I) ARQS magnétique et phénomènes d'induction

1) Courant de déplacement : lien avec la conservation de la charge

$\mathrm{div}\,\vec{E} = \rho/\varepsilon_0$

$\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

$\mathrm{div}\,\vec{B} = 0$

$\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0\mu_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

$$\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \mu_0 (\vec{j} + \vec{j}_{\text{déplacement}})$$

$$\boxed{\vec{j}_{dép} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}$$

Lien avec $\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\,\vec{j} = 0$

À partir des équations de Maxwell :

MA $\rightarrow$ $\mathrm{div}\,\vec{j} = \mathrm{div}\left(\dfrac{\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{B}}{\mu_0} - \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)$ avec $\mathrm{div}(\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{B}) = 0$

$\mathrm{div}\,\vec{j} = -\varepsilon_0 \dfrac{\partial}{\partial t}(\mathrm{div}\,\vec{E})$ MG

$= -\varepsilon_0 \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}\right)$

$$\mathrm{div}\,\vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

↳ éq de conservation de la charge est contenue dans les éq de Maxwell.

2) ARQS magnétique

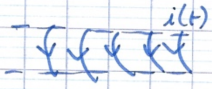
1ère année → ARQS → on néglige la propagat° de l'onde EMag → $\boxed{L/\lambda \ll 1}$

L taille du circuit

λ longueur d'onde

a) Cadre de l'ARQS magnétique

Considérons un solénoïde (fixe) parcouru par $i(t)$



$\vec{B} = \mu_0 n i(t) \vec{e_z}$
↳ créé par le solénoïde à l'int.

Cette expression valable de l'ARQS magnétique est en fait une approximation.

On appelle $\vec{B}$ le chp magnétique initial produit par le solénoïde
$\vec{rot}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ → chp $\vec{E}$ induit par variat° temporelle de $\vec{B}$
puis courant de dépla% $\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ crée $\delta\vec{B}$.

Évaluons δB en ODG : ODG $\vec{rot}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

$\dfrac{E}{L} = \dfrac{B}{T} \Rightarrow E = \dfrac{L}{T} B$

dans le vide à l'int. solénoïde

$\vec{rot}(\delta\vec{B}) = \varepsilon_0 \mu_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$
↳ ODG

$\dfrac{\delta B}{L} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{E}{T}$ $\quad \delta B = \dfrac{L}{c^2 T} E = \dfrac{L^2}{c^2T^2} B$

$$\boxed{\delta B = \left(\frac{L}{\lambda}\right)^2 B}$$

si $L/\lambda \ll 1 \rightarrow \delta B \ll B$
le champ B induit est bien négligeable, comme le courant de déplacement.

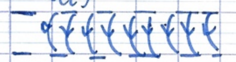
Approche énergétique :

$U_E = \dfrac{\varepsilon_0 E^2}{2} \longrightarrow$ ODG $\Rightarrow U_e = \varepsilon_0 \left(\dfrac{L}{T} B\right)^2$

$U_{mag} = \dfrac{B^2}{2\mu_0}$ $\quad (B_{total} = B + \delta B \simeq B)$

$\dfrac{U_e}{U_{mag}} = \varepsilon_0\mu_0 \left(\dfrac{L}{T}\right)^2 = \left(\dfrac{L}{cT}\right)^2 = \left(\dfrac{L}{\lambda}\right)^2 \ll 1$
↳ Tte l'énergie est stockée sous forme magnétique.

b) Exemple du solénoïde dans l'ARQS magnétique (dans le vide)



$\vec{B_{ext}} = \vec{0}$
$\vec{B_{int}} = \mu_0 n i(t) \vec{e_z}$

Évaluons le chp $\vec{E}$ induit par MF ?

$\mathrm{div}\,\vec{E} = 0$
$\boxed{\vec{rot}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$

$\vec{rot}\,\vec{E} = -\mu_0 n \dfrac{di}{dt} \vec{e_z}$
$\vec{E} = E(r)\vec{e_\theta}$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\mu_0 n r}{2}\frac{di}{dt}\vec{e_\theta}}$$

Situation similaire en magnétostatique

$\mathrm{div}\,\vec{B} = 0$ $\quad \boxed{\vec{rot}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{j}}$

fil épais $\quad \vec{B} = B(r)\vec{e_\theta}$

$\vec{B} = \dfrac{\mu_0 j r}{2}\vec{e_\theta}$ à l'int.

$j = n\dfrac{di}{dt}$

Calculons les énergies stockées à l'int. du solénoïde

$U_{mag} = \iiint_V \dfrac{B^2}{2\mu_0} dV$ avec $B = \mu_0 n i(t)$

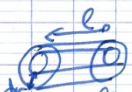
B uniforme dans V ↳ $= \dfrac{B^2}{2\mu_0} V$

$U_{mag} = \dfrac{B^2}{2\mu_0} \pi R^2 l = \dfrac{\mu_0}{2} n^2 \pi R^2 l i^2$

$$\boxed{U_{mag} = \frac{\mu_0}{2} n^2 \pi R^2 l i^2}$$

$U_e = \iiint_V \dfrac{\varepsilon_0 E^2}{2} dV$

E qui dpd de r



dV volume d'une couronne cylindrique
$dV = 2\pi r dr l$

$U_e = \displaystyle\int_{r=0}^{r=R} \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} \times 2\pi r dr l$

$U_e = \pi\varepsilon_0 l \displaystyle\int_0^R \frac{\mu_0^2 n^2}{4}\left(\frac{di}{dt}\right)^2 r^3 dr$

$U_e = \dfrac{\pi}{4}\mu_0^2 \varepsilon_0 l n^2 \left(\dfrac{di}{dt}\right)^2 \dfrac{R^4}{4}$

