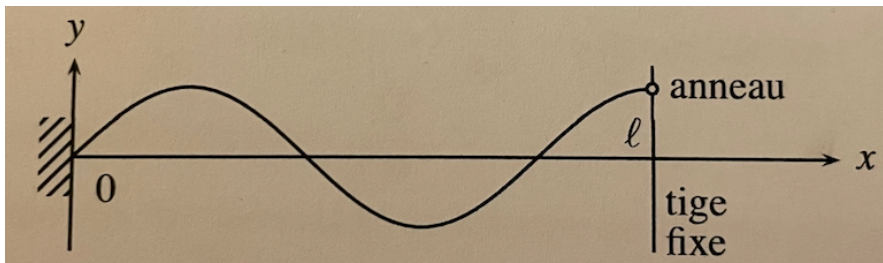


TD Cordes Vibrantes et ondes dans un câble coaxial

Exercice 1 : Modes propres d'une corde vibrante à l'extrémité libre

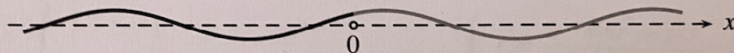
Une corde est attachée à une de ses extrémités. Sa seconde extrémité est libre de se mouvoir verticalement sur un anneau qui coulisse sans frotter sur une tige. La présence de la tige permet de tendre la corde sous une tension T . L'anneau est de masse négligeable, qui sera considérée comme nulle. On notera $y(x,t)$ la déformation de la corde, et on pourra repérer l'angle de déformation tangent à la corde en un point M par $\theta(x,t)$.



1. Qu'en est-il de l'évolution de la norme de la tension T le long de la corde ?
2. Donner la condition aux limites à l'extrémité de la corde en $x = 0$.
3. Pour établir la deuxième condition aux limites en $x = L$ qui portera sur $\frac{\partial y}{\partial x}$, vous pourrez appliquer le PFD à l'anneau.
4. En supposant une solution générale en ondes stationnaires harmoniques, identifiez les modes propres de cette corde.

Exercice 2 : Réflexion et transmission entre deux cordes de masses linéiques différentes

Deux cordes différentes sont reliées en $x = 0$. Celle de gauche, numérotée 1, a une masse linéique μ_1 , celle de droite, numérotée 2, μ_2 . Elles sont tendues sous une tension T .



Une onde harmonique incidente se déplace dans le sens des x croissants sur la corde 1. On observe qu'en $x = 0$, elle donne naissance à une onde réfléchie sur la corde 1, et à une onde transmise sur la corde 2. On modélise ces trois ondes par :

$$y_i(x,t) = y_{0i} \exp(j(\omega_i t - k_i x)), \quad y_r(x,t) = y_{0r} \exp(j(\omega_r t + k_r x)), \\ y_t(x,t) = y_{0t} \exp(j(\omega_t t - k_t x)).$$

On pourra noter $y_1(x,t)$ et $y_2(x,t)$ les vibrations globales pour les cordes 1 et 2.

1. Commenter les expressions de ces trois ondes.
2. En analysant la déformation au voisinage immédiat de la jonction, montrer que les trois pulsations temporelles doivent être identiques, et établir une première relation entre les amplitudes des différentes ondes.
3. En appliquant le PFD à la jonction de masse nulle, établir une nouvelle relation, puis l'expression des coefficients de réflexion $r = \frac{y_{0r}(x=0)}{y_{0i}(x=0)}$ et de transmission en amplitude $t = \frac{y_{0t}(x=0)}{y_{0i}(x=0)}$ en fonction de c_1 et c_2 .

Exercice 3 : Corde vibrante conductrice soumise à un champ magnétique

On étudie les petits mouvements transversaux d'une corde métallique de longueur L fixée en ses deux extrémités d'abscisses $x = 0$ et $x = L$. Un point de la corde, situé à l'abscisse x à la date t au repos, se déplace de $z(x,t)$ suivant $\vec{u}_z$ lors du passage de l'onde. On néglige la pesanteur. La corde est parcourue par un courant d'intensité $i(t) = i_0 \cos(\omega t)$ et plongée dans le champ magnétique $\vec{B}(x) = B_0 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \vec{u}_y$. On rappelle que la force de Laplace qui s'exerce sur un élément de longueur $d\vec{\ell}$ est $d\vec{f} = i d\vec{\ell} \wedge \vec{B}$.

1. Établir l'équation du mouvement de la corde sous la forme :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{i_0 B_0}{\mu} \cos(\omega t) \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right),$$

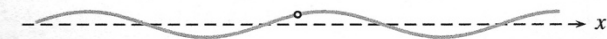
où c est une constante à exprimer en fonction des données.

2. On cherche une solution en $z(x,t) = z_0 \sin\left(\frac{\pi x}{L} + \psi\right) \cos(\omega t + \phi)$ en régime sinusoïdal forcé. Commenter le choix de cette expression.
3. Déterminer l'expression de z_0 . Que se passe-t-il quand ω tend vers $\pi c/L$? la modélisation du phénomène est-elle toujours valable ? Expliquer.

Pour aller plus loin

Exercice 4 : réflexion et transmission sur une perle

Une corde est tendue sous une tension T . Une perle de masse m est enfilée sur la corde. La perle a un mouvement transverse vertical et reste à l'abscisse $x = 0$.



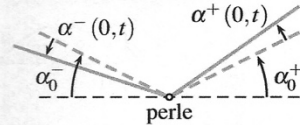
Une onde harmonique incidente se déplace dans le sens des x croissants sur la corde. On observe qu'au niveau de la perle, elle donne naissance à une onde réfléchie et à une onde

transmise. On modélise ces trois ondes par :

$$\begin{aligned} \underline{y}_i(x,t) &= \underline{y}_{0i} \exp(j(\omega t - kx)), & \underline{y}_r(x,t) &= \underline{y}_{0r} \exp(j(\omega t + kx)), \\ \underline{y}_t(x,t) &= \underline{y}_{0t} \exp(j(\omega t - kx)). \end{aligned}$$

1. Pourquoi les pulsations temporelle et spatiale sont-elles identiques pour les trois ondes ?

2. On définit les petits angles α_0^+ et α_0^- que fait la corde au repos en $x = 0^+$ et $x = 0^-$ par rapport à l'horizontale (ils sont très exagérés sur la figure). Établir une relation entre mg , la tension T de la corde, α_0^+ et α_0^- .



