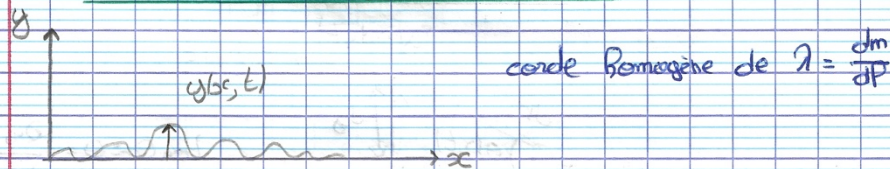


Chap 10 : Phénomènes de propagat° en dispersifs - Eq d'Alembert, propagat° unidirectionnelle

1. Ondes mécaniques transversales sur une corde vibrante

1° - Cadre de l'étude : approximat° des mvts transversales de faible amplitude

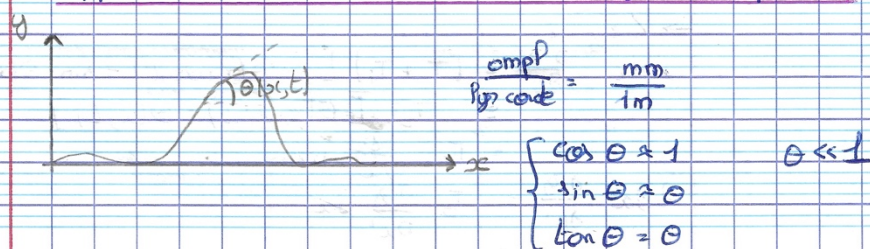


- Vibrat° et propagat° unidimensionnelle selon Ox
- On ne considère que des vibrations transversales $\rightarrow$ corde inextensible, pas de déplacem^t / x
- Néglige pds corde face à sa tension $\rightarrow$ corde horizontale au repos

Exple corde de guitare :

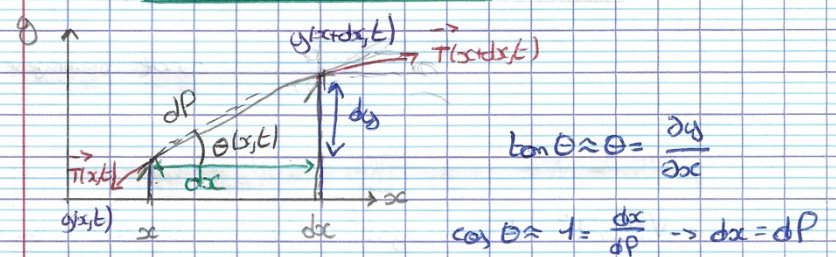
Tension $T \approx 10 \text{ N}$, diamètre $d = 0,25 \text{ mm}$,
 $\mu = 7 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, $L = 1 \text{ m}$
 Poids $P = mg = \lambda L g$, $\lambda = \mu \frac{\pi d^2}{4} L$ $\cdot 4 \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1}$
 $P = 4 \cdot 10^{-4} \times 1 \times 10$
 $= 4 \cdot 10^{-3} \text{ N} \ll T$

$\rightarrow$ Approximat° des vibrations de faible amplitudes



- On néglige les frottements avec l'air et la raideur de la corde qui est souple et fine
- $\rightarrow$ pas de couple de rappel (couple corde enroulée)
- $\rightarrow$ forces de tension tangentes à la corde

2° - Etablissement de l'eq de propagat° : eq de d'Alembert



PFD de l'éla galiléen :

$$dm \vec{a} = \vec{T}(x+dx, t) + \vec{T}(x, t)$$

$$\lambda dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \vec{e}_y = \vec{T}(x+dx, t) + \vec{T}(x, t)$$

