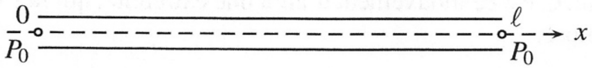
Exercice 1 : Modèle de flûte

Une flûte est modélisée par un tuyan de section S et de longueur ℓ. Il contient un fluide pour lequel la célérité des ondes sonores est c. Les extrémités du tuyau sont ouvertes sur l'atmosphère, qui y impose la pression P_0. Ce modèle simpliste permet d'aboutir aux fréquences émises par l'instrument.



Au repos, la pression vaut P_0 et la masse volumique ρ_0 dans le fluide de la flûte. Les effets de la pesanteur sont négligés. On se place dans l'approximation acoustique.

Le musicien injecte à une extrémité du tuyau une onde sonore plane, progressive, harmonique, qui se propage dans le sens des x croissants et dont la supression est $\underline{P}_1(x,t) = P_{10}\exp(j(\omega_1 t - k_1 x))$. Cette onde se réfléchit à une extrémité dans le tuyau.

> **Remarque**
>
> Le musicien ne souffle pas directement dans la flûte : l'air injecté par le bec ressort par une ouverture. C'est ce mouvement d'air à une extérmité, qui fait vibrer le fluide compris dans la flûte. Ainsi, dans le modèle le plus simple de la flûte de Pan, le musicien souffle perpendiculairement au tuyau.

1. Quelles sont les deux conditions aux limites imposées par l'atmosphère ?

2. En considérant l'onde incidente et l'onde réfléchie, établir quelles pulsations peuvent être jouées avec cet instrument.

3. Une flûte émet un do à 264 Hz quand tous ses trous sont bouchés et que la température de l'air est de 20 °C. Quelle est la longueur ℓ de la flûte (la longueur du tuyau est celle entre le bec et l'autre extrémité), sachant que seul le mode fondamental est excité ?

4. Quelle est la fréquence de la note émise si la température de l'air est maintenant de 10 °C et que tous les trous sont maintenus bouchés ?

5. Où placer un trou pour jouer un ré à 294 Hz, dans une atmosphère à 20 °C ?

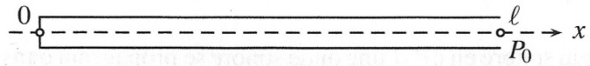
6. Établir l'expression du champ de surpression total dans le tuyau. Quel type d'onde obtient-on ?

7. Établir l'expression du champ des vitesses dans le tuyau.

8. Que vaut le vecteur de Poynting acoustique moyen ?

Exercice 2 : Modèle de clarinette

Une clarinette est modélisée par un tuyan de section S et de longueur ℓ. Il contient un fluide pour lequel la célérité des ondes sonores est c. Une extrémité du tuyau est fixe alors que l'autre est ouverte sur l'atmosphère, qui y impose la pression P_0. Ce modèle simpliste permet d'aboutir aux fréquences émises par l'instrument, il s'applique aussi au saxophone, basson, tuyau d'orgue…



Au repos, la pression vaut P_0 et la masse volumique ρ_0 dans le fluide de la flûte. Les effets de la pesanteur sont négligés. On se place dans l'approximation acoustique.

Le musicien injecte à une extrémité du tuyau une onde sonore plane, il s'établit alors une onde stationnaire modélisée par $P(x,t) = P_0\cos(\omega t)\cos(kx)$.

> **Remarque**
>
> Le musicien ne souffle pas directement dans la clarinette : l'air injecté par le bec ressort par une ouverture. C'est ce mouvement d'air à une extrémité, qui fait vibrer une anche créant l'onde sonore.

1. Pourquoi modéliser l'onde sonore par une onde stationnaire ?

2. Établir l'expression du champ des vitesses dans la clarinette. A-t-on $P(x,t) = Zv(x,t)$, où $Z = \rho_0 c$?

3. Quelles sont les deux conditions aux limites ?

4. Établir quelles pulsations peuvent être jouées avec cet instrument.

5. La note fondamentale d'une flûte de longueur ℓ est $\omega_f = \dfrac{\pi c}{\ell}$. Comparer la hauteur de son d'une flûte et d'une clarinette de même longueur.

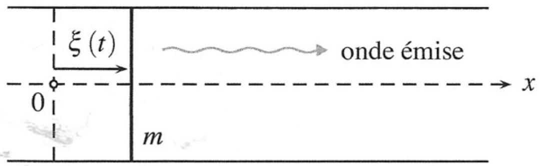
6. Quelle est la fréquence de la note jouée par une clarinette de 65 cm de long, dont tous les trous sont bouchés à l'exception de celui du milieu, dans de l'air à 20 °C ?