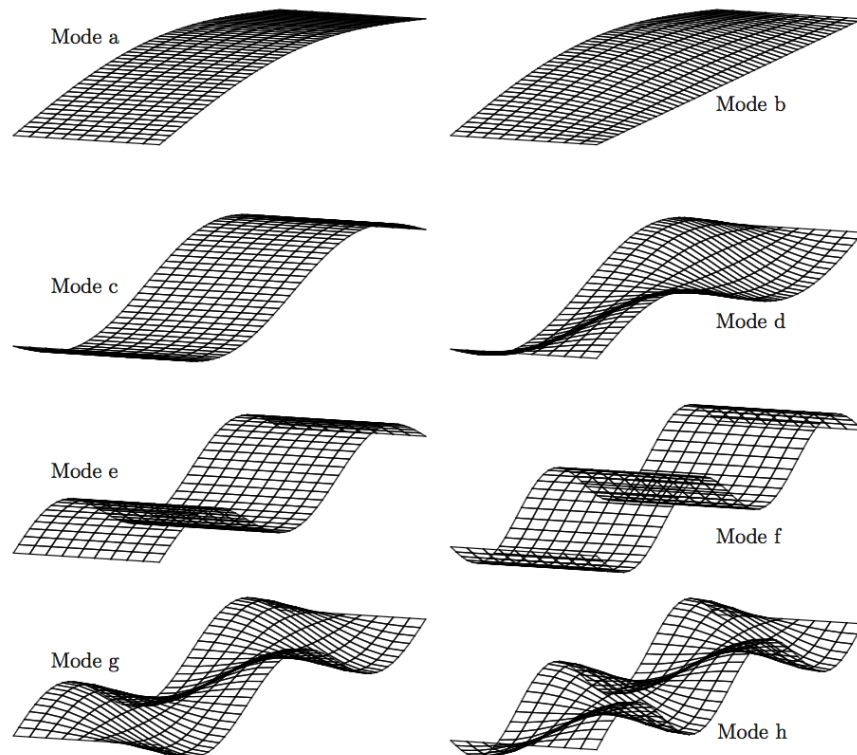
3. Les angles $\alpha^+(0,t)$ et $\alpha^-(0,t)$ sont ceux que fait la corde par rapport à la position d'équilibre, lors du passage de l'onde. Établir les expressions des coefficients de réflexion et de transmission en amplitude, $\underline{r} = \underline{y}_{0r}/\underline{y}_{0i}$ et $\underline{t} = \underline{y}_{0t}/\underline{y}_{0i}$.

Prise en compte de la raideur

Pour une approche plus détaillée de la mise en flexion d'une lame (musicale) voir sujet Centrale PC 2010

Extrait de concours PSI 2016 Mines-Ponts

Physique I, année 2016 — filière PSI



III. — Modèle de la poutre élançée

Dans un modèle couramment utilisé, on peut assimiler une passerelle à une poutre homogène de section rectangulaire de largeur b selon $(O, \hat{u}_x)$ et de hauteur h selon $(O, \hat{u}_y)$. Pour des contraintes modérées, induisant un déplacement vertical petit devant les dimensions transversales de la poutre, c'est-à-dire $y(x)$ très petit devant h ou b , on peut alors se placer dans une extension du modèle de la corde.

On considère une passerelle de section S , de masse volumique ρ , de module d'Young E et dont le moment quadratique de la section droite par rapport à l'axe $(O, \hat{u}_z)$ est $I = \frac{1}{12}bh^3$. L'écriture des contraintes conduit alors à une équation aux dérivées partielles de la forme

$$\rho S \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + IE \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0$$

□ 14 — On cherche des solutions sous la forme $y(x,t) = f(x)g(t)$. De quel type d'onde s'agit-il ? Sous quelles hypothèses de telles ondes apparaissent-elles dans ce genre de structure ?

□ 15 — Déterminer les équations différentielles vérifiées par $f(x)$ et $g(t)$. En déduire que $g(t)$ est une fonction périodique de pulsation ω constante. Combien de constantes d'intégrations sont nécessaires à la détermination complète de la solution $y(x,t)$ correspondant à la situation étudiée ?

□ 16 — Justifier précisément que l'on puisse écrire

$$f(x) = A \cos(\beta x) + B \sin(\beta x) + C \operatorname{ch}(\beta x) + D \operatorname{sh}(\beta x)$$

où A, B, C et D sont des constantes d'intégration, on précisera l'expression de β en fonction des données du problème.

On se place dans l'hypothèse d'une passerelle de longueur L en appui simple à ses extrémités, les conditions aux limites s'écrivent $y|_{x=0,t} = y|_{x=L,t} = 0$ et $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}|_{x=0,t} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}|_{x=L,t} = 0$.

□ 17 — Déterminer les pulsations propres ω_n de vibration transversale d'une poutre en appui simple en fonction de L, E, I, ρ, S et d'un entier n caractérisant le mode.

□ 18 — Différents modes de vibrations d'une passerelle ont été représentés sur la figure 6, quels sont ceux correspondants à l'étude proposée dans cette section ? Identifier de façon argumentée pour chacun de ces modes, l'entier n le caractérisant.

La passerelle du Millennium Bridge est globalement une poutre en aluminium de 322 m de longueur, d'épaisseur $h = 1,07$ m (42 pouces) et de largeur $b = 4$ m (158 pouces). Elle repose sur 4 appuis en créant 3 travées solidaires de $L_1 = 70$ m, $L_2 = 144$ m et $L_3 = 108$ m. On donne la masse volumique de l'aluminium $\rho = 2700 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ et son module d'Young $E = 69 \times 10^9 \text{ SI}$.

□ 19 — Dans le cadre du modèle de la poutre sur appui simple, existe-t-il des modes de vibration transversale du Millennium Bridge susceptibles d'entrer en résonance avec un forçage par des piétons ? Discuter également de la possibilité d'une excitation résonante de certains modes de vibration latérale, c'est-à-dire dans le sens de la largeur b . On motivera ses réponses par une argumentation précise.

FIGURE 6 – Différents modes de vibration d'une passerelle en appui libre aux deux extrémités

Quelques aspects de la physique et de la chimie du piano

Le piano est un instrument de musique à cordes frappées inventé par l'italien Bartolomeo Cristofori au milieu du XVIII^{ème} siècle et perfectionné principalement au XIX^{ème} siècle, le piano à queue moderne ayant atteint sa maturité au début du XX^{ème} siècle. Ce problème se propose d'aborder différents aspects du fonctionnement et de la conception de l'instrument. Les différentes parties sont largement indépendantes.