$\rightarrow / \vec{e}_x :$

$$0 = T(x+dx, t) \cos \theta(x+dx, t) - T(x, t) \cos \theta(x, t)$$

$$0 = T(x+dx, t) - T(x, t)$$

$T(x+dx, t) = T(x, t)$, tension indep de x, uniforme le long de la corde

On pourra noter : $T(t) = T_0 + T_1(t)$, $T_1(t) \ll T_0$

$\rightarrow / \vec{e}_y :$

$$\lambda dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = (T_0 + T_1) [\sin \theta(x+dx, t) - \sin \theta(x, t)]$$

$$= T_0 [\theta(x+dx, t) - \theta(x, t)]$$

$$= T_0 \frac{\partial \theta}{\partial x} dx$$

$$\lambda dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx$$

$\lambda_0 m^2 = \frac{1}{c^2}$, coefficient de Ponde

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad \text{Eq d'Alembert}$$

→ eq linéaire car opérateurs linéaires amplitudes

→ $t' = -t$, réversible

Généralisation: $\exists D \circ \text{slong } z(t) \rightarrow \text{vibrat}^\circ$

$$\Delta y - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

II. Ondes progressives à régime Ponde d'une corde dans un milieu en

1°. Sol de l'éq de d'Alembert: ondes planes progressives (OPP)

a) Ondes planes

Onde qui ne dep que d'une coord de l'esp dans un repère cartésien, par exple x .

En t pt d'un plan $x = cte$ l'onde est la même, même état de vibrat°. Il s'agit du plan d'onde.

b) Ondes planes progressives

forme générale: **À RETENIR**

$$f(x, ct) \\ f(t - \frac{x}{c})$$

Ondes progressives selon $(ox)^+$

$$g(x+ct) \\ g(t + \frac{x}{c})$$

Ondes progressives selon $(ox)^-$

Vérifions que $f(x-ct) = f(u)$ satisfait l'éq de propagat° de d'Alembert.

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \frac{dB}{du} \frac{\partial u}{\partial t} \quad \text{avec } u = x-ct$$

$$= \frac{dB}{du} \times -c$$

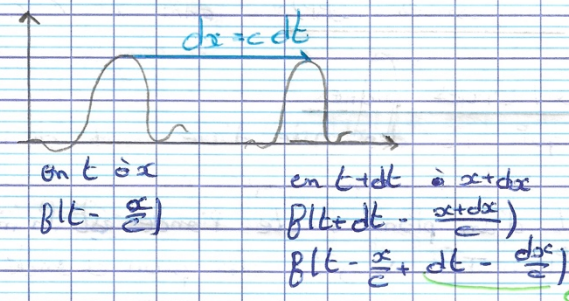
$$\frac{\partial^2 B}{\partial t^2} = \frac{d^2 B}{du^2} c^2$$

$$\frac{\partial B}{\partial x} = \frac{dB}{du} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{dB}{du} \times 1$$

$$\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} = \frac{d^2 B}{du^2}$$

$$\text{Eq d'Alembert: } \frac{d^2 B}{du^2} - \frac{1}{c^2} \left(c^2 \frac{d^2 B}{du^2} \right) = 0$$

Aspect physique de la propagat° de l'OPP sans dispersion:



$$f(t+dt - \frac{x+dx}{c}) = f(t - \frac{x}{c})$$

L'onde s'est déplacée à la vitesse c .

2°. OPP = OPP Harmonique

a) Express° générale, vecteur d'onde, vitesse de phase

$$s(x, t) = A \cos[\omega(t - \frac{x}{c})] \\ = A \cos[\omega t - \frac{\omega x}{c}] = A \cos[\omega t - (kx)]$$

$\vec{k}$ vecteur d'onde qui indique la propagat°, ici $\vec{k} = k\vec{e}_x$ direction de

• Double périodicité :

- Temporelle $\rightarrow$ période $T = \frac{2\pi}{\omega}$, $\omega = 2\pi f$
- Spatiale $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, 1 période spatiale $= cT$

De manière générale $\chi(\vec{r}, t) = A \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})$

• Vitesse de phase :

$\phi(x, t) = \omega t - kx + \phi_0$ si nécessaire

$\phi = \text{cte} \Rightarrow$ vit de déplacement de la phase

$\text{cte} = \omega t - kx$

$$\hookrightarrow x = \frac{\omega}{k} t + \text{cte}$$

$$x = v_P t + \text{cte}, \quad v_P = \frac{\omega}{k}$$

Rq : si $v_P = \frac{\omega}{k} = c = \sqrt{\frac{\tau_0}{\mu}}$ pour les ondes sur la corde
 $v_P \neq f(k) \rightarrow$ pas de dispersion

b) Notat° complexe et eq de dispersion

$$\chi(x, t) = A \cos(\omega t - kx)$$

$$\underline{\chi} = A e^{i(\omega t - kx)}, \quad \chi(x, t) = \text{Re}(\underline{\chi})$$

