Khalil
MOUSSA
PSI

I) Champ magnétique

1) Équation de Maxwell et magnétostatique

$$\boxed{\begin{array}{ll} \operatorname{div} \vec{B} = 0 & (\text{MT}) \\ \vec{\operatorname{rot}}\, \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} & (\text{MA}) \end{array}}$$

En régime stationnaire :

$$\boxed{\vec{\operatorname{rot}}\, \vec{B} = \mu_0 \vec{j}}$$

↳ relie $\vec{B}$ à la source du champ → la distribution de courant

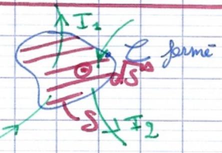
$B = 30\ T$ bobin supracond.

Au labo $B \simeq 10^{-3}\ T$

Champ magnétique terrestre $B \simeq 10^{-5}\ T$

2) Théorème d'Ampère & équation intégrale

I_1 compté ⊕
I_2 compté ⊖



$$\iint_S \vec{\operatorname{rot}}\, \vec{B} \cdot d\vec{S} \underset{\text{Th de Stokes}}{=} \oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \iint_S \mu_0 \vec{j} \cdot d\vec{S} = \mu_0 \underbrace{\iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}}_{I_{int}}$$

$$\boxed{\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{int}}$$

La circulation de $\vec{B}$ à travers un contour fermé est égale à $\mu_0 \times$ la somme algébrique des courants enlacés par $\mathcal{C}$!

⚠ L'orientation de $\mathcal{C}$ arbitrairement choisie définit le signe des courants !

Remarque : On peut prendre n'importe quelle S qui s'appuie sur $\mathcal{C}$.

3) Conservation du flux magnétique

$\operatorname{div} \vec{B} = 0$ → flux conservatif

$\boxed{\text{Les lignes de champ } \vec{B} \text{ se resserrent quand la norme de } B \nearrow.}$

Remarque : On peut définir un potentiel vecteur magnétique $\vec{A}$ / $\vec{B} = \vec{\operatorname{rot}}\, \vec{A}$ (hors prog.)

II) Symétries du champ $\vec{B}$

1) Caractère axial de $\vec{B}$

Le sens de $\vec{B}$ dpd de l'orientation de l'espace

↳ vecteur axial ou pseudo-vecteur (vient de $\vec{\operatorname{rot}}\, \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$)

($\vec{B}$ est défini par un produit vectoriel.)

Force de Laplace : $\boxed{\vec{F}_{Lapl.} = i\, d\vec{l} \wedge \vec{B}}$

Une force ne dpd pas de l'orientat° de l'espace.

on chge l'orientat du repère direct.

$\vec{e_y} \wedge \vec{e_z} = \vec{e_x}$ ← (x, y, z) direct

$\vec{F_L} = i\vec{dl} \wedge \vec{B}$

$F_L \vec{e_x} = i\,dl\, \vec{e_y} \wedge B\vec{e_z}$

(y, x, z) direct → $\vec{e_z} \wedge \vec{e_y} = \vec{e_x}$

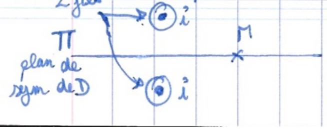
$\vec{F_L} = i\vec{dl} \wedge \vec{B}$

$F_L \vec{e_x} = i\,dl\, \vec{e_y} \wedge -B\vec{e_z}$

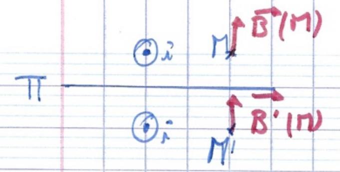
2) Symétries planes et invariances

→ Symétries planes (isométrie négative)

2 fils ⊥ au plan du tableau



$\boxed{\begin{array}{l} M \in \Pi \text{ symétrie} \\ \vec{B} \perp \text{à } \Pi \text{ symétrie} \end{array}}$

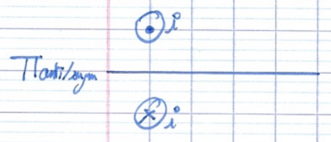


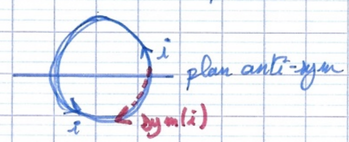
M $\notin$ au plan

$$\boxed{\vec{B}(M') = -\text{sym}(\vec{B}(M))}$$

$\vec{B}$ pair !