I Vibrations d'une corde de piano fixée à ses deux extrémités

Lorsque l'instrumentiste frappe une touche du clavier, celle-ci actionne un mécanisme, qui actionne à son tour un marteau¹, qui vient frapper une corde². Celle-ci entre alors en vibration libre (tant que la touche est enfoncée). On s'intéresse donc dans cette partie aux vibrations libres d'une corde du piano.

Sauf avis contraire, on supposera que la corde peut être supposée sans raideur et on négligera toujours les effets de la pesanteur.

La corde de masse linéique μ est tendue avec la tension T_0 . Au repos, la corde est rectiligne et parallèle à l'axe horizontal (Ox). On étudie les mouvements de la corde autour de sa position d'équilibre. On note $y(x, t)$ le déplacement du point de la corde à l'abscisse x à l'instant t . L'axe (Oy) est l'axe vertical ascendant.

I.A – Mise en équation du mouvement transversal d'une corde de piano sans raideur

I.A.1) Que signifie l'expression « corde sans raideur » ? Qu'entend-on par « hypothèse des petits mouvements » ?

I.A.2) Dans le cadre de l'approximation des petits mouvements, établir les deux équations liant les dérivées partielles par rapport à t et à x de la vitesse transversale d'un point de la corde $v_y(x, t) = \frac{\partial y}{\partial t}(x, t)$ et de la projection sur l'axe (Oy) de la force de tension exercée à l'abscisse x par le morceau de corde situé à droite de cette abscisse sur la partie située à gauche $T_y(x, t)$. On fera apparaître la tension T_0 en le justifiant.

I.A.3) Montrer que la fonction $y(x, t)$ vérifie l'équation aux dérivées partielles

$$\mu_0 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (\text{I.1})$$

Identifier la célérité c des ondes transversales sur la corde et en donner l'expression. Comment s'appelle cette équation ? Citer au moins deux autres phénomènes régis par la même équation.

I.A.4) On peut lire dans une documentation technique que « une corde de piano est tendue à 85 kg ». Pouvez-vous en déduire un ordre de grandeur de la tension T_0 d'une corde ? Pour une corde en acier donnant la note « La 4 », le diamètre de la corde est de 1,1 mm. La masse volumique de l'acier valant $7,8 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, calculer la célérité c des ondes transversales sur la corde.

I.B – Modes propres d'une corde de piano sans raideur, fixée aux deux extrémités. Position du marteau sur la corde

La corde est fixée à ses deux extrémités, $x = 0$ et $x = L$, ce qui impose les conditions aux limites : $y(0, t) = y(L, t) = 0$.

I.B.1) Qu'appelle-t-on onde stationnaire ? Montrer que les solutions en ondes stationnaires, physiquement acceptables, de l'équation (I.1) sont de la forme $y(x, t) = y_0 \cos(\omega t + \varphi) \cos(kx + \psi)$. Quelle est la relation entre ω et k ?

I.B.2) Qu'appelle-t-on « modes propres » et « fréquences propres » de la corde ? Exprimer les fréquences propres f_n de la corde en fonction de c et L . Donner l'expression de la solution $y_n(x, t)$ correspondant au mode propre numéro n . Dessiner l'aspect de la corde à plusieurs instants bien choisis pour $n = 1$, $n = 2$ et $n = 3$.

I.B.3) La solution générale de l'équation (I.1) correspondant aux conditions aux limites $y(0, t) = y(L, t) = 0$ est une superposition des modes propres, qui s'écrit

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(n \frac{\pi ct}{L}\right) + b_n \sin\left(n \frac{\pi ct}{L}\right) \right) \sin\left(n \frac{\pi x}{L}\right)$$

La corde est frappée à l'instant initial par un marteau de largeur $2a$ (faible), situé à l'abscisse x_0 (pendant un intervalle de temps supposé infiniment court). Ce marteau communique une vitesse initiale transversale à la corde. On se donne les conditions initiales suivantes (juste après l'attaque de la corde par le marteau) en tout point de la corde :

- la forme initiale de la corde donnée par $y(x, 0) = 0$;
- la vitesse initiale de la corde donnée par

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x, t) = \begin{cases} u_0 & \text{pour } x \in [x_0 - a, x_0 + a] \\ 0 & \text{en dehors de cet intervalle} \end{cases}$$

a) On donne le résultat du calcul :

$$y(x, t) = \frac{4u_0 a x_0}{cL} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(n \frac{\pi a}{L}\right)}{n \frac{\pi a}{L}} \frac{\sin\left(n \frac{\pi x_0}{L}\right)}{n \frac{\pi x_0}{L}} \sin\left(n \frac{\pi x}{L}\right) \sin\left(n \frac{\pi ct}{L}\right)$$

Quel est l'effet de la largeur a du marteau ? Pour une corde de piano de longueur $L = 65 \text{ cm}$ (« Do 4 », fréquence fondamentale $f_1 = 262 \text{ Hz}$), donner l'ordre de grandeur de la fréquence au-delà de laquelle cet effet est sensible. La largeur du marteau vaut $2a = 2 \text{ cm}$. Commentaire ?

b) Comment choisir le point d'attaque si l'on veut supprimer l'harmonique de rang n ?

I.C – Conséquences sur la conception des cordes d'un piano

La hauteur du son produit par une corde est fixée par la fréquence f de son mode fondamental $n = 1$. Les 88 notes d'un piano moderne s'échelonnent du « La 0 » (fréquence fondamentale $f = 28 \text{ Hz}$) au « Do 8 » (fréquence fondamentale $f = 4,2 \text{ kHz}$).

I.C.1) Rappeler la relation liant la longueur L d'une corde à la fréquence de son fondamental f .

On rappelle que pour la fréquence fondamentale $f = 262 \text{ Hz}$, on a une longueur de corde $L = 65 \text{ cm}$. Quelles sont les valeurs extrêmes des longueurs de corde prévues dans l'extrême grave et dans l'extrême aigu ?

I.C.2) Les longueurs calculées ci-dessus sont excessives dans le grave (problèmes d'encombrement et de fragilisation de la structure à cette échelle) : en pratique, la longueur d'un piano à queue de concert moderne n'excède pas 3 m (la longueur la plus courante étant autour de 2,75 m). La longueur des cordes obéit assez bien à la loi étudiée au I.C.1 pour les notes au-delà du « Do 4 ». Pour les notes plus graves, on utilise des cordes filées : il s'agit de cordes d'acier, autour desquelles on a enroulé un fil de cuivre. La longueur de corde variant peu dans ce domaine du clavier, expliquer l'intérêt de ce procédé. Pourrait-on envisager de jouer sur la tension T_0 des cordes ?