$$\frac{\partial \underline{\chi}}{\partial t} = i\omega \underline{\chi} \rightarrow \frac{\partial^2 \underline{\chi}}{\partial t^2} = -\omega^2 \underline{\chi}$$

$$\frac{\partial \underline{\chi}}{\partial x} = -ik \underline{\chi} \rightarrow \frac{\partial^2 \underline{\chi}}{\partial x^2} = -k^2 \underline{\chi}$$

$$\frac{\partial^2 \underline{\chi}}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \underline{\chi}}{\partial t^2} = \left[-k^2 + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \right] \underline{\chi} = 0$$

$$k^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \Rightarrow \boxed{k = \frac{\omega}{c}} \in \mathbb{R} \text{ sans dispersion}$$

C'est la relat° de dispersion $k(\omega)$

III. Ondes stationnaires : régime libre ou forcé d'un milieu fini

1° Def d'une onde stationnaire

Forme générale :

$$\chi(x, t) = f(x) \times g(t)$$

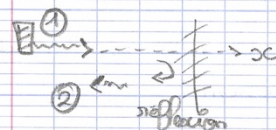
- découplage de x et t

- l'onde doit du "sur place", ne se propage plus

- Δ statia $\Rightarrow$ indep du tps

- adaptée aux CL (Vt)

2° 1ère approche : obtent° par superposit° de 2 cppm



$$\textcircled{1} \chi_1(x, t) = A \cos(\omega t - kx + \alpha)$$

$$\textcircled{2} \chi_2(x, t) = A \cos(\omega t + kx + \theta)$$

$$\chi = \chi_1 + \chi_2 = \boxed{A \cos(\omega t + P) \cos(kx + \varphi)} = \chi$$

$g(t)$ $f(x)$

3° 2° approche : obtent° par resolut° à variables séparées

a) On choisit une solut° stationnaire $\chi(x, t) = f(x) g(t)$

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = 0$$

$$\text{soit } \frac{d^2 f}{dx^2} - \frac{1}{c^2} f \frac{d^2 g}{dt^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{f} \frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{c^2}{g} \frac{d^2 g}{dt^2} = \text{cte!}$$

$$\text{soit } [\text{cte}] = \left[\frac{1}{f} \frac{d^2 f}{dx^2} \right] = \lambda^{-2}, \text{ on pose } \text{cte} = \pm \omega^2$$

$$\frac{1}{f} \frac{d^2 f}{dx^2} = \pm \omega^2$$

2 cas : soit $\omega t = +\omega^2$, $\frac{d^2 g}{dt^2} - \omega^2 g = 0$, $g(t) = Ae^{+\omega t} + Be^{-\omega t}$
 diverge qd $t \rightarrow +\infty \Rightarrow$ NOU
 - soit $\omega t = -\omega^2$

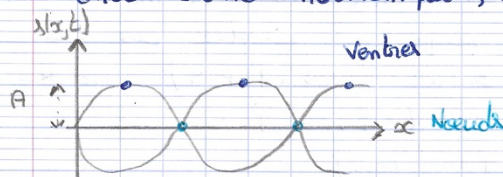
$$\frac{d^2 g}{dt^2} + \omega^2 g = 0, \quad g(t) = C \cos \omega t + D \sin \omega t = C' \cos(\omega t + P)$$

$$\frac{c^2}{B} \frac{d^2 B}{dx^2} = -\omega^2$$

$$\frac{d^2 B}{dx^2} + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 B = 0, \quad \frac{d^2 B}{dx^2} + k^2 B = 0 \quad \text{avec } k = \frac{\omega}{c}$$

$$B(x) = B \cos(kx + \varphi)$$

Sol générale $\lambda(x, t) = B(x)g(t) = A \cos(\omega t + P) \cos(kx + \varphi)$
 onde statio harmonique, $k = \frac{\omega}{c}$



b) Positions des nœuds et des ventres

• Nœuds : $\cos(kx + \varphi) = 0 \Rightarrow kx + \varphi = \frac{\pi}{2} + n\pi, \quad n \in \mathbb{N}$
 On cherche Δx la distance entre 2 nœuds consécutifs
 repérés par $n+1$ et n