Khalil MOUSSA PSI

$$\boxed{U_e = \frac{\pi}{16}\mu_0^2 \varepsilon_0 n^2 \left(\frac{di}{dt}\right)^2 l R^4}$$

$$\frac{U_e}{U_{mag}} = \frac{2\pi \mu_0^2 \varepsilon_0 n^2 \left(\frac{di}{dt}\right)^2 l R^4}{16\mu_0 \, n^2 \pi R^2 l \, i^2}$$

$$= \frac{\mu_0 \varepsilon_0}{8} \frac{\left(\frac{di}{dt}\right)^2}{i^2} R^2 \quad \text{avec } i = I_0 \cos \omega t$$

$$= \frac{1}{8}\frac{1}{c^2}\omega^2 R^2$$

$$= \frac{1}{8}\left(\frac{\omega R}{c}\right)^2 \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$\frac{U_e}{U_{mag}} = \left(\frac{L}{\lambda}\right)^2 \ll 1 \quad \text{En ODG: } \boxed{\frac{U_e}{U_{mag}} = \left(\frac{R}{cT}\right)^2 = \left(\frac{R}{\lambda}\right)^2 \ll 1 \text{ si } R \ll \lambda}$$

Rq: On peut calculer la puissance reçue : $P = -\iint_S \vec{\pi}\cdot d\vec{S} = \iint_S \frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0}\cdot d\vec{S}$ (la solénoïde) $P = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Li^2\right)$

Conclusion générale dans l'ARQS magnétique

$\vec{j}_{depl} \simeq \vec{0}$

$$\left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \simeq 0\right)$$

Tout est stockée sous forme mag.

c) ARQS magnétique dans un conducteur

ARQS mg

$$\boxed{\vec{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \vec{rot}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{j} = \mu_0 \gamma \vec{E}}$$

car $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ dans un conducteur !

Il s'agit des courants induits ! → les courants de Foucault !

- $\boxed{\text{div}\,\vec{E}} = \text{div}\left(\frac{\vec{rot}\,\vec{B}}{\mu_0 \gamma}\right) = \boxed{0}$

 ↳ $\boxed{\rho = 0 \rightarrow \text{dans l'ARQS un conducteur demeure neutre.}}$

- $\text{div}\,\vec{j} = \text{div}\left(\frac{\vec{rot}\,\vec{B}}{\mu_0}\right)$

 $\text{div}\,\vec{j} = 0 \rightarrow \vec{j}$ flux conservatif → la loi des noeuds s'applique

 → i le m̂ le long d'un fil

- $d\vec{f}_{lapl} = i\,d\vec{l}\wedge\vec{B}$ valide

Domaine de validité de l'ARQS magnétique dans les conducteurs

$$\vec{rot}\,\vec{B} = \mu_0(\vec{j} + \vec{j}_{depl})$$

$$\boxed{\frac{j_{depl}}{j}} = \left|\frac{\varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}}{\gamma E}\right|$$

$$\text{En ODG} \Rightarrow = \frac{\varepsilon_0 E}{\gamma E T} = \boxed{\frac{\varepsilon_0 f}{\gamma}}$$

$$j_{depl} \ll j \Leftrightarrow f \ll \frac{\gamma}{\varepsilon_0} = 10^{18}\,Hz\ !!$$

Rappel : Loi d'Ohm valide $f \ll 10^{14}\,Hz$.

- Comparons les champs magnétiques $\delta\vec{B}$ et $\vec{B}$

 $\delta\vec{B}$: champ propre créé par les courants induits ; $\vec{B}$: champs initial variable

$$\vec{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \vec{E} \text{ chp induit}$$

↳ en ODG ⇒ $E = L\frac{B}{T}$

$$\vec{rot}(\delta\vec{B}) = \mu_0(\vec{j} + \cancel{\vec{j}_{depl}})$$

$\vec{j}$ induit par $\vec{E}$

$$\frac{\delta B}{L} = \mu_0 j = \mu_0 \gamma E$$

$$\frac{\delta B}{L} = \mu_0 \gamma L \frac{B}{T} \qquad T = 2\pi/\omega$$

$$\delta B = \underbrace{\mu_0 \gamma \omega}_{1/\delta^2} L^2 B$$

δ épaisseur de peau

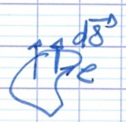
$$\boxed{\delta B = \left(\frac{L}{\delta}\right)^2 B} \quad \text{avec} \quad \boxed{\delta = \sqrt{\frac{1}{\mu_0 \gamma \omega}}}$$

Quand $L \ll \delta$ on pourra négliger le chp propre créé par les courants induits.

3) Loi de Faraday et force électro-motrice

→ Loi de Faraday

$$\vec{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$



$$\iint_S \vec{rot}\,\vec{E}\cdot d\vec{S} = \oint_{\mathcal{C}} \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$$

$$= -\frac{\partial}{\partial t}\left(\iint_S \vec{B}\cdot d\vec{S}\right)$$

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

→ la circulation de $\vec{E}$ n'est plus nulle ! (électrostat)

$$\boxed{e = -\frac{d\Phi}{dt}}$$

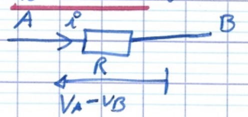
→ Induction de Neumann circuit fixe dans $\vec{B}(t)$

→ Induction de Lorentz circuit mobile dans $\vec{B}$ cst

⚠ Couplage mécanique en ⊕ de l'apparition d'une fem par la force de Laplace

Circuit électrique ouvert :

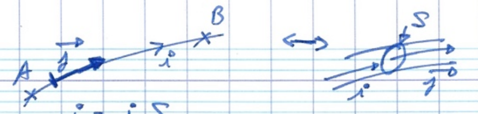
- sans induct° :



$$V_A - V_B = Ri$$

$$V_A - V_B = \int_B^A dV = -\int_B^A \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

$$\text{avec } \vec{E} = \vec{j}/\gamma \rightarrow V_A - V_B = -\int_B^A \frac{\vec{j}\cdot d\vec{l}}{\gamma}$$



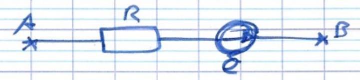
$i = jS$

$dR = \frac{dl}{\gamma S}$

$$V_A - V_B = \int_A^B \frac{j\,dl}{\gamma} = \int_A^B \frac{i\,dl}{\gamma S} = i\int_A^B dR$$

$$V_A - V_B = Ri$$

- avec induct° :

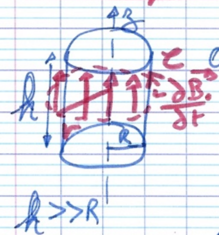


$$e = -\frac{d\Phi}{dt}$$

II) Induction de Neumann et application

1) Courants de Foucault et chauffage par induction

a) Champ $\vec{E}$ induit et courants de Foucault



$h \gg R$

On soumet le matériau conducteur à $\vec{B_0} = B_0 \cos \omega t\, \vec{e_z}$ uniforme sur le conducteur

$\text{div}\,\vec{E} = 0$

$\vec{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B_0}}{\partial t}$

Problème analogue en magnétostatique → fil équiv.