I.C.3) On donne la masse volumique du cuivre : $\rho(\text{Cu}) = 9,0 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. En assimilant l'enroulement de cuivre à une couche homogène d'épaisseur 1 mm recouvrant le cœur d'acier de diamètre 1,6 mm, et pour la tension $T_0 = 850 \text{ N}$, calculer la longueur de la corde du « La 0 » (note la plus grave du piano, de fréquence fondamentale $f = 28 \text{ Hz}$).

I.D – Prise en compte de la raideur : dispersion et inharmonicité

En réalité, à cause de l'élasticité du matériau constituant une corde, il faut prendre en compte sa raideur. Cela est particulièrement vrai pour les cordes de grand diamètre³. Il nous faut donc raffiner le modèle adopté jusqu'à présent. On considère toujours que les mouvements de la corde sont transversaux, et contenus dans le plan vertical xOy . La théorie de l'élasticité montre que la tension $\vec{T}(x, t)$ n'est plus tangente à la corde et que pour permettre la courbure de la corde, il faut prendre en compte un couple de moment $\vec{\Gamma} = \pm \Gamma(x, t) \vec{u}_z$ dont l'expression est donnée par

$$\Gamma(x, t) = \frac{\pi r^4}{4} E \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

où r désigne le rayon de la corde. E , appelé « module d'Young », traduit les propriétés d'élasticité du matériau constituant la corde et s'exprime en Pascal. On considère ici une corde en acier de masse volumique $\rho(\text{acier}) = 7,8 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ et de module d'Young $E = 190 \text{ GPa}$.

¹ Les marteaux sont réalisés en bois recouvert de feutre.

² Dans le médium et l'aigu, chaque marteau frappe simultanément deux ou trois cordes identiques pour chaque note.

³ C'est d'ailleurs la raison pour laquelle on enrobe les cordes de grave avec du cuivre enroulé, plutôt que d'augmenter encore le diamètre du cœur d'acier.

La portion de corde comprise entre les abscisses x et $x + dx$ est donc soumise aux forces de tension et aux couples

$$\begin{aligned}\vec{T}_g(x, t) &= -(T_x(x, t)\vec{u}_x + T_y(x, t)\vec{u}_y) & -\Gamma(x, t)\vec{u}_z & \text{en } x \\ \vec{T}_d(x + dx, t) &= T_x(x + dx, t)\vec{u}_x + T_y(x + dx, t)\vec{u}_y & \Gamma(x + dx, t)\vec{u}_z & \text{en } x + dx\end{aligned}$$

I.D.1)

- Vérifier l'homogénéité de la relation donnant $\Gamma(x, t)$.
- En appliquant le théorème de la résultante cinétique à la portion $\{x, x + dx\}$, montrer que T_x ne dépend que du temps. On supposera que T_x est en réalité une constante notée T_0 . Établir également une équation aux dérivées partielles liant $y(x, t)$ et $T_y(x, t)$.
- En appliquant le théorème du moment cinétique barycentrique à la portion $\{x, x + dx\}$, établir une nouvelle équation aux dérivées partielles liant $y(x, t)$, $T_y(x, t)$ et $\Gamma(x, t)$. À cette fin, on négligera en justifiant cette approximation le moment d'inertie de la portion $\{x, x + dx\}$ par rapport à l'axe Gz .
- En déduire l'équation aux dérivées partielles régissant les mouvements de la corde

$$\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + E \frac{\pi r^4}{4} \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0$$

où μ désigne toujours la masse linéique de la corde.

I.D.2) On s'intéresse à l'influence de la raideur sur les fréquences propres de la corde. On se place donc dans un mode propre de vibration et on suppose $y(x, t) = y_0 \cos(kx + \psi) \cos(\omega t)$.

- Établir la relation de dispersion $\omega(k)$ d'un tel mode.
- Montrer que les fréquences propres de la corde tendue entre ses extrémités fixées en $x = 0$ et $x = L$ s'écrivent

$$f_n = n \frac{c}{2L} \sqrt{1 + Bn^2}$$

où n est un entier naturel non nul, c la célérité des ondes sur la corde sans raideur et B une constante qu'on exprimera en fonction de E , T_0 , r et L . Pouvez-vous en déduire un des avantages présentés par un piano à queue par rapport à un piano droit ?

- Tracer sur un même graphique les courbes représentatives de f_n en fonction de n pour une corde sans raideur et pour la même corde avec raideur. Commenter.
- Calculer numériquement B (on prendra $L = 0,65$ m, $r = 0,55$ mm, $T_0 = 850$ N et $E = 190$ GPa). En déduire l'expression approchée de l'inharmonicité de raideur i_n , définie par le rapport $i_n = (f_n - f_n^0)/f_n^0$ où f_n^0 désigne la fréquence propre du mode n pour une corde sans raideur.
- À partir de quel rang n la fréquence propre f_n de la corde avec raideur est-elle plus élevée d'un demi-ton que celle de la corde idéale, f_n^0 ? Donnée : deux notes séparées d'un demi-ton ont des fréquences fondamentales qui sont dans un rapport $2^{1/12}$.

II Couplage entre une corde de piano et la table d'harmonie : le rôle du chevalet

On revient ici à une corde sans raideur.

Une corde vibrante est un « radiateur » acoustique très peu efficace. Si l'on veut produire du son efficacement, il faut utiliser une structure de bien plus grande taille : il s'agit de la table d'harmonie, mince planche d'épicéa, qui par ses vibrations, rayonne du son dans l'espace environnant. On s'intéresse à la manière dont la corde vibrante peut transférer une partie de son énergie à la table d'harmonie par l'intermédiaire d'une pièce de bois collée sur la table : le chevalet.

II.A – Impédance caractéristique d'une corde vibrante

II.A.1) On considère une onde progressive sinusoïdale se propageant vers les x croissants le long de la corde sans raideur étudiée dans la partie I.A. On conserve les notations de la partie I. Montrer que pour cette onde progressive, le rapport $T_y(x, t)/v_y(x, t)$ est constant et prend la valeur $-\mu c$. On appelle « impédance caractéristique » de la corde la grandeur $Z_C = \mu c$. Quelle est la dimension de Z_C ?