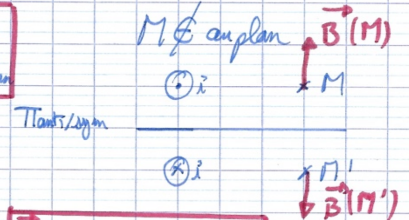
Ajouter le cas d'un fil





$$\boxed{\begin{array}{l} M \in \Pi_{anti/sym} \\ \vec{B}(M) \in \text{à ce plan} \end{array}}$$

M $\notin$ au plan



$$\boxed{\vec{B}(M') = \text{sym}(\vec{B}(M))}$$

→ Invariances par translation et par rotation (isométrie positive)

$\vec{M}$ comportement que pour $\vec{E}$.

3) $\vec{rot}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{j}$

↳ règle de la main droite

$\vec{B}$ selon "pouce"

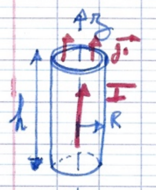
III) Champ $\vec{B}$ créé par des distributions de courant à haut degré de symétrie.

Méthode :

→ simplifier l'expression générale de $\vec{B}$
↳ symétries (planes) et invariance

→ utilisation du théorème d'Ampère.
On choisit un $\mathcal{C}$ fermé qui correspond à une ligne de champ. Ainsi $\vec{B}$ colinéaire à $d\vec{l}$!

1) Cas du fil épais et ∞ parcouru par I.



fil ∞ car $R \ll h$

→ $I = j_0 S = j_0 \pi R^2$

→ sym plane
◦ Tout plan contenant M et Oz est plan de sym.
$\vec{B} \perp$ à ces plans
$\vec{B} = B(M)\vec{e_\theta}$

Remarque : Tout plan $\perp$ à z contenant M est plan d'anti-sym → $\vec{B} \in$ à ces plans.
$\vec{B} = B_r \vec{e_r} + B_\theta \vec{e_\theta} \to B_z = 0$
Mais insuffisant !

→ Invariances
Invariance par translation selon z par rotation selon θ → $\vec{B} = B(r, \cancel{\theta}, \cancel{z})\vec{e_\theta}$

$\boxed{\vec{B} = B(r)\vec{e_\theta}}$ → lignes de champs
↳ div $\vec{B} = 0$!
↳ règle de main droite vérifiée

Khalil
MOUSSA
PST

→ Théorème d'Ampère : $\mathcal{C}$ cercle de rayon r

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B}\cdot\vec{dl} = \oint_{\mathcal{C}} B(r)\,\vec{e_\theta}\cdot dl\,\vec{e_\theta}$$

$$= \oint_{\mathcal{C}} B(r)\,dl = Bl$$

B uniforme sur $\mathcal{C}$

$$\boxed{\oint_{\mathcal{C}} \vec{B}\cdot\vec{dl} = B\,2\pi r}$$

→ $r>R$ = à l'ext de D

$I_{int} = I = j_0 \pi R^2$

$B \times 2\pi r = \mu_0 I \ (= \mu_0 j_0 \pi R^2)$

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{e_\theta}}$$

→ $r<R$ = à l'int de la D

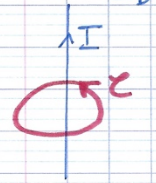
$I_{int} = j_0 \pi r^2 = I\frac{r^2}{R^2}$

$B \times 2\pi \cancel{r} = \mu_0 \frac{I r^{\cancel{2}}}{R^2}$

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2}\vec{e_\theta}}$$

m̂ comportement que $\vec{E}$!!
- champ continu
- décroit en $1/r$ à l'ext

→ Passage au fil ∞ fin



$R \to 0$ avec I demeure fini
($\vec{j} \to +\infty \to$ distribution de Dirac)

$B \times 2\pi r = \mu_0 I$

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{e_\theta}}$$ → divergence qd $r \to 0$

2) Cas de la bobine torique

Toutes les spires sont en série parcourues par le même courant I statio.

Sur la surface intérieure de longueur $2\pi R$, avec N spires enroulées en tout :

⇒ $\boxed{n = \frac{N}{l} = \frac{N}{2\pi R}}$

↳ nbr d'enroulement par unité de longueur

→ symétries et invariances

Tout plan contenant Oz et M est plan de sym de D
↳ $\vec{B} \perp$ à ce plan
$\vec{B} = B(r,\theta,z)\,\vec{e_\theta}$
invariance par rotation selon θ
(pas selon z ! car $R \neq \infty$!)

