}$

$\hookrightarrow$ le potentiel dpd de z $V(x, y, z) = V(z)$

$\hookrightarrow$ équi-V plan ∞ $z = \text{cst}$

Parité

π $M' = \text{sym}(M)$ $z = 0$

$$\vec{E}(M) = \text{sym} \vec{E}(M')$$

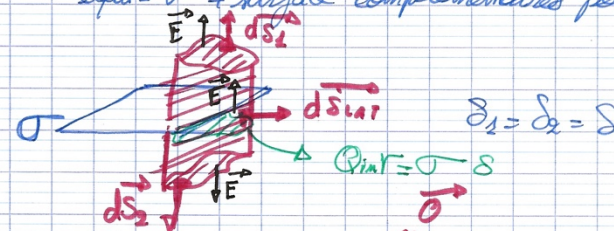
$E(-z) = -E(z)$

$\hookrightarrow$ fonction impaire

V fonction paire

Choix de la surface de Gauss

équi-V + surface complémentaire pour fermé



$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{S_{LAT}} \vec{E} \cdot d\vec{S}_{LAT} + \int_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S}_1 + \int_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{S}_2$$

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = E(z) \times S_1 - E(-z) S_2$$

$\hookrightarrow d\vec{S}_2 = -d\vec{S}_1 \vec{e}_z$

$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 2 E(z) \times S$

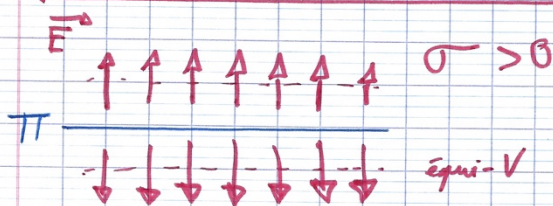
Charge intérieure $Q_{int} = \sigma S$

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 2 E(z) S = \frac{\sigma S}{\epsilon_0}$$

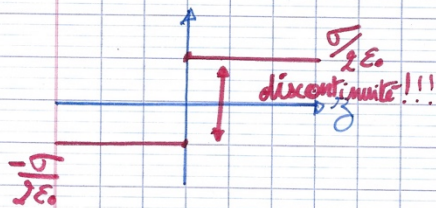
$$E(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

Khalil
MOUSSA
PSI

Pour $z > 0 \rightarrow \vec{E}(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_z$
 Pour $z < 0 \rightarrow \vec{E}(z) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_z$

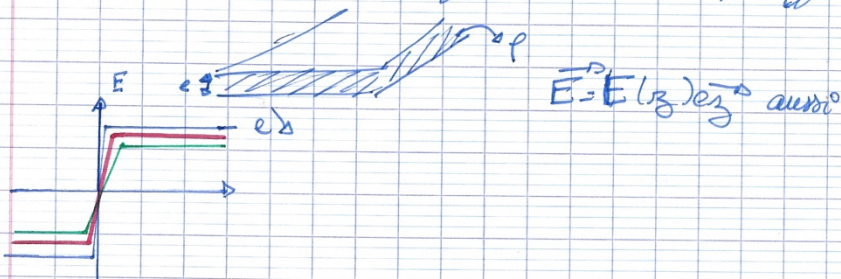


le champ $\vec{E}$ est est de part et d'autre de TT!



- Il n'existe pas de discontinuité de $\vec{E}$ uniquement dans le cas d'une distribution surfacique de charges!

Ceci indépendamment de la géométrie $\rightarrow$ sphérique, cyl....



b) Relation de passage du champ $\vec{E}$ à l'interface entre 2 milieux

$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{2,1}$

vient de $\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$

Nous avons démontré que: $\vec{E}_2 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_z$ $\vec{E}_1 = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_z$
 $\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \left(\frac{\sigma}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\right) \vec{e}_z$
 $= \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_z$

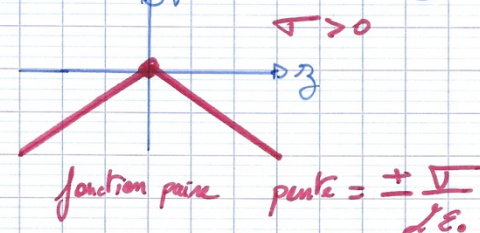
La relation de passage est vérifiée.

Signification: Discontinuité de la composante normale de $\vec{E}$ si il existe σ distribution de charges!