II.A.2) Que devient ce rapport si l'onde progressive sinusoïdale se propage vers les x décroissants ?

II.B – Couplage corde-chevalet

La « partie utile » (ou longueur vibrante) de la corde est tendue entre l'extrémité gauche (en $x = 0$) où l'agrafe la maintient immobile : $y(0, t) = 0$, et l'extrémité droite (en $x = L$) où elle repose sur le chevalet.

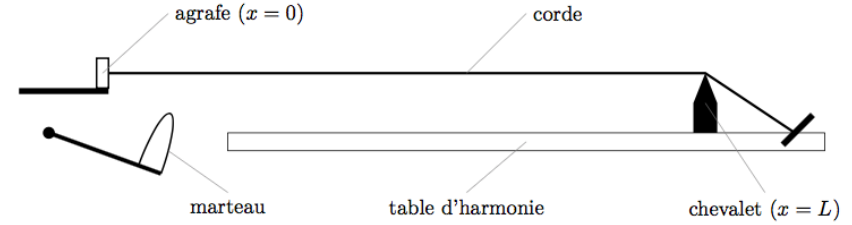


Figure 1

II.B.1) On propose de modéliser l'extrémité droite de la corde (située en $x = L$) par la condition aux limites $T_y(L, t)/v_y(L, t) = -R$, où R est une constante positive caractérisant le couplage corde-chevalet. Cette constante R se nomme l'impédance mécanique de l'ensemble chevalet-table d'harmonie. Pourquoi ce modèle est-il pertinent selon vous ? De quel phénomène rend-il compte ? On se contentera d'une réponse qualitative.

II.B.2) On cherche des solutions en ondes stationnaires de la forme $y(x, t) = f(x) \exp(st)$ où s est un nombre complexe. Montrer que $f(x) = A \sinh(sx/c)$ et que $\tanh(sL/c) = -1/r$ où l'on a posé $r = R/Z_C$. Ce dernier résultat peut se récrire

$$\exp\left(\frac{2Ls}{c}\right) = \frac{r-1}{r+1}$$

forme que l'on adopte dorénavant.

II.B.3) s étant complexe, on pose $s = \alpha + j\omega$, où α et ω sont des réels et $j^2 = -1$. Dans le cas où $r > 1$, qui correspond au cas du piano, calculer les valeurs possibles de ω ; commenter. Calculer également α en fonction de c , L et r ; commenter.

II.B.4) Montrer que la solution précédente tenant compte du couplage avec le chevalet est de la forme $y(x, t) = \exp(\alpha t) (\exp(\alpha x/c) F(t + x/c) - \exp(-\alpha x/c) F(t - x/c))$. Qu'en dites-vous ? Est-ce toujours une onde stationnaire ?

II.B.5) L'expérience quotidienne du pianiste montre qu'une note peut persister plusieurs secondes dans l'extrême grave, tandis que dans l'extrême aigu, le son ne persiste qu'une fraction de seconde. Les calculs menés ci-dessus sont-ils en accord avec l'expérience ? Quel(s) raffinement(s) pourrait-on apporter au modèle ?

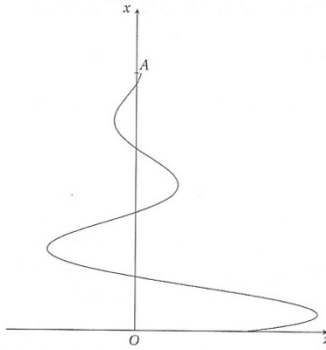


Figure 23.23. Vibration d'une corde verticale.

●●● **Exercice C** → 20 min.

Une corde non élastique, de masse linéique μ , de longueur L est suspendue verticalement dans le champ de pesanteur d'intensité g . On adopte la modélisation de la figure 23.23. Au repos la corde est verticale, située entre les points A et O distants de L . On suppose qu'on impose en A un mouvement oscillatoire horizontal caractérisé par $z_A(t) = a \cos \omega t$. L'amplitude a est très inférieure à la longueur L . On désigne par $z(x, t)$ le déplacement de la corde qui ne se produit que dans la direction (Oz) . On suppose $|z(x, t)| \ll L$ (ce qui n'est pas vérifié sur la figure).

1. Montrer que l'équation de propagation des ondes le long de la corde est donnée par :

$$\frac{\partial^2 z(x, t)}{\partial t^2} = g \left(\frac{\partial z(x, t)}{\partial x} + x \frac{\partial^2 z(x, t)}{\partial x^2} \right).$$

2. On cherche alors une solution du type :

$$z(x, t) = F(X)(K_1 \cos \omega t + K_2 \sin \omega t),$$

avec $X = x \frac{\omega^2}{g}$, où K_1 et K_2 sont des constantes et pour laquelle on admettra que $F(0) = 1$.

Déterminer l'équation vérifiée par $F(X)$ puis, en rechercher une solution sous la forme :

$$F(X) = 1 + F_1 X + F_2 X^2 + \dots$$

en exprimant les coefficients F_i .

3. Montrer alors que :

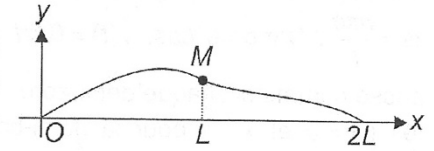
$$z(x, t) = a \frac{F\left(x \frac{\omega^2}{g}\right)}{F\left(L \frac{\omega^2}{g}\right)} \cos \omega t.$$

4. Un étudiant trouve un fil très long. Il en coupe une longueur de 1 m. En le tenant à une de ses extrémités, il impose une oscillation horizontale d'amplitude 5 mm, 10 fois par seconde. Écrire une procédure python permettant de résoudre l'équation différentielle vérifiée par $F(X)$ et de tracer $z(x, t)$ à un instant $t = \frac{2\pi}{\omega}$.

3.7 Autre exemple de C.A.L : corde lestée en son milieu ☹

Nous avons vu sur l'exemple de la corde attachée à ses deux extrémités que les pulsations propres dépendent des C.A.L.

Prenons un autre exemple : celui où on place une masse ponctuelle M au milieu d'une corde de longueur $2L$ attachée à ses deux extrémités.