$\text{div}\,\vec{B_0} = 0$

$\vec{rot}\,\vec{B_0} = \mu_0 \vec{j}$

→ $\vec{E} = E(r)\vec{e_\theta}$

$$\iint_S \vec{rot}\,\vec{E}\cdot d\vec{S} = \oint_{\mathcal{C}} \vec{E}\cdot d\vec{l} = \iint_S -\frac{\partial \vec{B_0}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$$

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{E}\cdot d\vec{l} = \oint_{\mathcal{C}} E(r)\,\vec{e_\theta}\cdot dl\,\vec{e_\theta} = \oint_{\mathcal{C}} E(r)\,dl$$

$$= E(r)\times l = E(r)\times 2\pi r$$

Avec l'orientation choisie $\mathcal{C}$ $d\vec{S} = dS\,\vec{e_z}$

$$\frac{\partial \vec{B_0}}{\partial t} = -B_0\,\omega_0 \sin(\omega t)\,\vec{e_z}$$

$$\iint_S -\frac{\partial \vec{B_0}}{\partial t}\cdot d\vec{S} = \iint B_0\,\omega_0 \sin(\omega t)\,dS = B_0\,\omega_0 \sin(\omega_0 t)\,\pi r^2$$

Khalil
MOUSSA
PSI

$E(r)\, 2\pi r = B_0 \omega_0 \sin(\omega_0 t)\, \pi r^2$

$$\boxed{E(r) = \frac{1}{2} r B_0 \omega_0 \sin(\omega_0 t)}$$

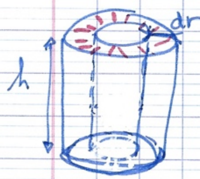
$\vec{j} = \gamma \vec{E}$ $\quad \boxed{\vec{j} = \frac{\gamma}{2} r B_0 \omega_0 \sin(\omega_0 t)\, \vec{e_\theta}}$

→ boucles de courant de Foucault d'axe Oz
→ + intense quand r ↗

b) Puissance dissipée par effet Joule

$P_v = \vec{j} \cdot \vec{E} = \gamma E^2$ $\quad P = \iiint_V P_v\, dV = \iiint_V \gamma E^2\, dV$

dV couronne cylindrique d'épaisseur dr



$dV = dS \times h = 2\pi r dr\, h$ $\quad$ On intègre r de 0 à R

$$\iiint_V \gamma E^2\, 2\pi r dr\, h = \iiint_V \gamma \times E(r)^2\, 2\pi r dr\, h$$

$$= \iiint_V \gamma \frac{1}{4} r^2 (B_0\omega_0)^2 \sin^2(\omega_0 t) \times 2\pi r dr\, h$$

$$= \frac{\gamma}{2} (B_0\omega_0)^2 \sin^2(\omega_0 t) \times \pi h \times \int_0^R r^3 dr$$

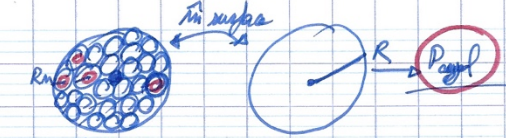
$$= \frac{\gamma}{2} (B_0\omega_0)^2 \sin^2(\omega_0 t)\, \pi h \times \frac{R^4}{4}$$

$$P = \frac{\gamma}{8} (B_0\omega_0)^2 \sin^2(\omega_0 t)\, \pi R^4 h$$

$$\langle P \rangle = \frac{\pi \gamma}{16} (B_0\omega_0)^2 R^4 h$$

car $\langle \sin^2(\omega_0 t) \rangle = 1/2$

→ chauffage amélioré si γ élevée et B élevée
→ puissance ↗ + vite que le volume → ↘ P, on aura intérêt à diviser le conducteur en morceaux on diminuera la taille des boucles de courant !



feuilletage avec isolants entre chaque conducteur.
n surface $\Rightarrow \pi R^2 = n \pi R_n^2$

$R_n = R/\sqrt{n}$

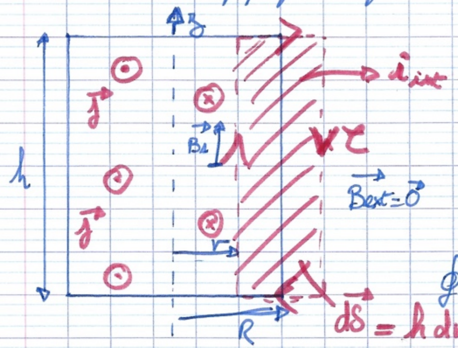
$\boxed{P} = n \times P_{1\,cylindre}$ $\quad P_{cyl} = K R^4$
$= n \times K \times R_n^4$ (K cst)

$$= K \times n \times \frac{R^4}{n^2} = K \times \frac{R^4}{n} = \boxed{\frac{P_{cyl}}{n}}$$

Utile pour un transformateur.

c) Calcul du champ propre critique du modèle

$\vec{rot}\, \vec{B_1} = \mu_0 \vec{j} = \mu_0 \gamma \vec{E}$
↳ champ propre créé par les courants de Foucault.