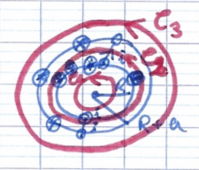
$\boxed{\vec{B} = B(r,z)\,\vec{e_\theta}}$ → lignes de champ cercles

On choisit $\mathcal{C}$ cercle de centre O.

Pour $|z| > a/2$ $\quad I_{int} = 0$!

$\vec{B} = \vec{0}$!

On se place $-a/2 < z < a/2$



- pour $r < R \Rightarrow \mathcal{C}_1$

  $I_{int} = 0 \qquad \vec{B} = \vec{0}$!

- pour $R < r < R+a \Rightarrow \mathcal{C}_2$

  $I_{int} = NI$

- pour $r > R+a \Rightarrow \mathcal{C}_3$

  $I_{int} = NI - NI = 0$!

  $\vec{B} = \vec{0}$!

Le champ magnét. ext. à la bobine est nul ! $(\forall M)$!

À l'intérieur de la bobine : $\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot \vec{dl} = B \times 2\pi r$

Pour $\mathcal{C}_2 \Rightarrow I_{int} = NI$

$$B \times 2\pi r = \mu_0 NI$$

$$\boxed{B(r) = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r} \vec{e_\theta}}$$ À l'int !

$$\boxed{\vec{B_{ext}} = \vec{0}}$$

- le champ $\vec{B}$ est discontinu car présence d'une distribution surfacique de courants
- ce résultat est valable $\forall$ la géom. de la section du tore.

3) Le solénoïde

→ de la bobine torique au solénoïde

Bobine torique $R \to +\infty \Rightarrow$ solénoïde ∞ d'axe Oz,

donc $\vec{B_{ext}} = \vec{0}$

et $\vec{B_{int}} = \lim_{R \to +\infty} \left(\frac{\mu_0 NI}{2\pi r} \right) \vec{e_z}$ pour la bobine torique.

$n = \frac{N}{2\pi R}$ ← nbr de spire/m.

$$\vec{B_{int}} = \lim_{R \to +\infty} \left(\frac{\mu_0 \, 2\pi R n I}{2\pi r} \right) \vec{e_z}$$

↳ $R < r < R+a$ pour la bobine torique.

$1 < \frac{r}{R} < \underbrace{1 + \frac{a}{R}}_{1 \text{ qd } R \to +\infty}$

donc $\frac{r}{R} \to 1$

$$\vec{B_{int}} = \mu_0 n I \vec{e_z}$$

→ Solénoïde à base circulaire ∞

Programme de PSI → on part de $\vec{B_{ext}} = \vec{0}$

nbr de spires par unité de longueur ← $n = \frac{N}{l}$ → nbr de spire total ; l → lg solénoïde

Khalil
MOUSSA
BSI

→ **Symétrie plane**

Tout plan ⊥ Oz passant M est plan de sym de D et $\vec{B}$ ⊥ à ces plans donc $\boxed{\vec{B}=B(M)\vec{e_z}}$

– **Invariance**

Invariances par rotat° selon θ et par translat° selon z

$\vec{B}=B(r)\vec{e_z}$

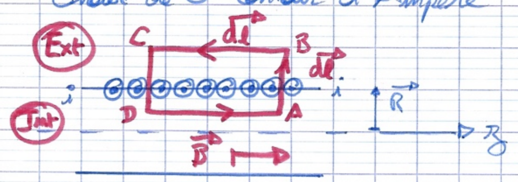
↳ lignes de champ selon z

↳ règle main droite

↳ implique div $\vec{B}=0$

– **Contour**

Choix de C contour d'Ampère



$$\oint_C \vec{B}\cdot\vec{dl} = \underbrace{\int_{AB}\vec{B}\cdot\vec{dl} + \int_{CD}\vec{B}\cdot\vec{dl}}_{0 \text{ car } \vec{B}\perp\vec{dl}} + \underbrace{\int_{BC}\vec{B}\cdot\vec{dl}}_{0} + \int_{DA}\vec{B}\cdot\vec{dl}$$