Exercice 3 : Emission d'une onde sonore

Dans la mise en équation du haut-parleur électrodynamique, dans le cours de première année sur les circuits mobiles dans un champ magnétique stationnaire, l'émission d'ondes sonores est modélisée par une force de frottement fluide. On établit ici ce point.

Un piston de masse m bouge sans frottement selon l'axe (Ox) dans un tuyan de section S. Ce tuyau contient un fluide pour lequel la célérité des ondes sonores est c. Au repos, la pression y vaut P_0 et la masse volumique ρ_0. Les effets de la pesanteur sont négligés. On se place dans l'approximation acoustique.

Le mouvement du piston est harmonique de position $\xi(t) = \xi_0 \sin(\omega_0 t)$. L'onde sonore engendrée est plane, progressive, harmonique et se déplace dans le sens des x croissants.



1. Quelle est la pulsation de l'onde sonore émise par le piston ?

2. Calculer le champ des vitesses et de surpression de l'onde, en fonction, entre autres données, de ξ_0.

3. Calculer la puissance moyenne des forces de pression exercées sur la face de droite du piston sous la forme :

$$\mathscr{P} = \alpha < v_{piston}^2 > .$$

En déduire la force équivalente modélisant l'émission d'ondes sonores.

4. Le haut-parleur est arrêté et ne fournit plus d'énergie au piston. On néglige tous les frottements. Quel est le temps caractéristique d'arrêt du piston ?

Exercice 4 : Emission d'une sphère pulsante : type résolution problème

Une sphère oscillante de centre O et de rayon $r(t) = r_0 + a\cos(\omega t)$ est placée dans un fluide masse volumique μ_0. Exprimer la puissance acoustique rayonnée.

Pour aller plus loin

Exercice 5 : Modes propres d'une cavité acoustique sphérique

Un gaz parfait isotherme est contenu à l'intérieur d'une sphère rigide de rayon R. Une onde sonore sphérique se propage dans la sphère, décrite par la surpression $P(r,t)$ et le champ des vitesses $v(r,t)\vec{u_r}$.

On se place dans le cas où : $P(r,t) = \dfrac{A}{r}\exp(j(\omega_1 t - k_1 r)) + \dfrac{B}{r}\exp(j(\omega_2 t + k_2 r))$.

On rappelle que la surpression obéit à l'équation de d'Alembert $\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial^2(rP)}{\partial r^2} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 P}{\partial t^2} = 0$.

1. Que représentent chacun des deux termes dans $P(r,t)$?

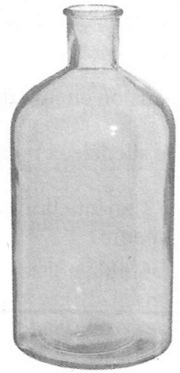
2. Que vaut le champ des vitesses $\underline{v}$ associé à l'onde ?

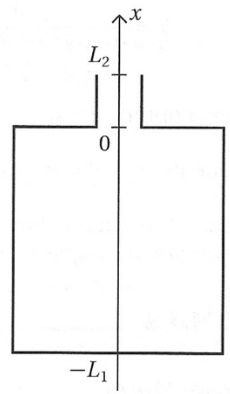
3. Établir le lien entre ω_1 et ω_2 puis A et B. En déduire $\underline{v}$.

4. Établir l'équation portant sur les pulsations pouvant se propager dans la cavité sphérique. Comment les déterminer graphiquement ?

Exercice 6 : Modes propres d'une bouteille

Une bouteille ouverte remplie d'air (figure de gauche ci-après) est modélisée par la juxtaposition de deux cylindres de même axe (Ox) (figure de droite ci-après), représentant respectivement le corps de la bouteille (section S_1 et $-L_1 \le x \le 0$) et son col (section $S_2 < S_1$ et $0 \le x \le L_2$).