La masse étant ponctuelle, elle ne modifie par l'équation locale régissant la vibration $\psi(x, t)$, $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$, avec $c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$. Cependant, elle rajoute des C.A.L en $x = L$, ce qui entraîne que la solution prend des formes différentes selon l'intervalle : $\psi_1(x, t)$ pour $0 \leq x < L$, et $\psi_2(x, t)$ pour $L < x \leq 2L$. Afin de vérifier les C.A.L, on cherche $\psi_1(x, t)$ et $\psi_2(x, t)$ sous la forme d'ondes stationnaires de pulsation ω , et on pose $k = \omega / c$.

— $\psi_1(x, t) = Y_1 \sin(kx) \cos(\omega t)$ vérifie $\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2}$, et $\psi_1(0, t) = 0 \forall t$.

— $\psi_2(x, t) = Y_2 \sin[k(2L - x)] \cos(\omega t + \phi)$ vérifie $\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial t^2}$, et $\psi_2(2L, t) = 0 \forall t$.

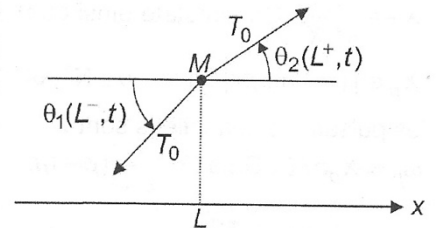
Il reste à vérifier les C.A.L en $x = L$:

— Continuité du déplacement. Si la masse ponctuelle se déplace de $y(t)\vec{e}_y$, lors de la perturbation, on a $\psi_1(L^-, t) = \psi_2(L^+, t) = y(t) \forall t$, ce qui entraîne :

$Y_1 \sin(kL) \cos(\omega t) = Y_2 \sin(kL) \cos(\omega t + \phi) \forall t$. On peut imposer $\phi = 0$. Y_2 est alors lié à Y_1 par la relation $Y_1 \sin(kL) = Y_2 \sin(kL)$ (1).

— La présence de la masse implique un couplage entre les tensions de la corde en $x = L^-$ et en $x = L^+$, via le P.F.D appliqué à la masse ponctuelle dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen :

$$M \frac{d^2 y}{dt^2} = T_0 \cdot \theta_2(L^+, t) - T_0 \cdot \theta_1(L^-, t).$$
 Cette équation est établie avec les hypothèses du 1.1 : calculs à l'ordre 1 en ψ et θ , poids négligé devant les forces de tension (au repos la corde est droite).



On a $y(t) = Y_1 \sin(kL) \cos(\omega t)$, $\theta_2(L^+, t) = \frac{\partial \psi_2}{\partial x}(L^+, t)$ et $\theta_1(L^-, t) = \frac{\partial \psi_1}{\partial x}(L^-, t)$, d'où
 $-M\omega^2 Y_1 \sin(kL) \cos(\omega t) = T_0 [-kY_2 \cos(kL) - kY_1 \cos(kL)] \cos(\omega t) \forall t$, soit :

$M\omega^2 Y_1 \sin(kL) = kT_0 [Y_1 + Y_2] \cos(kL)$ (2). Il reste à déterminer les valeurs de ω compatibles avec (1) et (2). Deux cas se présentent :

(i) $\sin(kL) = 0 \Leftrightarrow kL = n\pi$, $n \in \mathbb{N}^*$. (1) est vérifiée, et on a alors $k = \frac{n\pi}{L} \Leftrightarrow L = n \frac{\lambda}{2}$ et

$\omega = \frac{n\pi c}{L}$. Dans ce cas, $y(t) = 0 \forall t$: la masse ponctuelle M est immobile. Tout se passe comme si chaque demi-corde de longueur L était attachée à ses deux extrémités ($x=0$ et $x=L$ pour la demi-corde de gauche ; $x=L$ et $x=2L$ pour la demi-corde de droite). On retrouve donc les pulsations propres $\omega = \frac{n\pi c}{L}$. L'équation (2) four-

nit $Y_2 = -Y_1$, d'où $\psi_2(L+\delta, t) = -Y_1 \sin[k(L-\delta)] \cos(\omega t) = -\psi_1(L-\delta, t)$. La corde est donc symétrique par rapport au nœud en $x=L$ où se trouve la masse M . Un tel mode est appelé mode *antisymétrique*.

(ii) $\sin(kL) \neq 0$, alors (1) implique $Y_2 = Y_1$, d'où :

$\psi_2(L+\delta, t) = Y_1 \sin[k(L-\delta)] \cos(\omega t) = \psi_1(L-\delta, t)$. La corde est donc symétrique par rapport au plan $x=L$. Un tel mode est appelé mode *symétrique*. Les pulsations vérifient (2) : $\tan(kL) = \frac{2kT_0}{M\omega^2} \Leftrightarrow \tan\left(\frac{\omega L}{c}\right) = \frac{2T_0}{M\omega c}$. Comme $T_0 = \mu c^2$, on obtient, en posant

$m = 2\mu L$ (masse totale de la corde) : $\tan\left(\frac{\omega L}{c}\right) = \frac{2\mu c}{M\omega} = \frac{2\mu L c}{M\omega L} = \frac{m}{M} \frac{c}{\omega L}$. Si on pose :

$X = \frac{\omega L}{c}$, X obéit à $\tan X = \frac{m}{M} \frac{1}{X}$,

équation qui admet des solutions *dénombrables*, qu'on peut déterminer graphiquement en traçant les courbes de $X \mapsto \tan X$ et :

$X \mapsto \frac{m}{M} \frac{1}{X}$. On constate ainsi que

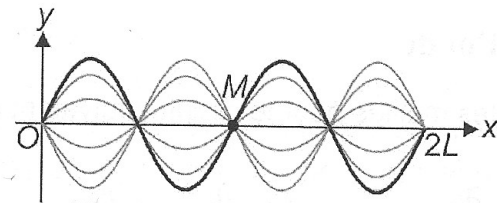
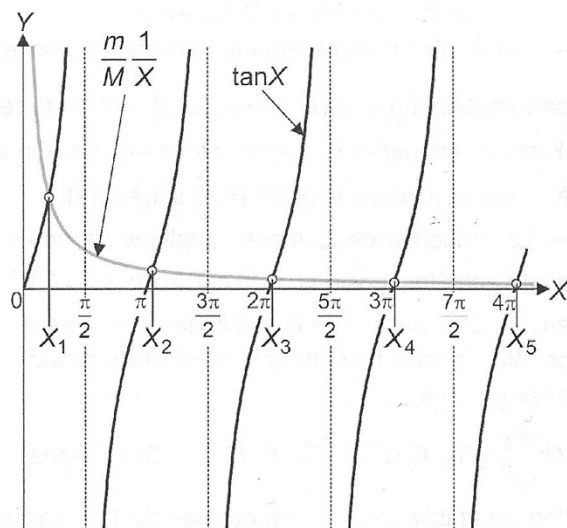
$X_p \in](p-1)\pi, p\pi[$, avec $p \in \mathbb{N}^*$, et

les pulsations quantifiées sont :