La composante tangentielle à l'interface est
type continue!

c) Potentiel électrique

$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l}$
 $dV = -E dz$ avec $E = \text{est}$
 $V = az + b$ avec $V(z=0) = 0$



fonction paire pente = $\pm \frac{V}{z} = \pm \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$

Tableau récapitulatif

	champ	potentiel
sym. sph.	$E \propto 1/r^2$	$V \propto 1/r$
sym. cyl.	$E \propto 1/r$	$V \propto \ln r$
sym. plane	$E \propto \text{ct}$	$V \propto z$

À l'ext de D



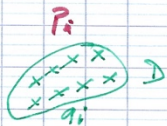
↳ $\sigma \rightarrow E$ discontinue mais continue

6) Principe de superposition

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \rho / \epsilon_0$$

Par linéarité des équations de Maxwell.
↳ Principe de superposition

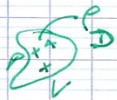
Exemple: Le champ créé par une distrib^o pontillée de charges est la somme des champs individuels.



$\times \vec{E}(\vec{M})$

$$\vec{E}(\vec{M}) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{e}_{r_iM}}{r_iM^2}$$

↳ Calcul numérique de $\vec{E}$



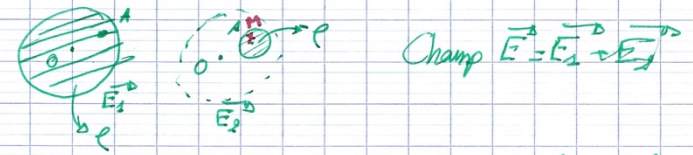
$$\vec{E}(\vec{M}) = \iiint_V \frac{\rho dV \vec{e}_{rM}}{4\pi\epsilon_0 rM^2}$$

Pour une distribution continue



sphère uniformément chargée mais trouée

Équivalent



Avec le champ à l'intérieur d'une sphère chargée uniformément.

$$\vec{E} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r \vec{e}_r \text{ avec } r\vec{e}_r = \partial \vec{r} = \partial \vec{r}$$

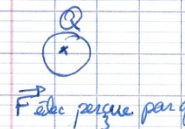
$$\vec{E} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \partial \vec{r} \text{ donc car } \vec{E}_1 = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \partial \vec{r}$$

$$\vec{E}_1 = -\frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{r}$$

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

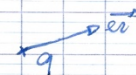
$$\boxed{\vec{E} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \partial \vec{r}} \text{ le champ est ct!!!}$$

VI) Théorème de Gauss pour le champ gravitationnel



$\vec{F}_{\text{attr}}$ perçue par q

$$\vec{F}_{\text{attr}} = q \vec{E} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$$



$\vec{F}_{\text{grav}}$ perçue par m

$$\vec{F}_{\text{grav}} = m \vec{g} = -\frac{GMm}{r^2} \vec{e}_r$$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \leftrightarrow -G$$

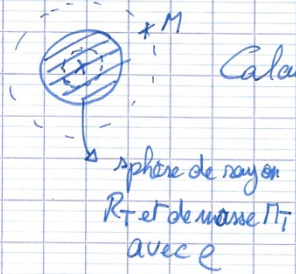
$$\boxed{\frac{1}{\epsilon_0} \leftrightarrow -4\pi G}$$

$$\text{div } \vec{E} = \rho / \epsilon_0 \Leftrightarrow \text{div } \vec{g} = -4\pi G \rho$$

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \Leftrightarrow \oint_S \vec{g} \cdot d\vec{s} = -4\pi G M_{\text{int}}$$

$$\text{rot } \vec{g} = \vec{0}$$

(6)

Khalil
MOUSSA
PSTCalculer $\vec{g}$ créé par la Terresym et invariance $\vec{g} = g(r)\vec{e}_r$

$$\oint_S \vec{g} \cdot d\vec{S} = g(r) 4\pi r^2$$

$$\bullet \underline{r > R} \Rightarrow M_{int} = \rho \times \frac{4}{3}\pi R_T^3 = M_T$$

$$g \times 4\pi r^2 = -4\pi G M_T$$

$$\boxed{g = -\frac{G M_T}{r^2} \vec{e}_r}$$

Force de gravitation subie par une masse m ,
en M / $\vec{F}_{grav} = -\frac{G M_T m}{r^2} \vec{e}_r$