On cherche les pulsations ω des modes propres de la bouteille décrits par les champs de vitesses dans le corps :

$$\underline{v}_1(x,t) = \underline{A}_1\, e^{j(\omega t - k_1 x)} + \underline{B}_1\, e^{j(\omega t + k_1 x)},$$

dans le col :

$$\underline{v}_2(x,t) = \underline{A}_2\, e^{j(\omega t - k_2 x)} + \underline{B}_2\, e^{j(\omega t + k_2 x)}.$$

1. Justifier la forme de ces expressions et déterminer k_1 et k_2. Exprimer les surpressions complexes $\underline{p}_1(x,t)$ et $\underline{p}_2(x,t)$ correspondantes.
2. Écrire la condition aux limites au fond de la bouteille en $x = -L_1$ et établir une relation (1) entre les amplitudes complexes inconnues $\underline{A}_1$ et $\underline{B}_1$.
3. Comment s'écrit la condition aux limites en $x = L_2$? En déduire la relation (2) entre les amplitudes $\underline{A}_2$ et $\underline{B}_2$.
4. En faisant un bilan de masse pour un volume d'épaisseur $\varepsilon \to 0$ au voisinage de $x = 0$, montrer la continuité du débit volumique en $x = 0$. En utilisant par ailleurs la continuité de la surpression $p_1(0^-, t) = p_2(0^+, t)$, établir deux nouvelles relations (3) et (4) entre les amplitudes $\underline{A}_1$, $\underline{B}_1$, $\underline{A}_2$, $\underline{B}_2$.
5. Établir l'équation donnant les pulsations propres de la bouteille :

$$S_1 \tan\left(\frac{\omega L_1}{c}\right) = S_2 \cot\text{an}\left(\frac{\omega L_2}{c}\right).$$

6. Discuter graphiquement cette équation implicite sur ω. Quelle est l'influence du col sur les fréquences propres ?

Exercice 7 : Distensibilité des artères dans la circulation sanguine

On décrit la machine cardiaque par une pompe (le cœur) alimentant un unique vaisseau sanguin (l'aorte) modélisé par un tube élastique d'axe Ox compris entre $x = 0$ et $x = +\infty$ (Fig. 20). On suppose dans la suite que toutes les grandeurs physiques ne dépendent que de x et du temps. À l'intérieur de ce tube circule le sang, assimilé à un fluide. On note $\rho(x, t) = \rho_0 + \rho_1(x, t)$ la masse volumique de ce fluide, $p(x, t) = p_0 + p_1(x, t)$ la pression et $u(x, t)$ sa vitesse qu'on suppose dirigée selon Ox. Les grandeurs ρ_0 et p_0 correspondent à l'état du fluide au repos. Les effets de la pesanteur sont négligés.

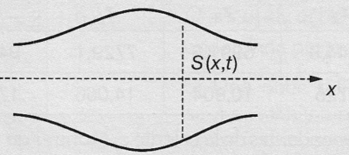


Figure 20

a) Le diamètre de l'aorte vaut $d = 10$ mm et la viscosité cinématique du sang vaut $\nu = 3{,}8.10^{-6}\ \mathrm{m^2.s^{-1}}$. La fréquence cardiaque vaut $f = 1$ Hz. Dans toute la suite, on néglige les effets de viscosité pour étudier la dynamique de la circulation sanguine dans l'aorte. Évaluer un nombre sans dimension permettant de tester cette approximation et conclure. Écrire l'équation d'Euler pour le fluide et la linéariser.

b) Le tube est élastique, de section variable $S(x, t) = S_0 + S_1(x, t)$. Établir l'équation exprimant la conservation de la matière en considérant le système ouvert constitué du fluide compris à chaque instant entre les plans fixes x et $x + \mathrm{d}x$:

$$\frac{\partial(\rho S)}{\partial t} = -\frac{\partial(\rho S u)}{\partial x}.$$

c) Linéariser cette équation. En utilisant le coefficient de compressibilité isentropique du fluide χ et le coefficient de distensibilité du tube $D = (1/S)(\partial S/\partial p)$, obtenir une équation reliant $\partial p_1/\partial t$ et $\partial u/\partial x$.

d) En déduire que $u(x, t)$ est solution d'une équation de d'Alembert avec une célérité $c = 1/\sqrt{\rho_0(\chi + D)}$. La masse volumique du sang et sa compressibilité sont voisines de celles de l'eau. La célérité du son dans l'eau vaut $c_e = 1{,}4.10^3\ \mathrm{m.s^{-1}}$. Déterminer la célérité c_m des ondes dans un tube métallique dont la distensibilité vaut $D_m = 10^{-11}\ \mathrm{Pa^{-1}}$ et sa valeur c_v dans un vaisseau sanguin dont la distensibilité vaut $D_v = 4.10^{-5}\ \mathrm{Pa^{-1}}$.

e) Le cœur impose en $x = 0$ un débit volumique $Q_1(t) = Q_M \cos(\omega t)$ dans l'aorte avec $Q_M = 4{,}5\ \mathrm{L.mn^{-1}}$. En supposant qu'aucune onde ne provient de l'infini, déterminer l'expression de la vitesse $u(x, t)$ et de la surpression $p_1(x, t)$ du fluide dans le domaine $x \geqslant 0$. Calculer l'amplitude p_M de la surpression nécessaire pour assurer ce débit dans l'aorte. Comparer avec le cas d'un tube métallique et commenter.