Différencions l'expression :

$$k \Delta x = \Delta n \pi \quad \text{avec } \Delta n = 1 \Rightarrow \Delta x = \frac{\pi}{k} = \frac{\lambda}{2}$$

• Ventres : m méthode

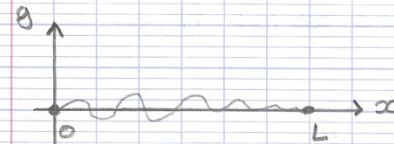
$$|\cos(kx + \varphi)| = 1 \Rightarrow kx + \varphi = n\pi, \quad n \in \mathbb{N}$$

Par différenciation : $k \Delta x = \Delta n \pi \Rightarrow \Delta x = \frac{\lambda}{2}$

La dist entre 2 nœuds ou 2 ventres consécutifs est $\frac{\lambda}{2}$.

4° Etude du régime libre d'une corde fixée à ses 2 extrémités

a) Quantification des vecteurs d'onde, des ω et f



CL : ps de vibrat° aux extrémités

$$\lambda(x=0, t) = \lambda(x=L, t) = 0 \quad \forall t$$

Ap naissance vibrat°, réflex° multiples $\Rightarrow$ superposit°
 d'ondes progressives $\Rightarrow$ onde statio en milieu fini
 de $\oplus$, onde statio parfaitement adaptée aux CL.

Sol : $\lambda(x, t) = A \cos(\omega t + P) \cos(kx + \varphi)$, avec $k = \frac{\omega}{c}$

• $\lambda(x=0, t) = 0 = A \cos(\omega t + P) \cos \varphi : \quad \forall t$

$$\cos \varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} (+n\pi)$$

l'adjoint de $n\pi$ modifie le signe seulement $\rightarrow$ conserve la amplitude

$$\lambda(x, t) = A \cos(\omega t + P) \cos(kx + \frac{\pi}{2})$$

$$= -A \cos(\omega t + P) \sin(kx)$$

$$= A \cos(\omega t + P) \sin(kx)$$

• $\lambda(x=L, t) = 0 = A \cos(\omega t + P) \sin(kL) \quad \forall t$

$$\sin kL = 0 \Rightarrow kL = n\pi, \quad n \in \mathbb{N}^* \quad (k \neq 0)$$

$$k_n L = n\pi \Rightarrow \boxed{k_n = \frac{n\pi}{L}}, \quad \text{avec } k_n = \frac{2\pi}{\lambda_n} = \frac{n\pi}{L} \Rightarrow \boxed{L = n \frac{\lambda}{2}}$$

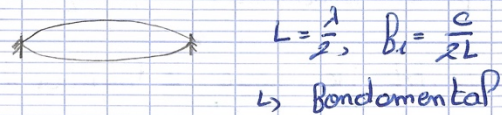
$\hookrightarrow$ Pour corde multiple de $\frac{\lambda}{2}$ (entier)

$$\omega_n = k_n c = \frac{n\pi c}{L}, \quad f_n = n \frac{c}{2L}$$

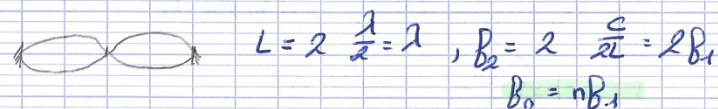
ω_n et f_n (valeurs discrètes) et les pulsations et fréquences propres

b) Modes propres de vibration

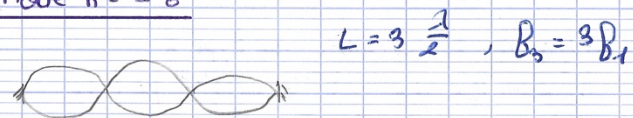
Mode $n=1$: 1 Bureau



Mode $n=2$: 2 Bureaux



Mode $n=3$:



Pour l'écriture de P_{eq} de propagat°, on peut construire l'cte sol comme la somme (superposit°) des vibrations modes.