On remarque qu'une épaisseur dr de courants est analogue à un solénoïde
↳ $\vec{B_1} = B_1(r,t)\vec{e_z}$

$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B_1} \cdot \vec{dl} = \mu_0 i_{int}$

$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B_1} \cdot \vec{dl} = \int B_1(r,t)\, \vec{e_z} \cdot dl\, \vec{e_z} = \int B_1(r,t)\, dl = B_1(r,t)\, h$

circulation sur le contour intérieur $\quad$ avec $\vec{dl} = dl\, \vec{e_z}$

Intensité enlacée avec $\vec{j} = j(r,t)\, \vec{e_\theta}$

$$i_{int} = \iint_S \vec{j}(r,t) \cdot d\vec{S} = \iint_r^R j(r,t)\, \vec{e_\theta}\, h\, dr\, \vec{e_\theta}$$

$$i_{int} = h \int_r^R j(r,t)\, dr$$

$$i_{int} = h\int_r^R \frac{\gamma}{2} B_0 \omega_0 \sin(\omega_0 t)\, r\,dr$$

$$i_{int} = \frac{h\gamma}{2} B_0\omega_0 \sin(\omega_0 t)\left(\frac{R^2-r^2}{2}\right)$$

$$B_1(r,t)\,\cancel{h} = \frac{\mu_0 \cancel{h}\gamma}{4} B_0\omega_0 \sin(\omega_0 t)(R^2-r^2)$$

$$B_1(r,t) = \frac{\mu_0\gamma}{4} B_0\omega_0 \sin(\omega_0 t)(R^2-r^2)$$

$$\boxed{\vec{B_1} = \frac{\mu_0\gamma B_0\omega_0}{4}\sin(\omega_0 t)(R^2-r^2)\,\vec{e_z}}$$

B_1 est max pour $r=0$

↳ $B_1 = \frac{\mu_0\gamma B_0\omega_0}{4}\sin\omega_0 t \times R^2$

En ODG $\Rightarrow \frac{B_1}{B_0} = \mu_0\gamma\omega_0 R^2 = (R/\delta)^2$

avec $\delta = \sqrt{\frac{1}{\mu_0\gamma\omega_0}}$

Si $R \ll \delta \rightarrow B_1$ est négligeable !

$f = 50$ Hz $\xRightarrow{AN} \delta \simeq$ cm

$\delta_\propto f \nearrow \rightarrow \delta \searrow$

Conclusion : Cette modélisation de chauffage doit être améliorée pour les conducteurs de taille importante.

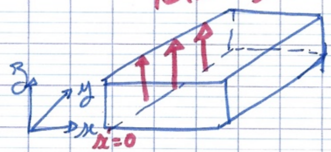
2) Épaisseur de peau – Cas d'un conducteur semi-∞

a) Structure des champs, Épaisseur de peau

Conducteur semi-∞, demi-espace $x \geq 0$

Ttes ses dimensions $\gg \delta$

$\vec{B}(x=0,t)$



On applique un champ $\vec{B}$ extérieur /

$\vec{B}(x=0,t) = B_0\cos(\omega t)\,\vec{e_z}$

(Produit par un solénoïde par exemple)

Équation de Maxwell = ARQS magnétique dans le conducteur

$$\boxed{\begin{array}{ll} \mathrm{div}\,\vec{E} = 0 & \mathrm{div}\,\vec{B} = 0 \\ \vec{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \vec{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\vec{j} = \mu_0\gamma\vec{E} \end{array}}$$

Formule : $\vec{\mathrm{rot}}(\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{A}) = \vec{\mathrm{grad}}(\mathrm{div}\,\vec{A}) - \Delta\vec{A}$

$$\vec{\mathrm{rot}}(\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{B}) = \vec{\mathrm{grad}}(\underbrace{\mathrm{div}\,\vec{B}}_{=0}) - \Delta\vec{B}$$

$$\Leftrightarrow -\Delta\vec{B} = \vec{\mathrm{rot}}(\mu_0\gamma\vec{E}) = \mu_0\gamma\,\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{E}$$

$$-\Delta\vec{B} = \mu_0\gamma\left(-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)$$

$$\boxed{\Delta\vec{B} = \mu_0\gamma\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}}$$ Équation de Kelvin

Équation de diffusion thermique :

$\Delta T = D_{th}\frac{\partial T}{\partial t}$ même structure

- On néglige les effets de bord = milieu semi-∞

↳ invariance par translation selon y et $z \Rightarrow \vec{B} = \vec{B}(x,t)$

Hyp : pas de courants de surface et champ $\vec{B}$ continu en $x = 0$

↳ $\vec{B} = B(x,t)\,\vec{e_z}$

Khalil
MOUSSA
PSI

→ dépendance spatio-temporelle

$\underline{\vec B} = B_0 e^{j(\omega t - kx)} \vec{e_z}$ avec $\vec B = Re(\underline{\vec B})$

Le chp $\vec B$ est selon $\vec{e_z}$. En proj sur $\vec{e_z}$:

$$\Delta \underline B = \frac{\partial^2 \underline B}{\partial x^2} = -k^2 \underline B$$

$$\frac{\partial \underline B}{\partial t} = j\omega \underline B$$

$$+k^2 = -\mu_0 \gamma \omega j \quad e^{-j\pi/2}$$

$$k^2 = \mu_0 \gamma \omega e^{-j\pi/2}$$

$$k = \pm\sqrt{\mu_0\gamma\omega}\, \underbrace{e^{-j\pi/4}}_{\frac{1-j}{\sqrt2}} = \pm\sqrt{\frac{\mu_0\gamma\omega}{2}}\,(1-j)$$

$k = \pm\left(\frac{1-j}{\delta}\right)$ avec $\boxed{\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\gamma\omega}}}$ épaisseur de peau

$$\boxed{\underline B = B_0 e^{j(\omega t - kx)}}$$

Pour éviter la divergence de $\vec B$ qd $x \to +\infty$

$k = \frac{1-j}{\delta}$ $\quad \underline B = B_0 e^{j(\omega t - x/\delta)} \times e^{-x/\delta}$

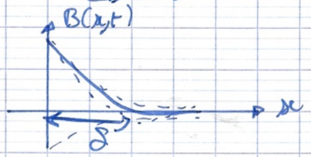
En $x = 0$ → $\vec B(x=0,t) = B_0 e^{j\omega t} = \underline{B_0} e^{j\omega t}$

donc $\underline{B_0} = B_0$

$$\vec B = B_0 e^{-x/\delta} e^{j(\omega t - kx)} \vec{e_z}$$

$$\boxed{\vec B(x,t) = B_0 e^{-x/\delta} \cos(\omega t - kx)\, \vec{e_z}}$$

↳ décroissance expo. de l'amplitude pilotée par δ !