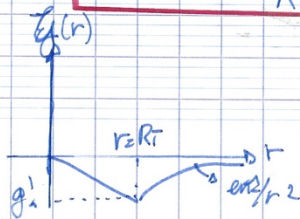
$$\bullet \underline{r < R} \Rightarrow M_{int} = \rho \times \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$g 4\pi r^2 = -4\pi G \rho \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$g = -\rho G \frac{4}{3}\pi r \quad M_T = \rho \frac{4}{3}\pi R_T^3$$

$$g(r) = -\frac{G M_T}{R_T^3} r$$

$$\boxed{g(r) = -\frac{G M_T}{R_T^3} r \vec{e}_r}$$



$$g = g(R_T) = -\frac{G M_T}{R_T^2} \vec{e}_r$$

$$g = g(r=R_T)$$

Chap - Condensateur

I) Phénomène d'influence électrostatique

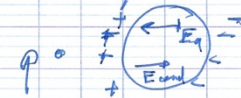
1) Description

Sous l'influence d'un champ $\vec{E}$ extérieur, un conducteur acquiert une électrisation qui s'oppose au changement extérieur.

$$\vec{E}(M) = \vec{E}_g(M) + \vec{E}_{conducteur}(M)$$

$\downarrow$ champ ext. créé par q
 $\downarrow$ opposé à $\vec{E}_g(M)$

Le champ $\vec{E}_g$ met en mouvement les e^- du conducteur qui se répartissent en surface



2) Condition d'équilibre électrostatique

Equilibre atteint $\rightarrow$ $\vec{J}$ de courants dans le conducteur $\vec{J} = \vec{0}$ et $\vec{E}_{int} = \vec{0}$

$\hookrightarrow$ V est cot à l'int.
 $\hookrightarrow$ $\rho = 0$ à l'int. $\rightarrow$ conducteur porte des charges en surface

3) Définition et propriétés générales d'un condensateur

Gauss pour $\vec{g}_1$ à l'int. du conduct.

$$\oint_S \vec{E}_{int} \cdot d\vec{S} = 0 = \frac{q_1 + q_2}{\epsilon_0}$$

$$\hookrightarrow \boxed{q_1 = -q_2 = q}$$

Les charges portées par les armatures sont opposées.

• Gauss pour y

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = V_2 - V_1 \rightarrow \text{différentielle de potentiel}$$

$$= U$$

$$q = CU = C(V_2 - V_1)$$

$\rightarrow q$ est $U = V_2 - V_1$ tout ça !

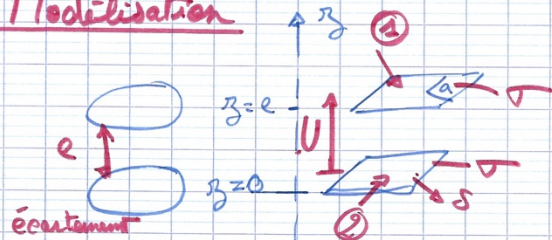
C'est le coef. de y ite

C en Farad

C ne dépend que de la géo !

II) Condensateur plan

1) Modélisation

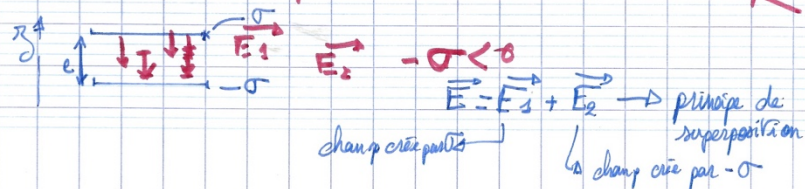


On néglige les effets de bord $\rightarrow$ plan ∞ soit $e \ll R$
 $e \ll a$

$$U = V_1 - V_2$$

$$U = V(z=e) - V(z=0)$$

2) Calcul du champ $\vec{E}$ entre armature et de la capacité C



$$\vec{E} = - \left(\frac{\sigma}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \right) \vec{e}_z$$

$$\vec{E} = - \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_z$$

$\rightarrow$ entre les armatures

Remarque : À l'ext. des armatures
 $z > e$ ou $z < 0 \rightarrow \vec{E} = \vec{0}$

$$U = V(z=e) - V(z=0)$$

$$= \int_0^e -\vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_0^e + \frac{\sigma}{\epsilon_0} dz$$

$$U = \frac{\sigma}{\epsilon_0} e = \frac{Qe}{S\epsilon_0}$$

$$Q = \frac{\epsilon_0 S}{e} U = CU$$

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{e}$$

Remarque : $\frac{dq}{dt} = C \frac{dU}{dt}$
 $i = C \frac{dU}{dt}$!

• effet de bord (cf doc)

3) Aspect énergétique

$$E_{elec} = \frac{1}{2} CU^2 = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 S}{e} (Ee)^2$$

$$E_{elec} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \frac{S e}{\text{volume}}$$

$$\text{densité d'énergie électrique} = U_{elec} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$