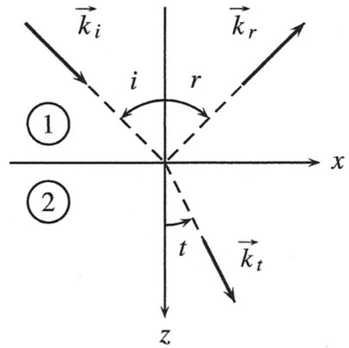
f) Avec l'âge, la distensibilité des vaisseaux diminue (artériosclérose). Quels effets de ce phénomène peut-on prévoir sur l'organisme ? Un moyen de traitement est d'insérer dans l'aorte un ballon très allongé rempli de gaz, le ballon n'obturant l'aorte qu'en partie. Justifier qualitativement ce procédé.

Exercice 8 : Loi de Descartes et acoustique géométrique

Une onde sonore plane arrive avec un angle d'incidence i sur une interface plane séparant deux milieux :

- le 1, où la célérité des ondes est c_1, occupe le demi espace $z < 0$,
- le 2, où la célérité des ondes est n_2, occupe le demi espace $z > 0$.

L'onde sonore incidente donne naissance à une onde transmise et une onde réfléchie à l'interface entre les deux fluides. Les trois vecteurs d'ondes sont coplanaires et compris dans le plan (Oxz).



1. Quels sont les signes des trois angles i, r et t ?

Les surpressions incidente, réfléchie et transmises sont notées :

$$p_i(x,z,t) = p_{0i}\exp\left(j\left(\omega t - \vec{k}_i\cdot\vec{r}\right)\right),\quad p_r(x,z,t) = p_{0r}\exp\left(j\left(\omega t - \vec{k}_r\cdot\vec{r}\right)\right),$$
$$p_t(x,z,t) = p_{0t}\exp\left(j\left(\omega t - \vec{k}_t\cdot\vec{r}\right)\right).$$

2. Développer le produit scalaire $\vec{k}_i\cdot\vec{r}$. Calculer le champ des vitesses associé $\vec{v}_i$.

3. Développer de même les produits scalaires $\vec{k}_r\cdot\vec{r}$ et $\vec{k}_t\cdot\vec{r}$. Ils seront exprimées en fonction de ω, c_1 ou c_2, x et z.

4. Quelle est la condition aux limites sur la surpression à l'interface en $z = 0$? En déduire les lois de Descartes $r = -i$ et $\dfrac{\sin i}{c_1} = \dfrac{\sin t}{c_2}$.

Exercice 9 : Incidence de Brewster (oral Mines Ponts)

Une onde sonore arrive sous incidence oblique sur un dioptre confondu avec le plan $x = 0$ séparant deux fluides (1) et (2) caractérisés par les célérités respectives c_1 ou c_2 et par les impédances acoustiques Z_1 ou Z_2. On cherche s'il est possible qu'une onde plane progressive arrivant sous incidence oblique dans la direction $\vec{u_1}$ ne donne naissance à aucune onde réfléchie. On suppose que l'onde transmise se propage dans la direction $\vec{u_2}$ du plan d'incidence donnée par les lois de Descartes (Fig. 19). On écrit les surpressions dans les deux milieux sous la forme :

$$\underline{p}_1 = \underline{p}_{1M}\exp\left(j\omega t - j\vec{k_1}\cdot\vec{r}\right) \quad \text{et} \quad \underline{p}_2 = \underline{p}_{2M}\exp\left(j\omega t - j\vec{k_2}\cdot\vec{r}\right).$$

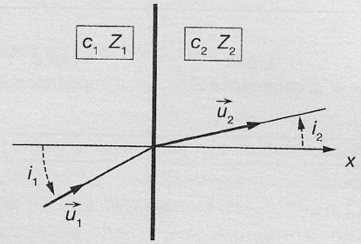


Figure 19

a) Exprimer les champs des vitesses correspondants.

b) Justifier sommairement les conditions aux limites $p_1 = p_2$ et $\vec{v_1}\cdot\vec{u_x} = \vec{v_2}\cdot\vec{u_x}$. En déduire l'expression de $\cos i_2$ en fonction de $\cos i_1$, Z_1 et Z_2.

c) Exprimer par ailleurs $\sin i_2$ en fonction de $\sin i_1$, c_1 et c_2. Conclure.