Calcul de $\vec E$

$\vec{rot}\,\vec B = \mu_0 \gamma \vec E$ $\quad \vec E = \frac{\vec{rot}\,\vec B}{\mu_0\gamma}$

Formule :

$$\vec{rot}\,\vec B = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} B_x = 0 \\ B_y = 0 \\ B_z(x) \end{pmatrix}$$

$$\vec{rot}\,\vec B = -\frac{\partial B_z}{\partial x}\vec{e_y}$$

$$\vec{rot}\,\underline{\vec B} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(B_0 e^{j(\omega t - kx)}\right)\vec{e_y}$$

$$\vec{rot}\,\underline{\vec B} = +kj\, B_0 e^{j(\omega t - kx)}\vec{e_y}$$

$$\underline{\vec E} = \frac{1}{\mu_0\gamma} kj\, B_0 e^{j(\omega t - kx)}\vec{e_y}$$

$$\frac{(1-j)}{\delta}\times j = \frac{1+j}{\delta} = \frac{\sqrt2}{\delta} e^{j\pi/4}$$

$$\underline{\vec E} = \frac{\sqrt2}{\delta\mu_0\gamma} B_0 e^{j(\omega t - kx + \pi/4)}\vec{e_y}$$

$$\vec E = \frac{\sqrt2}{\delta}\frac{B_0}{\mu_0\gamma}\cos(\omega t - kx + \pi/4)\, e^{-x/\delta}\vec{e_y}$$

$$\boxed{\vec E(x,t) = \sqrt{\frac{\omega}{\mu_0\gamma}}\, B_0 \cos(\omega t - kx + \pi/4)\, e^{-x/\delta}\vec{e_y}}$$

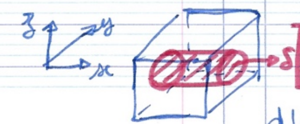
→ Si $x \ll \delta$ → $e^{-x/\delta} \approx 1$

pas d'amortissement → le champ induit est négligeable (ARQS mag OK !)

→ Si $x \gg \delta$ → le champs $\vec E$ et $\vec B$ sont nuls au de là de δ !

$$\boxed{\vec B(x,t) = B_0 e^{-x/\delta}\cos(\omega t - kx)\,\vec{e_z}}$$

b) Puissance de chauffage effet Joule



$$\boxed{P_J = \iiint_V \gamma E^2 dV}$$

On choisit une partie de conducteur de section S et " // à (Ox) "

$dV = S\,dx$

$$\langle P_y \rangle = \frac{1}{2}\frac{\omega B_0^2}{\mu_0} S \int_0^{+\infty} e^{-\frac{2x}{\delta}} dx$$

$$\underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-\frac{2x}{\delta}} dx}_{-\frac{\delta}{2}(-1)}$$

$$\langle P_y \rangle = \frac{1}{4}\frac{S\omega B_0^2 \delta}{\mu_0}$$

$$\boxed{\langle P_y \rangle = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{2\omega}{\mu_0^3 \gamma}} B_0^2 S}$$

↳ modélisation précédente (avec $R >> \delta$) du cylindre chauffé

$\langle P_y \rangle = \pi/16 \, \gamma (B_0 \omega)^2 R^4 h$

AN ⟹ Table de cuisson

$B \simeq 3\,mT$ — Casserole $R = 10\,cm$

$f \simeq 20\,kHz$ — avec un conducteur comme le fer $\gamma(Fe) = 10^7\,S\cdot m^{-1}$

$P_y \approx 8\,W$ trop faible !

Il faut utiliser une casserole ferromag ! (fer...)

$\mu_0 \to \mu_0 \mu_r$ et $B_0 \to \mu_0 B_0$

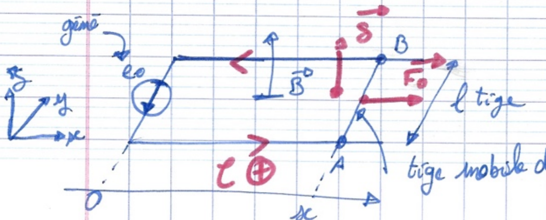
$P_y \propto \frac{\mu_r^2}{\sqrt{\mu_r^3}} \propto \sqrt{\mu_r}$ avec $\mu_r = 10^4$

On gagne un facteur $\sqrt{10^4} = 100$

III) Application de la force de Lorentz

1) Les rails de Laplace

a) Présentation



tige mobile de masse m de vitesse $\vec{v} = v\vec{e_x}$

→ $\vec{B} = B_0\vec{e_z} = \vec{cst}$

→ résistance du circuit $= R_{tige}$

→ force de frottement : $-\lambda\vec{v}$

→ inductance propre L du circuit supposée cst (m̂ si le circuit se déforme)

b) Équation électrique et mécanique

• Équation électrique :

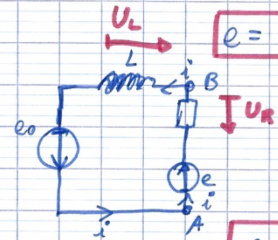
fem d'induction $e = -\frac{d\phi}{dt}$ avec $\phi = \iint_S \vec{B}\cdot\vec{dS} = BS$

avec $S = lx$

$\phi = Blx$

$$\frac{d\phi}{dt} = Bl\frac{dx}{dt} = Blv$$

$$\boxed{e = -Blv}$$



LDM : $e + e_0 = U_R + U_L$

$= Ri + L\frac{di}{dt}$

$$\boxed{e_0 - Blv = Ri + L\frac{di}{dt}} \quad (1)$$

• Équation mécanique :