De D à A $\vec{dl}=dz\,\vec{e_z}$

$$\oint_C \vec{B}\cdot\vec{dl} = \int_{DA} B(r)\,dz = B(r)\times l$$

$I_{int} = +NI = nlI$

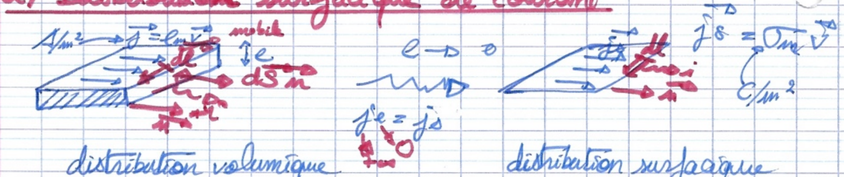
↳ $B(r)\times l = \mu_0\, n\, l\, I$ $\quad B(r)=\mu_0 n I$

$$\boxed{\begin{aligned} B_{ext} &= \vec{0} \\ B_{int} &= \mu_0 n I \vec{e_z}\end{aligned}}$$

- champ est à l'int ! indépdt de r !
- chp discontinu car distribution surfacique de courants !

4) Nappe ∞ de courants surfaciques

a) Distribution surfacique de courant



distribution volumique

$di = \vec{j}\cdot\vec{dS}$

$= \rho_m\vec{v}\cdot dl\, e\,\vec{n}$

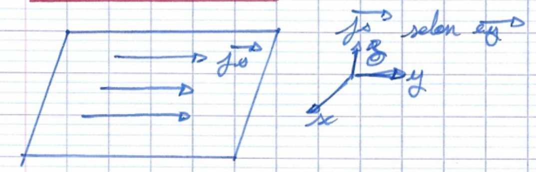
distribution surfacique

$di = \vec{j_s}\cdot dl\,\vec{n}$

$= \sigma_m\,\vec{v}\,dl\,\vec{n}$

$\sigma_m = \lim\limits_{e\to 0}(\rho_m e)$ $\quad$ (ρ_m tend ∞)

b) Calcul de $\vec{B}$



→ plan de sym de D

Tout plan x = cst est plan de sym et contiennent M donc $\vec{B}$ ⊥ à ces plans.

$\vec{B}=B(M)\vec{e_x}$

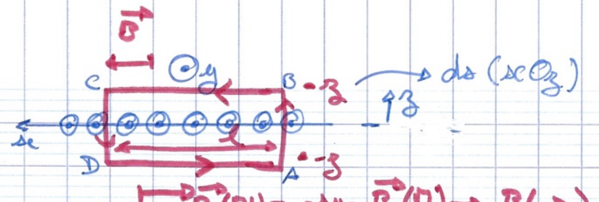
⚠ Tout plan y = cst est un plan d'anti-symétrie.

→ invariances par translation selon x et y

$$\boxed{\vec{B}=B(z)\vec{e_x}}$$

↳ lignes de chp droites // $\vec{e_x}$

↳ respecte main droite et div $\vec{B}=0$



$\overrightarrow{B}(M') = \text{sym}\ \overrightarrow{B}(M) \rightarrow B(-z) = -B(z)$

$$\oint_{\mathcal{C}} \overrightarrow{B}\cdot\overrightarrow{dl} = \underbrace{\int_{AB,CD}}_{0} \overrightarrow{B}\cdot\overrightarrow{dl} + \int_B^C \overrightarrow{B}(z)\cdot dx\,\overrightarrow{e_x} + \int_D^A \overrightarrow{B}(-z)\cdot(-dx)\overrightarrow{e_x}$$

$$= B(z)l - B(-z)l = 2B(z)l$$

$I_{int} = j_s\, l$ (car $di = j_s\, dl\cdot\overrightarrow{n}$)

$$\oint_{\mathcal{C}} \overrightarrow{B}\cdot\overrightarrow{dl} = 2B(z)l = \mu_0 j_s l$$

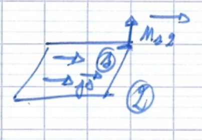
$$B(z) = \frac{\mu_0 j_s}{2} \qquad \left(E = \pm\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\right)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \bullet\ z>0 \rightarrow \overrightarrow{B} = \dfrac{\mu_0 j_s}{2}\overrightarrow{e_x} \\ \bullet\ z<0 \rightarrow \overrightarrow{B} = -\dfrac{\mu_0 j_s}{2}\overrightarrow{e_x} \end{array}}$$

c) Relation de passage du champ $\overrightarrow{B}$

$$\boxed{\overrightarrow{B_2} - \overrightarrow{B_1} = \mu_0 \overrightarrow{j_s}\wedge\overrightarrow{n_{12}}}$$

discontinuité de la composante tangentielle de $\overrightarrow{B}$



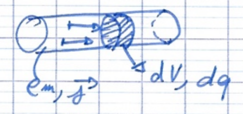
IV) Forces de Laplace

1) Distribution volumique de courants ou distribution filiforme et forces

→ Distribution volumique

$\overrightarrow{B_{ext}}$ est uniforme noté $\overrightarrow{B}$

⚠ chp ext ! à D !