En le mode n $s_n(x,t) = A_n \cos(\omega_n t + \varphi_n) \sin(k_n x)$
sol globale : $s(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cos(\omega_n t + \varphi_n) \sin(k_n x)$
 $s(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} s_n(x,t)$

c) Explicite des CI : sol par superposit° de modes propres

$s(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t) \sin k_n x$
CI imposent 2 relations : déformat° initiale $\rightarrow$ position
vitesse initiale

• $s(x,t=0) = s(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \sin k_n x$
• $\frac{\partial s}{\partial t}(x,t=0) = v(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \omega_n \sin k_n x$
Ici corde pincée avec l'axe à vitesse initiale nulle
↳ $v(x) = 0$

$\Rightarrow b_n = 0$

Les CI correspondent aux dvt en série de Fourier de $2L$ -périodiques + impaires.

En effet par le fondamental : $k_1 = 1 \times \frac{\pi}{L} = \frac{2\pi}{2L}$ période spatiole

Par def du dvt de série de Fourier :

$a_n = \frac{2}{\text{période}} \int_{\text{période}} s(x) \sin k_n x dx$

$a_n = \frac{2}{2L} \times 2 \times \int_0^L s(x) \sin k_n x dx$

$s(x) = \begin{cases} \frac{am}{L}x & x \in [0, \frac{L}{m}] \\ \frac{am}{(m-1)L}(x-L) & x \in [\frac{L}{m}, L] \end{cases}$

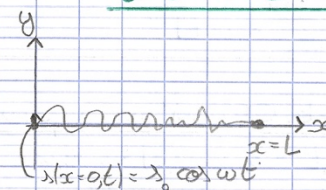
BC offre par morceaux

Intégrale à réaliser du type :

$\int_0^L x \sin k_n x dx = \int_0^L x \sin \left[\left(\frac{n\pi}{L} \right) x \right] dx$
Ap IPP : $a_n = \frac{2am^2}{(n-1)n^2} \sin \left(\frac{n\pi}{m} \right)$

$s(x,t) = \frac{2am^2}{(m-1)\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \sin \left(\frac{n\pi}{m} \right) \sin k_n x \cos \omega_n t$

5° Etude en régime sinusoïdal forcé :
résonance de la corde de Helde



2 CL : $s(x=0,t) = s_0 \cos \omega t$
 $s(x=L,t) = 0$

On choisit une sol d'ordre statio harmonique
 $s(x,t) = A(\omega) \cos(\omega t + \varphi) \sin(kx + \psi)$
amplitude qui dep de ω

Qq 10
⑤

• $x(x=0, t) = x_0 \cos \omega t = A(\omega) \cos(\omega t + \varphi) \sin \varphi$
 $\hookrightarrow \varphi = 0, A(\omega) = \frac{x_0}{\sin \varphi}$ avec $x_0 \approx \text{mm}$ et $A(\omega) \approx \text{cm}$

• $x(x=L, t) = 0 = \frac{x_0}{\sin \varphi} \cos \omega t \sin(kL + \varphi)$
 $\hookrightarrow \forall t, \sin(kL + \varphi) = 0 \Rightarrow kL + \varphi = p\pi, p \in \mathbb{N}$
 p change uniquement le signe du sinus qui pourra être observé en P_{amp}

On choisit $p=0 \rightarrow kL + \varphi = 0 \Rightarrow \varphi = -kL$
 $\hookrightarrow x(x, t) = \frac{x_0}{\sin kL} \cos \omega t \sin(kx - kL)$

$x(x, t) = \frac{x_0}{\sin kL} \cos \omega t \sin(k(L-x))$

Il y a des résonances qd $\sin kL = 0$ (minimal)

ou $A(\omega) \rightarrow +\infty$ de $k_n L = n\pi, n \in \mathbb{N}^*$

Alors $\sin k(L-x) = \sin(n\pi - k_n x) = \sin k_n x$

$x(x, t) = A(\omega_n) \cos(\omega_n t) \sin(k_n x)$

$\hookrightarrow$ on retrouve la forme d'onde stat de la corde fixée à ses 2 extrémités avec résonance p la freq propre f_n .

Rq: Résonances finies on prise en compte amortissement

$\hookrightarrow$ raideur de la corde

$\hookrightarrow$ frottement avec l'air

On peut approximer la vibrat° par un nœud en $x=0$ car amp vibrat° $\ll$ amp résonance

$\hookrightarrow$ m forme pr corde fixée à 2 extrémités.