$\vec{dF_L} = i\vec{dl} \wedge \vec{B}$ avec $\vec{dl} = dl\vec{e_y}$

$= i\,dl\,\vec{e_y} \wedge B\vec{e_z}$

Intégration $\vec{dF_L} = i\,dl\,B\vec{e_x}$

↳ $\vec{F_L} = i\,l\,B\vec{e_x}$ ⟹ $\boxed{F_L = ilB}$

$$\boxed{m\frac{dv}{dt} = -\lambda v + ilB + F_0} \quad (2)$$

Khalil
MOUSSA
PSI

c) Bilan énergétique

$(1) \times i \rightarrow \left[e_0 - Blv = Ri + L\dfrac{di}{dt} \right] \times i$

$\hookrightarrow e_0 i - Blvi = Ri^2 + \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{2} L i^2\right)$

$(2) \times v \rightarrow \left[m\dfrac{dv}{dt} = -\lambda v + ilB + F_0 \right] \times v$

$\hookrightarrow \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{2} m v^2\right) = -\lambda v^2 + iBlv + F_0 v$

$$\underbrace{e_0 i + F_0 v}_{\text{Puissance fournie par l'ext}} = \underbrace{Ri^2 + \lambda v^2}_{\text{Puissance dissipée méca et élec}} + \underbrace{\frac{d}{dt}(E_{mag}) + \frac{d}{dt}(E_c)}_{\text{Puissance stockée}}$$

$P_{fournie} = P_{dissipée} + P_{stockée}$

On peut transférer de l'énergie mécanique en énergie mgn et inversement.

Caractère parfait du couplage électro-mécanique :

$P(\vec{F_L}) = iBlv$

$P_{élec} = ei = -Blvi$

$\boxed{P(\vec{F_L}) + P_{élec} = 0}$!

→ relation valide $\forall$ induction de Lorentz dans $\vec{B}$ cst (rotat°, translat°)

→ pas de pertes dans cette conversion

d) Fonctionnement moteur / générateur

→ **moteur : mise en mvmt sous l'effet de i géné. ($F_0 = 0$)**

$P_{F_L} > 0$ → moteur

$P_{élec} < 0$ → va s'opposer au mvmt

Chemin d'action ⇒ i géné et F_L → mise en mvmt → variat° du flux → fem induite qui s'oppose au courant initial du géné.

En régime statio ($F_0 = 0$)

$$\begin{cases} e_0 - Blv = Ri \\ 0 = -\lambda v + ilB \end{cases}$$

$e_0 = \left(Bl + \dfrac{\lambda R}{Bl}\right) v$

$v = \dfrac{e_0}{Bl\left(1 + \dfrac{\lambda R}{(Bl)^2}\right)}$ $\boxed{v \propto e_0}$

→ **générateur : courant produit par la fem induite sous l'effet F_0**

(sans générateur $e_0 = 0$) $P_{F_L} < 0$ et $P_{élec} > 0$

Chemin d'action → F_0 produit variation du flux

→ fem avec production courant i_{induit}

→ $F_L = i_{induit}\, \vec{dl} \wedge \vec{B}$ s'oppose à la force initiale qui est la cause.

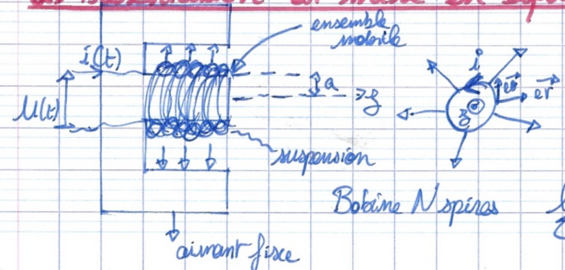
En régime statio ($e_0 = 0$)

$$\begin{cases} -Blv = Ri \\ 0 = F_0 - \lambda v + ilB \end{cases}$$

$\rightarrow i = \dfrac{-F_0}{lB\left(1 + \dfrac{\lambda R}{(lB)^2}\right)}$ $\boxed{i \propto F_0}$ générateur

2) Le Haut-Parleur électrodynamique

a) Présentation et mise en équation



$\vec{B}$ est dans le temps radial

$\vec{B} = B.\vec{e_r}$

$i\vec{dl} = idl\,\vec{e_\theta}$

$l_0 = N \times 2\pi r$

↳ longueur du circuit

- force de rappel élastique $\vec{f} = -kz\,\vec{e_z}$ (suspension)

- On modélise la puissance sonore émise par la force de frottement de la membrane avec l'air

$$\vec{F} = -\lambda \vec{v}$$

- m la masse de l'équipage mobile

- **Équation mécanique :**

$$d\vec{F_L} = i\,d\vec{l} \wedge \vec{B} = i\,dl\,\vec{e_\theta} \wedge B\,\vec{e_r}$$

$$d\vec{F_L} = -i\,dl\,B\,\vec{e_z}$$

$$\vec{F_L} = -\int_{Bobine} i\,dl\,B\,\vec{e_z} = i\,l_0 B\,\vec{e_z}$$

↳ déplacement uniquement selon $\vec{e_z}$

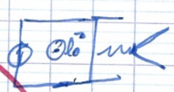
PFD en projection selon $\vec{e_z}$:

$$\boxed{m\frac{dv}{dt} = -\lambda v - kz + i l_0 B}$$

- **Équation électrique :**

$$e = -\frac{d\Phi}{dt}$$

→ analogie rails de Laplace



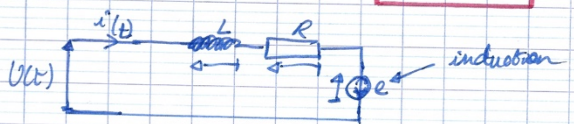
→ couplage électro-méca. parfait

$$P_{FL} + P_{élec} = 0$$

$$-i l_0 B v + e i = 0$$

$$\boxed{e = +l_0 B v}$$

⚠ On ne connait pas $\vec{B}$ de partout



$$U = Ri + L\frac{di}{dt} - e$$

$$\boxed{U = Ri + L\frac{di}{dt} - l_0 B_0 v}$$

B) Fonctionnement en régime forcé : régime sinusoïdal

Détermination de l'impédance équivalente

La fréquence du son émis est fixée par la fréquence de l'excitation électrique (éq. linéaires).

$$\left.\begin{aligned} i(t) &= I\cos(\omega t) \\ u(t) &= U\cos(\omega t + \varphi) \end{aligned}\right\} \text{excitation}$$

Déterminons l'impédance de l'ensemble $\underline{Z}$ pour caractériser sa réponse. $\underline{U} = \underline{Z}\,\underline{i}$.