$\overrightarrow{F_{Lorentz}} = q\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{B}$

force élémentaire qui s'applique sur le volume dV

$$\overrightarrow{dF_L} = dq_m\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{B}$$

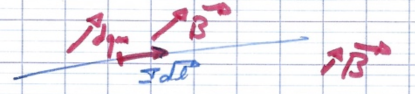
$$\frac{\overrightarrow{dF_L}}{dV} = \frac{dq_m}{dV}(\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{B})$$

force volumique

$$= \rho_m\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{B} = \overrightarrow{j}\wedge\overrightarrow{B}$$

$$\boxed{\overrightarrow{dF_L} = (\overrightarrow{j}\wedge\overrightarrow{B})\,dV}\ ♡$$

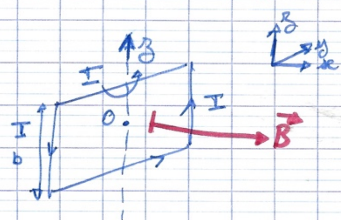
→ Distribution filiforme



$$\overrightarrow{dF_L} = dq_m\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{B}$$
$$= I\,dt\,\frac{\overrightarrow{dl}}{dt}\wedge\overrightarrow{B}$$

$$\boxed{\overrightarrow{dF_L} = I\,\overrightarrow{dl}\wedge\overrightarrow{B}}\ ♡$$

2) Action des $\overrightarrow{F_L}$ sur une spire rectangulaire parcourue par I et plongée dans $\overrightarrow{B}$ uniforme.



• Force résultante

$\overrightarrow{dF_L} = i\,\overrightarrow{dl}\wedge\overrightarrow{B}$

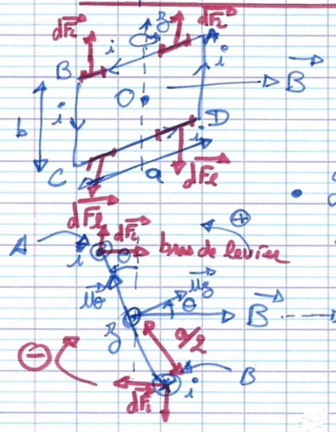
$\overrightarrow{F_L} = \oint_{\mathcal{C}_{spire}} i\,\overrightarrow{dl}\wedge\overrightarrow{B}$ → $\overrightarrow{B}$ uniforme

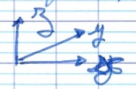
$= i\left(\oint\overrightarrow{dl}\right)\wedge\overrightarrow{B}$, $\oint\overrightarrow{dl} = \overrightarrow{0}$

$$\boxed{\overrightarrow{F_L} = \overrightarrow{0}}$$

Khalil
MOUSSA
PSI

→ Couple et moment magnétique associé à la spire





$\overrightarrow{dF_L} = i\overrightarrow{dl} \wedge \vec{B}$

- Sur les deux parties AB et CD $\overrightarrow{dF_L}$ n'a pas d'influence sur la rotation $\overrightarrow{dF_L} \parallel (Oz)$

Somme des $\overrightarrow{dF_L}$ nulle mais $\vec{\Gamma} \neq \vec{0}$

- Couple résultant des 2 parties DA et BC
$d\vec{\Gamma}\cdot\vec{e_z} = d\Gamma_z = (\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{dF_L})\cdot\vec{e_z}$

Utilisons le bras de levier :

$dF_L = idl\,B$ $\qquad d\Gamma_z = \ominus\, \underbrace{idl\,B}_{\text{norme force}} \times \underbrace{\text{bras de levier}}_{\frac{a}{2}\sin\theta}$

$d\Gamma_z = \ominus\, idlB \times \frac{a}{2}\sin\theta$
intégrat° sur DA ↓
$\Gamma_z = -\frac{a}{2}\, b \sin\theta\, i B$

Pour les 2 portions DA et BC
$\Gamma_z = 2 \times -\frac{a}{2}\, b\sin\theta\, i B$

$$\boxed{\Gamma_z = -a\,b\,i\sin\theta\, B}$$

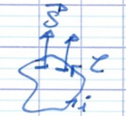
$\vec{\Gamma} = i\vec{S} \wedge \vec{B}$

$$\boxed{\vec{\Gamma} = \vec{m} \wedge \vec{B}} \quad \boxed{\text{avec } \vec{m} = i\vec{S}}$$ moment magnétique de la spire.