II. Propagat° le long d'un câble coaxial sans pertes

1° - Modélisat° à ctes réparties sans pertes

$\rightarrow$ propagat° sur qq km et protect° des perturbations électromagnétiques ext (contrairement à la ligne bifilaire) grâce au blindage.

câble coax $\rightarrow$ conducteur central (âme)
 $\rightarrow$ conduct périphérique (brevet/blindage)
 entre les 2 diélectriques plastique, $\epsilon_r = 2,25$

• Il $\exists$ un chp élec qui se propage / $\vec{E}$ est radial

$\vec{E} = f(r) e^{j(\omega t - kz)} \vec{e}_r$

de mjs élec et condensateur à géo cylindrique

$\Gamma = \frac{dC}{ds} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln \frac{b}{a}}$

$\hookrightarrow$ en C.m. $\uparrow$ capacité linéique

Résultats de l'électrostatique valides!

• Courants de signe opposés âme et brevet $\vec{B}$ selon $\vec{e}_\theta$

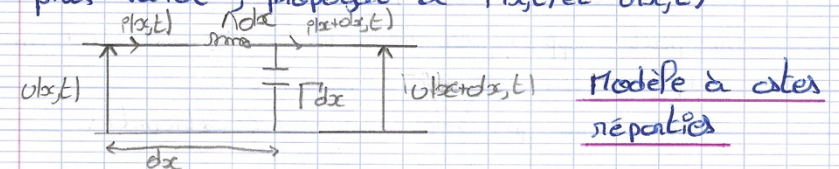
$\hookrightarrow$ existence d'une inductance propre

$\Lambda = \frac{dL}{ds} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \left(\frac{b}{a} \right)$

$\hookrightarrow$ résultat de la magnétostatique valide

$\hookrightarrow$ en H.m $\uparrow$ inductance linéique.

A l'échelle d'un câble de pl 10aines de m, ARQS plus valide, propagat° de $i(x, t)$ et $u(x, t)$



2° - Eq de couplage et de propagat° de $i(x, t)$ et de $u(x, t)$

Loi des Mailles:

$u(x+dx, t) = u(x, t) - \Lambda dx \frac{\partial i(x, t)}{\partial t}$
 $u(x+dx, t) - u(x, t) = \frac{\partial u}{\partial x} dx = -\Lambda dx \frac{\partial i}{\partial t}$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\Lambda \frac{\partial i}{\partial t} \quad 1) \text{ couplage}$$

Loi des nœuds :

$$i(x,t) = i(x+dx,t) + \Gamma dx \frac{\partial u(x+dx,t)}{\partial t}$$

$$i(x+dx,t) - i(x,t) = -\Gamma dx \frac{\partial u}{\partial t}(x+dx,t)$$

$$\frac{\partial i}{\partial x} dx = -\Gamma dx \frac{\partial u}{\partial t}(x+dx,t) \quad \text{avec} \quad \frac{\partial u(x+dx,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right)$$

négligeable

$$\approx \frac{\partial u}{\partial t} \quad \text{à l'ordre 0}$$

$$\frac{\partial i}{\partial x} = -\Gamma \frac{\partial u}{\partial t} \quad 2) \text{ couplage}$$

Eq de propagation de $u(x,t)$:

$$\frac{\partial}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\Lambda \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial i}{\partial t} \right) = -\Lambda \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial i}{\partial x} \right)$$

$$= \Lambda \Gamma \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) \quad 2)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \Lambda \Gamma \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad \text{avec} \quad c^2 = \frac{1}{\Lambda \Gamma}$$

c représente la vitesse de propagation entre deux bornes
vide $c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \rightarrow c = 3 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$

en effet $c^2 = \frac{1}{\Lambda \Gamma} = \frac{\rho_n \frac{b}{a}}{2\pi \epsilon_0} \times \frac{2\pi}{\mu_0 \rho_n \frac{b}{a}} = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}$

⚠ En réalité, milieu diélectrique de cet espace
 $c^2 = \frac{1}{\epsilon_n \epsilon_0 \mu_0} \Rightarrow c = \frac{c_{\text{vide}}}{\sqrt{\epsilon_n}} = 2 \times 10^8 \text{ m.s}^{-1}$

$$Rg^0 \text{ On obtient aussi } \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = 0$$