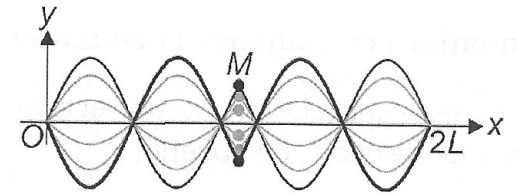
$\omega'_p = X_p c / L$. On a $X_p \underset{p \rightarrow \infty}{\sim} (p-1)\pi$

et $\omega'_p \underset{p \rightarrow \infty}{\sim} (p-1) \frac{\pi c}{L}$: les pulsations

des modes propres symétriques tendent vers celles des modes propres antisymétriques.



Mode propre antisymétrique $n = 2$.



Mode propre symétrique $p = 2$.

Câble coaxial

Exercice 1 : réflexion et transmission entre deux câbles

Deux câbles coaxiaux différents, d'impédances caractéristiques Z_1 et Z_2 , sont mis bout à bout en $x = 0$. Une onde harmonique est émise dans le câble occupant les abscisses $x < 0$, qui se propage dans le sens des x croissants.

1. Proposer une modélisation mathématique pour les ondes incidentes, réfléchies et transmises.
2. Quelles sont les deux conditions aux limites en $x = 0$?
3. Définir et établir les coefficients de réflexion et transmission en amplitude pour la tension, à la jonction entre les deux câbles. Conclure quant à la nécessité d'assurer une adaptation d'impédance lors de la mise en série de deux câbles coaxiaux.
4. On définit les coefficients de réflexion et transmission en puissance, par la valeur absolue du rapport entre la valeur moyenne de la puissance réfléchie sur la valeur moyenne de la puissance incidente, et par le rapport entre la valeur moyenne de la puissance transmise sur la valeur moyenne de la puissance incidente. Calculer ces deux coefficients. Quelle relation simple les relie-t-elle ?

Exercice 2 : câble coaxial alimenté par un générateur - résonances

Un câble coaxial de longueur L est alimenté à une extrémité par un générateur qui délivre la tension $e(t) = E_0 \cos(\omega_0 t)$. L'autre extrémité reste en circuit ouvert.

1. Établir les expressions de l'onde de tension $u(x, t)$ et de celle de courant $i(x, t)$ en tout point du câble.
2. On observe que l'amplitude des ondes de tension ou de courant passe par des valeurs extrêmement importantes pour certaines pulsations ω_0 du générateur. Lesquelles ? Expliquer le phénomène. Qu'est-ce qui limite alors l'amplitude de l'onde ?

Pour aller plus loin

6.6 Coefficient de réflexion en puissance pour le câble coaxial avec une charge linéaire quelconque

On reprend le câble du 4.4, avec une charge linéaire quelconque d'impédance $Z \in \mathbb{C}$ en $x = 0$, et on mène l'étude en régime sinusoïdal forcé (r.s.f.). L'onde de courant prend la forme $i = I^+ e^{j(\omega t - kx)} + I^- e^{j(\omega t + kx)}$ avec I^+ réel. L'onde de tension correspondante est $u = Z_0 I^+ e^{j(\omega t - kx)} - Z_0 I^- e^{j(\omega t + kx)}$. La C.A.L. en $x = 0$, $u(0, t) = Z i(0, t) \forall t$ fournit $Z_0 I^+ - Z_0 I^- = Z(I^+ + I^-) \Rightarrow p_i = \frac{I^-}{I^+} = \frac{Z_0 - Z}{Z_0 + Z}$, et $p_u = \frac{-Z_0 I^-}{Z_0 I^+} = -p_i$. Le coefficient de réflexion en intensité en $x = 0$ peut être complexe : on écrit $p_i = |p_i| e^{j\varphi}$. Nous allons maintenant effectuer un bilan de puissance. Il faut pour cela impérativement revenir à la notation réelle.

Pour l'onde incidente, $\begin{cases} i = I^+ \cos(\omega t - kx) \\ u = Z_0 I^+ \cos(\omega t - kx) \end{cases}$. La partie $x' > x$ du câble reçoit

de la part de la partie $x' < x$ la puissance instantanée $p^+ = ui = Z_0 I^{+2} \cos^2(\omega t - kx)$, et la puissance moyenne $P^+ = \langle p^+ \rangle = \frac{1}{2} Z_0 I^{+2} > 0$.

Pour l'onde réfléchie, $\begin{cases} i = |p_i| I^+ \cos(\omega t + kx + \varphi) \\ u = -|p_i| Z_0 I^+ \cos(\omega t + kx + \varphi) \end{cases}$. La partie $x' < x$ du câble

reçoit de la part de la partie $x' > x$: $p^- = -ui = |p_i|^2 Z_0 I^{+2} \cos^2(\omega t + kx + \varphi)$, soit, en moyenne : $P^- = \langle p^- \rangle = \frac{1}{2} |p_i|^2 Z_0 I^{+2} > 0$ (elle se propage dans le sens des x décroissants). On a donc un coefficient de réflexion en puissance $R = P^- / P^+ = |p_i|^2$.

En écrivant l'impédance de la charge sous la forme $Z = A + jB$, avec :

$$(A, B) \in \mathbb{R}^2, \text{ on obtient } R = \left| \frac{Z_0 - A - jB}{Z_0 + A + jB} \right|^2 = \frac{(Z_0 - A)^2 + B^2}{(Z_0 + A)^2 + B^2} \leq 1.$$

Si la charge est un condensateur, ou une bobine idéale, $Z = jB$: $A = 0$. On en déduit $R = 1$. En effet, comme aucune puissance moyenne n'est absorbée par ces dipôles, la puissance est totalement réfléchie.