couple subi par un moment $\vec{m}$ dans $\vec{B}_{ext}$

V) Dipôle magnétique ou moment (dipolaire) magnétique

→ Définition :



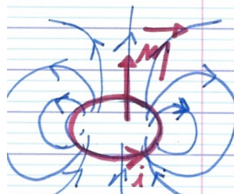
$$\boxed{\vec{m} = i\vec{S}}$$ → A·m²

Remarque : ∄ monopôle magnétique équivalent de la charge ponctuelle pour $\vec{E}$.

On s'intéresse à une spire circulaire.

→ Champ magnétique créé

- symétries
  - pour un point de l'axe, tout plan contenant M et Oz est plan d'anti-sym. $\vec{B} \in$ à l'intersection de ces plans → $\vec{B}$ selon $\vec{e_z}$.
  - pour tout point M dans le plan (xOy) plan de sym. de D (spire). $\vec{B} \perp$ à ce plan → selon z !
  - pour tout point M ailleurs le plan $\mathcal{P}$ = cst est plan d'anti-sym. $\vec{B} \in$ à ce plan → $B_\varphi = 0$



$\vec{B} = \begin{pmatrix} \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2m\cos\theta}{r^3} \\ \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{m\sin\theta}{r^3} \end{pmatrix}$ champ est en $1/r^3$

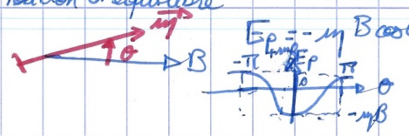
2) Actions subies par un moment magnétique dans Bext.

a) Énergie potentielle

$$\boxed{E_p = -\vec{m}\cdot\vec{B}}$$

Position d'équilibre

$E_p = -mB\cos\theta$



Position d'équilibre stable $\longrightarrow$ mini d'E_p

$\theta = 0$ $\quad \vec{m} \longrightarrow \vec{B}$

Position instables

$\theta = \pm\pi$ $\quad \vec{m} \longleftarrow \quad \longrightarrow \vec{B}$

$\boxed{\vec{m} \text{ s'oriente selon la direction de } \vec{B} \text{ !}}$

b) Force résultante et couple

$\vec{F} = \vec{0}$ et $\boxed{\vec{\Gamma} = \vec{m} \wedge \vec{B}}$

Remarque : Si champ non-uniforme $\vec{B}_{ext}$ $\longrightarrow$ $\vec{F} \neq \vec{0}$

$\boxed{\vec{F} = \vec{grad}(\vec{m} \cdot \vec{B})}$

$\vec{F} = -\vec{grad}\, E_p$

Avec $\vec{m}$ cst $\quad \vec{F} = \vec{m} \cdot \vec{grad}\, \vec{B}$

$\boxed{\text{La force attire le moment vers les zones de champ fort.}}$

VI) Du moment magnétique atomique à l'aimantation

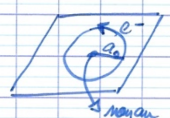
1) Moment magnétique atomique : le magnéton de Bohr

a) Modèle de l'atome d'H et modélisation de la boucle de courant équivalente.

- Atome d'H

a_0 rayon de Bohr

$a_0 \approx 10^{-10}\, m$



$m \Rightarrow$ masse de l'e^-

- Force de "cohésion" (électrostat) $\quad \vec{F} = \dfrac{-e^2}{4\pi\varepsilon_0 a_0^2}\vec{e_r}$

- Période du mvmt dans ce modèle planétaire

Accélération $\rightarrow$ mvmt circulaire

$-\dfrac{v^2}{R} \rightarrow$ ici $R = a_0$

$v = a_0\omega$

$\boxed{+m\vec{a} = \vec{F}}$ PFD

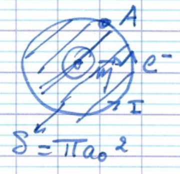
$-m a_0 \omega^2 = \dfrac{-e^2}{4\pi\varepsilon_0 a_0^2}$

$\rightarrow \omega = \sqrt{\dfrac{e^2}{4\pi m \varepsilon_0 a_0^3}}$

$T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{4\pi m \varepsilon_0 a_0^3}{e^2}}$