3° Impédance caractéristique du câble

$$Z_c = \frac{U}{i} \rightarrow \frac{\text{"cause"}}{\text{"effet"}} \text{ ou } i \%$$

impédance caractéristique

On suppose des OPPH selon $(Ox)^+$

$$u(x,t) = U_0 \cos(\omega t - kx)$$

$$i(x,t) = I_0 \cos(\omega t - kx)$$

$$2) \Rightarrow \frac{\partial i}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial t}$$

$$\frac{\partial i}{\partial x} = +\Gamma \omega U_0 \sin(\omega t - kx)$$

intégrale

$$i(x,t) = \Gamma \frac{\omega}{k} U_0 \cos(\omega t - kx) + F(t)$$

$$i(x,t) = \Gamma c \frac{U_0 \cos(\omega t - kx) + F(t)}{u(x,t)}$$

On détermine $F(t)$, on utilise 1).

$$-\Lambda \frac{\partial i}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$-\Lambda \Gamma c x U_0 \omega \sin(\omega t - kx) + \frac{dF(t)}{dt} = U_0 R \sin(\omega t - kx)$$

$\Lambda \Gamma c^2 = 1$

$$\frac{\Lambda \Gamma c \omega}{k} U_0 \sin(\omega t - kx) + \frac{F(t)}{k} = U_0 \sin(\omega t - kx)$$

↳ $F'(t) = 0 \rightarrow F(t) = \text{cte} = 0$ car sol qui se propage sans val moyenne

$$Z_c = \frac{U}{i} = \frac{1}{\Gamma c} = \sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}} = Z_c$$

Rg^0 m résultat si OPP $\rightarrow B(t - \frac{x}{c})$

Avec notat° complexe :

$$i = i_0 e^{j(\omega t - kx)}$$

$$u = u_0 e^{j(\omega t - kx)}$$

$$\frac{\partial i}{\partial x} = -jk i = -\Gamma \frac{\partial u}{\partial t} = -\Gamma j\omega u$$

$$Z_c = \frac{u}{i} = \frac{R}{\Gamma \omega} = \frac{1}{\Gamma c} \quad \text{ou } Z_c \in \mathbb{R}$$

→ OPPH selon $(0x)$:

$$Z_c = -\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$

→ DFG Z_c :

$$Z_c = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0} \mu_r \frac{b}{a} \times \frac{\mu_r \frac{b}{a}}{2\pi \epsilon_0}}$$

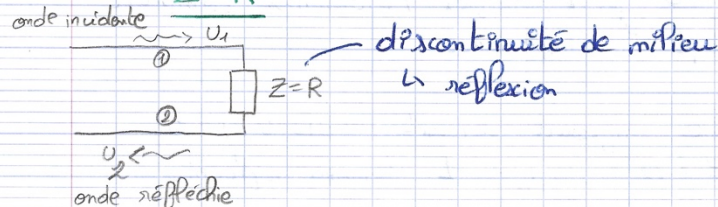
$$= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \mu_r \frac{b}{a}$$

diélec $\hookrightarrow Z_c = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \mu_r \frac{b}{a}$ Ex: $a=1\text{mm}$, $b=3.5\text{mm}$, $\epsilon_r=2.25$

$$Z_c = 50\Omega$$

Typiquement $Z_c = 50\Omega$ ou $Z_c = 75\Omega$

4° Réflex° en bout de ligne sur charge résistive
 $Z=R$



a) Réflex° sur une impédance $Z=R$ qd° coeff de réflexion

OPPH incidente

$$\hookrightarrow u_1 = u_0 \cos(\omega t - kx)$$

OPPH réfléchie : $u_2 = u_{0r} \cos(\omega t + kx)$ avec $k = \frac{\omega}{c}$

Rq° $|u_{0r}| \leq u_0$

En bout de câble, $u(x=0, t) = Z i(x=0, t)$ ①

Déterminer $u(x=0, t)$ et $i(x=0, t)$.