Dans ce cas, les signaux réfléchis ont la même amplitude que les signaux incidents. En revanche, ils subissent un déphasage en $x = 0$, comme on peut le voir dans

$$\text{le cas d'un condensateur : } p_i = \frac{Z_0 - \frac{1}{jC\omega}}{Z_0 + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{Z_0 + \frac{j}{C\omega}}{Z_0 - \frac{j}{C\omega}} \Rightarrow \varphi(\omega) = 2 \arctan\left(\frac{1}{Z_0 C \omega}\right).$$

L'onde réfléchie et l'onde incidente ayant même amplitude ($|p_i| = 1$), l'onde résultante est *stationnaire*. Elle présente des nœuds de tension là où les interférences sont destructives, c'est-à-dire en x tel que :

$$u = Z_0 I^+ e^{j\omega t} [e^{-jkx} - e^{j(kx + \varphi)}] = 0 \forall t \Leftrightarrow e^{-jkx} - e^{j(kx + \varphi)} = 0 \Leftrightarrow -2j e^{\frac{j\varphi}{2}} \sin\left(kx + \frac{\varphi}{2}\right) = 0.$$

Par rapport au cas $\varphi = 0$ correspondant à $Z = 0$ (nœud de tension en $x = 0$), les nœuds sont décalés de $\Delta x = -\frac{\varphi}{2k} = -\frac{\varphi(\omega)C}{2\omega}$ (valeur qui dépend de ω).

Enfin, si $A \neq 0$, $R < 1$. L'onde réfléchie et l'onde incidente n'ayant pas la même amplitude, l'onde résultante n'est plus stationnaire : là où les ondes interfèrent destructivement, l'amplitude est encore minimale mais non nulle. L'onde résultante est partiellement progressive (purement progressive quand $R \rightarrow 0$, purement stationnaire quand $R \rightarrow 1$).

30.3 Ondes électrocinétiques (★★)

On modélise une longueur dx de câble coaxial par une inductance λdx et une capacité γdx en parallèle, comme dans le cours page 901.

ÉQUATIONS GÉNÉRALES

1. Établir deux équations aux dérivées partielles reliant les dérivées premières de $u(x, t)$ et de $i(x, t)$.
2. Découpler ces équations pour obtenir les équations de propagation pour $u(x, t)$ et $i(x, t)$. Préciser la vitesse c intervenant puis nommer l'équation obtenue.

On étudie une onde décrite par $\underline{u}(x, t) = \underline{u}^+(x, t) + \underline{u}^-(x, t)$ où $\underline{u}^+(x, t) = \underline{u}_0^+ \exp(j(\omega t - kx))$ et $\underline{u}^-(x, t) = \underline{u}_0^- \exp(j(\omega t + kx))$.

3. Que représentent ces deux ondes ?

4. Quel est le lien entre ω et k pour qu'une telle onde soit solution ?

À l'onde de tension $u^+(x, t)$ correspond l'onde de courant $i^+(x, t)$, et à $u^-(x, t)$ correspond $i^-(x, t)$.

5. Montrer : $\underline{u}^+(x, t) = Z_C \underline{i}^+(x, t)$ et $\underline{u}^-(x, t) = -Z_C \underline{i}^-(x, t)$.

Préciser la valeur de Z_C en fonction de λ et γ .

Dans quelle(s) autre(s) domaine(s) de la physique existe-t-il des relations similaires (impédance changeant de signe suivant le sens de propagation de l'onde) ?

6. En déduire l'expression de $\underline{i}(x, t)$ en fonction de Z_C , $\underline{u}_0^+$, $\underline{u}_0^-$ et de $\exp(j(\omega t \pm kx))$.

7. Montrer que l'impédance $\underline{Z}(x) = \frac{\underline{u}(x, t)}{\underline{i}(x, t)}$ à l'abscisse x s'exprime en fonction de Z_C , $\underline{u}_0^+$, $\underline{u}_0^-$, $\exp(jkx)$ et $\exp(-jkx)$.

MODES PROPRES D'UNE LIGNE OUVERTE

Le câble s'étend de $x = 0$ à $x = L$. Il est court-circuité en $x = 0$. L'extrémité $x = L$ est en circuit ouvert. On étudie une onde décrite par $\underline{u}(x, t) = \underline{u}^+(x, t) + \underline{u}^-(x, t)$ où $\underline{u}^+(x, t) = \underline{u}_0^+ \exp(j(\omega t - k_i x))$ et $\underline{u}^-(x, t) = \underline{u}_0^- \exp(j(\omega t + k_r x))$.

8. Quelles sont les conditions aux limites en $x = 0$ et $x = L$?

9. À quelle condition sur k_i et k_r est-il possible d'observer une onde ? En déduire les valeurs des pulsations.

LIGNE FERMÉE SUR UNE RÉSISTANCE

La ligne est fermée en $x = L$ sur une résistance R . On branche en $x = 0$ un générateur de tension délivrant $e(t) = E \cos(\omega t)$. On étudie une onde décrite par $\underline{u}(x, t) = \underline{u}^+(x, t) + \underline{u}^-(x, t)$ où $\underline{u}^+(x, t) = \underline{u}_0^+ \exp(j(\omega t - kx))$ et $\underline{u}^-(x, t) = \underline{u}_0^- \exp(j(\omega t + kx))$.

10. Quelles sont les conditions aux limites en $x = 0$ et $x = L$?

11. Calculer $\underline{u}_0^+$ et $\underline{u}_0^-$ en fonction de E , Z_C , R , $\cos(kL)$, $\sin(kL)$ et $\exp(\pm jkL)$.

12. Déduire des questions 7 et 11 : $Z(x) = Z_C \frac{a_1 \cos k(L-x) + ja_2 \sin k(L-x)}{ja_1 \sin k(L-x) + a_2 \cos k(L-x)}$, où a_1 et a_2 sont deux constantes à exprimer en fonction de Z_C et R .

13. Exprimer $\underline{u}(x, t)$ et $\underline{i}(x, t)$ en fonction de $\exp(j\omega t)$, E , Z_C , R , $\sin kL$, $\cos kL$, $\sin k(L-x)$ et $\cos k(L-x)$. Quelle est la nature des ondes obtenues ?

14. À quelle condition la ligne transmet-elle une puissance maximale à la résistance R ? Montrer qu'alors $Z(x)$ ne dépend plus de x et donner sa valeur.

15. Que vaut R dans le cas d'un circuit ouvert en $x = L$? En déduire les expressions de $u(x, t)$ et $i(x, t)$ en notation réelle.

Que dire des nœuds et des ventres pour u et i ?

Pour quelle pulsation(s) a-t-on résonance ?