AN : $T = 4 \cdot 10^{-16}\, s$

- Boucle de courant équivalente



Pdt $dt \ll T$

dq la charge qui passe en A dt :

$dq = -e\dfrac{dt}{T}$

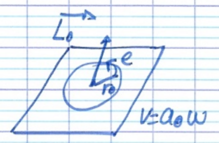
$\rightarrow I = \dfrac{dq}{dt} = \dfrac{-e}{T}$

$\vec{m} = IS\vec{e_z} = \dfrac{-e}{T}\pi a_0^2 \vec{e_z}$

$\boxed{\vec{m} = -\dfrac{e a_0^2 \omega}{2}\vec{e_z}}$

Khalil
MOUSSA
PSI

b) Lien entre moment cinétique et moment magnétique



$\vec{L_0} = \vec{OM} \wedge m\vec{v}$

$= a_0 m v \vec{e_z}$

$\vec{L_0} = m a_0^2 \omega \vec{e_z}$

$$\boxed{\vec{m} = \frac{-e}{2m}\vec{L_0} = \gamma \vec{L_0}}$$

moment cinétique et moment magnétique ∝

↳ rapport gyromagnétique

c) Modèle de Bohr et magnéton

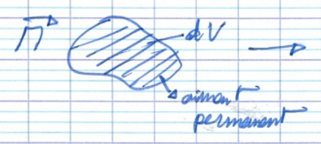
- orbitales stationnaires (sans rayonnement et circulaire)
- quantification de $\vec{L_0}$ / $\vec{L_0} = n\hbar\vec{e_z}$ ($n \in \mathbb{N}^*$)

donc $\boxed{\vec{m} = \frac{-e\hbar}{2m}\vec{e_z}}$ $\vec{m}$ est qtifiée

ODG ⟹ $m = 10^{-23}$ A·m²

2) Aimants permanents

Pour un matériau magnétique les moments microscopiques s'ajoutent. Pour les aimants permanents, ces moments sont permanents /



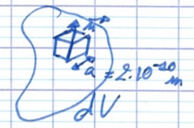
→ $\vec{M} = \frac{d\vec{m}}{dV}$ somme des moment

en A·m⁻¹

L'alignement des moments microscopique selon la m- direction pour donner un moment global ≠ 0 est d'origine quantique pour ces corps ferromagnétiques.

Prenons un matériau "saturé" avec tous ses moments alignés.

n densité en moments microscopiques



1 $\vec{m}$ par atome ferro. de taille a^3

$n = \frac{1}{a^3} = 10^{29}$ m⁻³

$M_{sat} = \frac{dm}{dV} = n \times \mu_B$

$M_{SAT} = 10^{29} \times 10^{-23}$

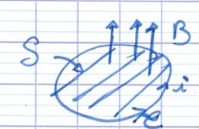
$M_{SAT} = 10^{6}$ A·m⁻¹

↳ fer doux

VII) Inductance d'un circuit et énergie magnétique

1) Inductance propre et énergie magnétique

→ Définition



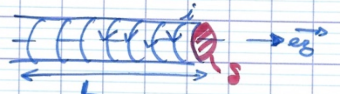
$\Phi_{propre} = \iint_S \vec{B}\cdot d\vec{S}$

$\vec{B}$ est ∝ à i car théorème d'Ampère ($\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{int}$) donc Φ est ∝ à i !

$\boxed{\Phi_{propre} = L\, i}$ L est l'inductance (propre) en Henry H.

⚠ L > 0 !

→ Exemple du solénoïde ∞



$\vec{B}_{ext} = \vec{0}$

$\vec{B}_{int} = \mu_0 n i \vec{e_z}$

$n = N/\ell$ $\qquad \phi_{propre} = N \iint_S \vec{B}\cdot\vec{dS} = \mu_0 n i N S$

$$\phi_{propre} = \frac{\mu_0 N^2 S}{\ell}\, i$$

$$\boxed{L = \frac{\mu_0 N^2 S}{\ell}}$$

$N = 1000$ spires

$R = 5\,cm$

$S = \pi R^2$

$\ell = 10\,cm$

$L \approx 100\,mH$

→ Énergie magnétique

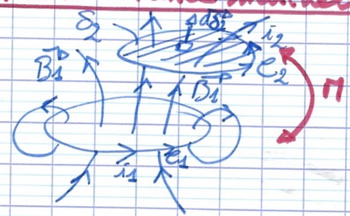
$$E_{bobine} = \frac{1}{2} L i^2 = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 N^2 S}{\ell} i^2$$

$$\left(B = \mu_0 n i = \mu_0 \frac{N}{\ell} i\right) = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0} \underbrace{S\ell}_{V}$$

$$\boxed{U_{énergie} = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0}} \quad ♡ \quad \left(\cdot \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2\right)$$

densité d'énergie !