$$u(x, t) = u_0 \cos(\omega t - kx) + u_{0r} \cos(\omega t + kx)$$

$$u(x=0, t) = (u_0 + u_{0r}) \cos \omega t$$

$$i(x, t) = \frac{u_1(x, t)}{Z_c} + \frac{u_2(x, t)}{Z_c} = \frac{1}{Z_c} (u_1(x, t) - u_2(x, t))$$

prop 1-0x

$$i(x=0, t) = \frac{1}{Z_c} (u_0 - u_{0r}) \cos \omega t$$

① $(u_0 + u_{0r}) \cos \omega t = \frac{Z}{Z_c} (u_0 - u_{0r}) \cos \omega t$

$$\Leftrightarrow u_0 + u_{0r} = \frac{Z}{Z_c} (u_0 - u_{0r})$$

$$\Leftrightarrow u_0 \left(1 + \frac{Z}{Z_c}\right) = u_0 \left(\frac{Z}{Z_c} - 1\right) \Leftrightarrow u_{0r} = \frac{Z - Z_c}{Z + Z_c} u_0$$

$$\boxed{\pi_v = \frac{u_{0r}}{u_0} = \frac{Z - Z_c}{Z + Z_c}} \quad \text{coeff de réflex° en tension}$$

• $Z=R=Z_c$ m impédance en bout de câble que celle de la ligne

$\hookrightarrow \pi_v = 0$, pas de réflex° / transmiss° complète

$\hookrightarrow$ adaptat° d'impédance

• Sortie en court-circuit $\rightarrow u(x=0, t) = 0$

$\hookrightarrow Z=0$, $\pi_v = -1$ tension réfléchie déphasage π entre u_1 et u_2

• Sortie en "P'air", circuit ouvert $\rightarrow i(x=0, t) = 0$

$Z=+\infty$, $\pi_v = 1$ tension réfléchie >0

Réflex° en phase $u_1 = u_0 \cos(\omega t - kx)$
 $u_2 = u_0 \cos(\omega t + kx)$
 $u_{0r} = \pi_v u_0$

b) Mise en évidence expérimentale → doc

c) Focus sur le cas d'une impédance terminale nulle

$Z=0 \rightarrow u(x=0,t)=0$ sortie en court-circuit

On se place en notat° complexe

$$u_1 = u_0 e^{j(\omega t - kx)}, \quad u_2 = \Gamma u_0 e^{j(\omega t + kx)}$$

coeff de réflex° en tension

$\Gamma = \Gamma_0 e^{j\varphi}$ avec φ le déphasage éventuel entre u_1 et u_2 qui peut apparaître à la réflexion

Exploitions les CL en bout de câble :

$$u(x=0,t) = u_1(x=0,t) + u_2(x=0,t)$$

$$0 = u_0 e^{j\omega t} + \Gamma u_0 e^{j\omega t}$$

Rq° les 2 ω doivent être π satisfaisent la CL

$$\hookrightarrow 0 = 1 + \Gamma \quad (\Rightarrow \Gamma = -1 \Rightarrow \varphi = \pi \text{ réflex° en phase})$$

⚠ réflex° en phase en l'intensité

Déterminons la structure de l'onde résultante du câble

$$u(x,t) = u_0 e^{j(\omega t - kx)} - u_0 e^{j(\omega t + kx)}$$

$$= u_0 e^{j\omega t} (e^{-jkx} - e^{jkx})$$

$$= -u_0 e^{j\omega t} \times 2j \left(\frac{e^{jkx} - e^{-jkx}}{2j} \right)$$

$$= 2u_0 e^{j\omega t} \times \sin kx = 2u_0 e^{j(\omega t - \frac{\pi}{2})} \sin kx = \text{Re}(u(x,t))$$

$$= 2u_0 \cos(\omega t - \frac{\pi}{2}) \sin kx = 2u_0 \sin \omega t \sin kx = u(x,t)$$

↳ Onde stationnaire harmonique $g(t) \times f(x)$

↳ Nœud de tension

$$\begin{aligned} p(x,t) &= \frac{u_1(x,t)}{Z_c} - \frac{u_2(x,t)}{Z_c} = \frac{1}{Z_c} \left(u_0 e^{j(\omega t - kx)} - (-u_0) e^{j(\omega t + kx)} \right) \\ &= \frac{u_0}{Z_c} e^{j\omega t} (e^{-jkx} + e^{jkx}) \\ &= \frac{2u_0}{Z_c} e^{j\omega t} \cos kx = \text{Re}(i(x,t)) \\ &= \frac{2u_0}{Z_c} \cos \omega t \cos kx \end{aligned}$$

↳ onde stationnaire harmonique

↳ ventre de courant en $x=0$