(1) : $m\frac{d\underline{v}}{dt} = -\lambda \underline{v} - k\underline{z} - \underline{i} l_0 B$

avec $\underline{v} = \frac{d\underline{z}}{dt} = j\omega \underline{z}$

$$\left(mj\omega + \lambda + \frac{k}{j\omega}\right)\underline{v} = -\underline{i}\,l_0 B$$

(2) : $\underline{U} = R\underline{i} + L\frac{d\underline{i}}{dt} - l_0 B \underline{v}$

$$\underline{U} = \underline{i}\,\underbrace{\left[R + jL\omega + \frac{(l_0 B)^2}{mj\omega + \lambda + \frac{k}{j\omega}}\right]}_{\underline{Z}}$$

$$\underline{Z} = R + jL\omega + \underline{Z_m}$$

→ impédance non nulle donc en déplacement

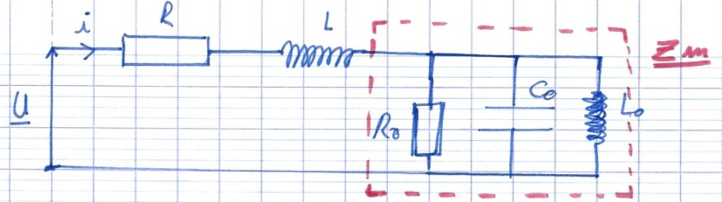
$\underline{Z_m} = 0$ si $v = 0$!

$$\underline{Z_m} = \frac{(l_0 B)^2}{mj\omega + \lambda + \frac{k}{j\omega}}$$

$$\frac{1}{\underline{Z_m}} = \underbrace{\frac{\lambda}{(l_0 B)^2}}_{1/R_0} + \underbrace{\frac{mj\omega}{(l_0 B)^2}}_{jC_0\omega} + \underbrace{\frac{k}{(l_0 B)^2} \times \frac{1}{j\omega}}_{1/jL_0\omega}$$

avec $R_0 = \frac{(l_0 B)^2}{\lambda}$ $\quad C_0 = \frac{m}{(l_0 B)^2}$ $\quad L_0 = \frac{(l_0 B)^2}{k}$

Khalil
MOUSSA
PSI



Pulsation de résonnance $\rightarrow \omega_0^2 = \frac{1}{L_0 C_0} = \frac{k}{m}$!

pulsation naturelle d'oscillation mécanique

$$\boxed{Q = R_0 C_0 \omega_0 = \frac{\sqrt{mk}}{\lambda}}$$

Si on excite électriquement à $\omega_0 \rightarrow$ la réponse en déplacement est la + forte ! Donc émission sonore la + intense

c) Bilan énergétique

$(2) \times i \rightarrow Ui = Ri^2 + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} L i^2\right) - l_0 B_0 v i$

$(1) \times v \rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m v^2\right) = -\lambda v^2 - \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} k z^2\right) - l_0 B_0 v i$

$$\underbrace{Ui}_{P_{fournie}} = \underbrace{Ri^2 + \lambda v^2}_{P_{dissipée}} + \frac{d}{dt}\underbrace{\left(\frac{1}{2} L i^2 + \frac{1}{2} k z^2 + \frac{1}{2} m v^2\right)}_{\text{conversion énergie magn., potentielle élastique, cinétique}}$$

On pose en régime sinusoïdale $\rightarrow \langle R \rangle$

$\langle ui \rangle = \langle Ri^2 \rangle + \langle \lambda v^2 \rangle$

En moyenne $\rightarrow$ la puissance fournie sert à "nourrir" la dissipation pour entretenir le régime forcée.

d) Rendement

$$\eta = \frac{\langle \lambda v^2 \rangle}{\langle ui \rangle} = \frac{\langle ui \rangle - \langle Ri^2 \rangle}{\langle ui \rangle}$$

$$\boxed{\eta = 1 - \frac{\langle Ri^2 \rangle}{\langle ui \rangle}} \qquad \langle Ri^2 \rangle = R \langle i^2 \rangle$$

Calcul d'une valeur moyenne avec des nbres complexes

$$\langle ui \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T UI\cos(\omega t) \times \cos(\omega t + \varphi)\, dt$$

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right]$$

$$\langle ui \rangle = \frac{UI}{2} \times \frac{1}{T}\int_0^T \left[\underbrace{\cos(2\omega t + \varphi)}_{0} + \cos(\varphi)\right] dt$$

$$\langle ui \rangle = \frac{UI}{2}\cos(\varphi)$$

⚠ Le $\cos \varphi$ pour la puissance

$$\underline{u}\,\underline{i}^* = U e^{j(\omega t + \varphi)} \times I e^{-j\omega t}$$
$$= UI e^{j\varphi} = UI(\cos(\varphi) + j\sin(\varphi))$$

$$\frac{1}{2} Re(\underline{u}\,\underline{i}^*) = \frac{UI}{2}\cos(\varphi)$$

$$\boxed{\langle \underline{u}\,\underline{i} \rangle = \frac{1}{2} Re(\underline{u}\,\underline{i}^*)}$$ ♡ ♡

$\langle Ri^2 \rangle = R \times \frac{1}{2} Re(\underline{i}\,\underline{i}^*)$

$\langle \underline{u}\,\underline{i} \rangle = \frac{1}{2} Re(\underline{u}\,\underline{i}^*) = \frac{1}{2} Re(\underline{Z}\,\underline{i}\,\underline{i}^*)$

$$\frac{\langle Ri^2 \rangle}{\langle \underline{u}\,\underline{i} \rangle} = \frac{\frac{1}{2} R \times Re(\underline{i}\,\underline{i}^*)}{\frac{1}{2} Re(\underline{Z}\,\underline{i}\,\underline{i}^*)} = \frac{R}{Re(\underline{Z})}$$