2) Inductance mutuelle



$\phi_{1\to2} = \iint_{S_2} \vec{B_1}\cdot\vec{dS_2}$ ∝ à i_1

$$\boxed{\phi_{1\to2} = M i_1}$$

flux total qui traverse ①

Donc $\phi_{\to1} = \phi_{propre,1} + \phi_{2\to1}$

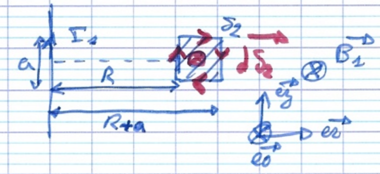
$$\boxed{\phi_{\to1} = L i_1 + M i_2}$$

et $\phi_{\to2} = \phi_{propre,2} + \phi_{1\to2} \Rightarrow \boxed{\phi_{\to2} = L i_2 + M i_1}$

⚠ $M \lessgtr 0$

→ Exemple de calcul

$\phi_{1\to2} = M i_1$



$\phi_{1\to2} = \iint_S \vec{B_1}\cdot\vec{dS_2}$

$\vec{B_1} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}\vec{e_\theta}$

$\phi_{1\to2} = \iint_{S_2} \vec{B_1}\cdot d\vec{S_2} \qquad d\vec{S_2} = dr\,dz\,\vec{e_\theta}$

$\phi_{1\to2} = \int_R^{R+a}\int_0^a B_1(r)\,dr\,dz$ ⚠

$\phi_{1\to2} = \frac{\mu_0 a}{2\pi} I_1 \int_R^{R+a} \frac{dr}{r}$

$\phi_{1\to2} = \frac{\mu_0 a}{2\pi} \ln\left(\frac{R+a}{R}\right) I_1$

× N pour toutes les spires

$$\boxed{M = \frac{\mu_0 N a}{2\pi}\ln\left(\frac{R+a}{R}\right)}$$

Khalil
MOUSSA
PSI

3) Énergie magnétique d'un ensemble de circuits

Énergie propre $U_m = \frac{1}{2} L i^2$ avec $\phi = L i$

$$\boxed{U_m = \frac{1}{2} i \phi}$$

On admet qu'on peut généraliser cette relation pour établir l'énergie d'un ensemble de k circuits (magnétiques).

$$\boxed{U_m = \sum_k 1/2 \, i_k \phi_k}$$ avec ϕ_k le flux total qui traverse le circuit k.

$\phi_{\to 1} = L_1 i_1 + M i_2$
$\phi_{\to 2} = L_2 i_2 + M i_1$

$$U_m = 1/2 \, i_1 \phi_{\to 1} + 1/2 \, i_2 \phi_{\to 2}$$
$$= 1/2 \, i_1 (L_1 i_1 + M i_2) + 1/2 \, i_2 (L_2 i_2 + M i_1)$$

$$\boxed{U_m = \underbrace{\frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2}_{\text{énergies propres}} + \underbrace{M i_1 i_2}_{\text{énergie de couplage}}}$$ ♡

D'autre part l'énergie magnétique de l'ensemble

$$U_m = \iiint_V \underbrace{u_m}_{\text{densité d'énergie magnétique}} dV = \iiint_V \frac{B^2}{2\mu_0} dV$$ avec $\vec{B} = \vec{B_1} + \vec{B_2}$

donc $\underline{U_m \geq 0}$!

$U_m \geq 0$

$$\hookrightarrow U_m = i_2^2 \left(\frac{1}{2} L_1 \left(\frac{i_1}{i_2}\right)^2 + M \left(\frac{i_1}{i_2}\right) + \frac{1}{2} L_2 \right)$$

Cette inégalité doit être vraie $(\forall i_1, i_2)$
i.e $(\forall x)$ avec $x = i_1/i_2$

$$\frac{1}{2} L_1 x^2 + M x + \frac{1}{2} L_2 \geq 0$$

ssi $\Delta \leq 0 \iff M^2 - L_1 L_2 \leq 0 \iff \boxed{M \leq \sqrt{L_1 L_2}}$

→ $M = 0$ pas de couplage
→ $M = \sqrt{L_1 L_2}$ couplage parfait