Facteur de qualité : $Q = R_0 C_0 \omega_0 = \frac{\sqrt{m k}}{\lambda}$

$$\underline{Z} = R + jL\omega + \underline{Z_m}$$

(filtre d'ordre 2)

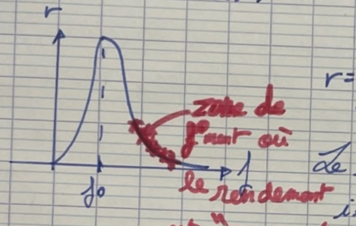
$$Re(\underline{Z}) = R + Re(\underline{Z_m})$$

$$\underline{Z_m} = \frac{1}{\frac{1}{R_0} + \frac{1}{jL_0\omega} + jC_0\omega} = \frac{R_0}{1 + jR_0\left(C_0\omega - \frac{1}{L_0\omega}\right)}$$

$$\underline{Z_m} = \frac{R_0 + j \cdots}{1 - R_0^2\left(C_0\omega - \frac{1}{L_0\omega}\right)^2}$$

$$Re(\underline{Z_m}) = \frac{R_0}{1 - R_0^2\left(C_0\omega - \frac{1}{L_0\omega}\right)^2} = R_m(f)$$

$$r = 1 - \frac{\langle Ri^2 \rangle}{\langle u_i \rangle} = 1 - \frac{R}{R + Re(\underline{Z_m})} = 1 - \frac{R}{R + R_m}$$



$$r = \frac{1}{1 + R/R_m(f)}$$

Le rendement est max quand R_m est max i.e. Pour $\omega = \omega_0$, $f = f_0$!

IV) Electrocinétique dans l'ARQS

1) Dipôle dans l'ARQS

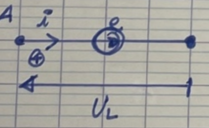
ARQS $\rightarrow L \ll \lambda = c/f$ $\quad L = 1\,m \Rightarrow f \ll 3\cdot10^8\,Hz$

Pour $f \ll 10\,MHz$ l'ARQS est valide.

– bobine : auto-induct°

$e = -\frac{d\phi}{dt}$ $\quad \phi = Li$

$e = -L\frac{di}{dt}$



$U_L = -e \Rightarrow \boxed{U_L = L\frac{di}{dt}}$

$\boxed{U_m = \frac{1}{2}Li^2}$ avec solénoïde $L = \mu_0 \frac{N^2 S}{\ell}$

Analogie

$C = \frac{\varepsilon_0 S}{e}$

– condensateur :

$i = C\frac{dU_c}{dt}$ $\quad q = CU_c$ $\quad C = \frac{\varepsilon_0 S}{e}$

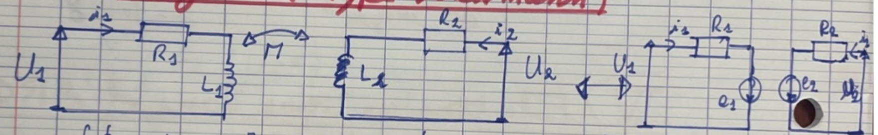
$U_e = \frac{1}{2}CU^2$

Et $\overrightarrow{rot}\vec{E} = \vec{0}$

(ARQS électrique dans condensateur : $\overrightarrow{rot}\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$)

La nouveauté est la possibilité par induct° naturelle de coupler des circuits pour détecter (puce RFID) ou pour transférer de l'énergie.

2) Couplage par inductance mutuelle (en général type Neumann)



$$\begin{cases} \phi_1 = L_1 i_1 + M i_2 \\ \phi_2 = L_2 i_2 + M i_1 \end{cases}$$

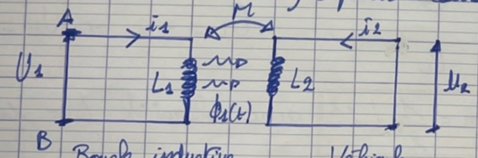
$$\begin{cases} e_1 = -\frac{d\phi_1}{dt} = -\left(L_1\frac{di_1}{dt} + M\frac{di_2}{dt}\right) \\ e_2 = -\frac{d\phi_2}{dt} = -\left(L_2\frac{di_2}{dt} + M\frac{di_1}{dt}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} U_1 = R_1 i_1 + L_1\frac{di_1}{dt} + M\frac{di_2}{dt} \\ U_2 = R_2 i_2 + L_2\frac{di_2}{dt} + M\frac{di_1}{dt} \end{cases}$$

Exemple du principe de la détection par boucle inductive

(détection de véhicules, capteur à courants de Foucault)

TIPE



Boucle inductive de détection

Véhicule ...

masse conductrice

↳ présence de courants de Foucault (induit)

Conducteur le condensateur

↳ modélisé comme une bobine

atil
ORSSA
ST

$$U_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M\frac{di_2}{dt}$$

$$0 = L_2 \frac{di_2}{dt} + M\frac{di_1}{dt} \rightsquigarrow \frac{di_2}{dt} = -\frac{M}{L_2}\frac{di_1}{dt}$$

$$U_1 = \left(L_1 - M^2/L_2\right)\frac{di_1}{dt} = L_1\left(1 - M^2/L_1L_2\right)\frac{di_1}{dt}$$

Le dipôle entre A et B circuit ① est équivalent

$$\boxed{L_1 = L_1(1-k) \quad \text{avec } k = \frac{M^2}{L_1 L_2} \quad \text{coeff de couplage}}$$

La présence du véhicule modifie l'inductance du détecteur.

Remarque : En régime sinusoïdal

Circuit RLC résonnant pour $\omega_0^2 = 1/LC$
effet du couplage M
⇝ apparition d'une nouvelle fréquence de résonance !

Vidéo capteur à courants de Foucault
https://www.youtube.com/watch?v=UDY_kCMXoWE