

Chap 11 : Ondes sonores des les fluides

I. Cadre de l'étude : approximatif acoustique

1° Modèle et cas des perturbations

Onde sonore : Suite de compressions / dilatations du milieu qui se propage de proche en proche et onde mécanique longitudinale

On s'intéresse à l'échelle des chocs :

- choc de pression $P(M, t)$

$$P(M, t) = P_0 + P_1(M, t)$$

pression statique (pression (locale) $\approx 10^5$ Pa
 ≈ 1 bar

- choc de vitesse $\vec{v}(M, t) = \vec{v}_1(M, t) + \vec{v}_0$
($\vec{v}_0$ est le repos)

- choc de masse volumique

$$\rho(M, t) = \rho_0 + \rho_1(M, t) \quad \text{avec } \rho_0 = 1,2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} \text{ (air)}$$

$\hookrightarrow \rho_1$ sans onde, au repos $\rho_1 \approx 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ suite à l'onde sonore

$\rightarrow$ Approx acoustique :

$$P_1(M, t) \ll P_0$$

$$v_1(M, t) \ll c$$

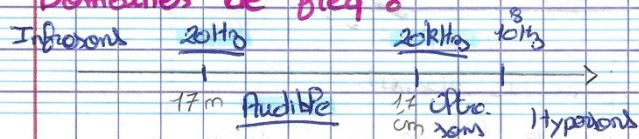
$$\rho_1(M, t) \ll \rho_0$$

$\rightarrow$ célérité des ondes

Autre hypothèse générale :

Fluide parfait $\rightarrow$ aucune dissipation

Domaines de fréq :



$$\lambda_{\text{son}} = \frac{c}{f}$$

2° Linéarisation des eq plates et obtention d'eq couplées

3 inconnues (p, v, ρ) $\rightarrow$ 3 relations nécessaires

$\rightarrow$ PFD relie p et v eq méca

$\rightarrow$ Eq de conservat° de la masse relie ρ et v

$\rightarrow$ Hypothèse thermodynamique : évolution isentropique car transformat° adiab. réversible (fluide parfait)
 $\hookrightarrow$ coeff compressibilité isentropique $\gamma_s = -\frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial p} \right)_s$
relie p à v de p à ρ

a) Eq dynamique : linéarisation du PFD

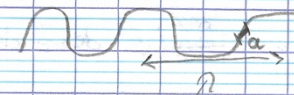
Appliqué à une part de fluide dm :

$$dm \frac{d\vec{v}}{dt} = - \text{grad } P dv$$

$dm = \rho dv$

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = - \text{grad } P$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v}$$



mv périodique

a déplacement de la part de fluide suite au passage de l'onde

Approx acoustique : $\frac{v_1}{c} \ll 1$

$$\text{ORD} : \frac{v_1}{c} \propto \frac{\omega}{c} = kR$$

$$\hookrightarrow \frac{v_1}{c} \propto \frac{\omega}{1} \ll 1$$

$$v_1 = v_0 \cos(\omega t - kx)$$

$$\approx v_0 \cos(\omega t - kx + \epsilon)$$

$\hookrightarrow$ la part de fluide ne se déplace pas

$$v_1 \approx v_0 \text{ car } \text{est}, \quad \frac{\partial v_1}{\partial t} \approx \frac{\partial v_0}{\partial t}$$

Autre approche en OPP:

$$\frac{(\vec{v}_1 \cdot \text{grad}) \vec{v}_1}{\frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t}} \propto \frac{v_1^2 / \lambda}{v_1 / T} = \frac{v_1 T}{\lambda} = \frac{v_1 T}{c T} = \frac{v_1}{c} \ll 1$$

dc $(\vec{v}_1 \cdot \text{grad}) \vec{v}_1$ négligeable, on a petit d'ordre 2 en v_1^2 .

$$\text{dc } \rho \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} \approx \rho_1 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = (\rho_0 + \rho_1) \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} \approx \rho_0 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t}$$

$$\text{grad } P = \text{grad} [P_0 + P_1(t, L)] = \text{grad } P_1$$

→ PFD linéarisé

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = -\text{grad } P_1 \quad (1)$$

Rq: not (1) $\Rightarrow$ not $\vec{v}_1 = \vec{0}$
écoulem^t irrotationnel

b) Linéarisat^o de l'éq de conservat^o de la masse

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_0 + \rho_1(t, L)) + \text{div}(\rho_0 + \rho_1) \vec{v}_1 = 0$$

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \text{div}(\rho_0 \vec{v}_1) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \text{div} \vec{v}_1 = 0 \quad (2)$$

c) Transform^o thermodyn^o linéarisat^o de la relat^o
entropique id ρ et P

$$\chi_s = - \frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial P} \right)_s \quad \text{or } m = \rho v \Rightarrow P_m = P_0 \rho + P_0 v$$

$$\frac{dm}{m} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dv}{v}, \quad m \text{ ale} \Rightarrow dm = 0$$

$$\chi_s = - \left(\frac{1}{v} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial P} \right)_s$$

$$\frac{dv}{v} = - \frac{dP}{P} \quad \text{dc } \chi_s = \frac{1}{P} \left(\frac{\partial P}{\partial P} \right)_s$$

$$\partial P = P_1 \quad (= \rho_1 + \rho_0 \cdot \rho_0) \quad \text{au repos}$$

$$\chi_s = \frac{1}{P} \frac{P_1}{P_1} = \frac{1}{\rho_0 P_1} \frac{P_1}{P_1} \approx \frac{1}{\rho_0} \frac{P_1}{P_1} = \chi_s$$

ρ_1 et P_1 % suite à la compress^o

$$\rho_1 = \chi_s \rho_0 P_1 \quad (3)$$

$$(2) + (3) \Rightarrow \chi_s \frac{\partial P_1}{\partial t} + \text{div} \vec{v}_1 = 0 \quad (4)$$

II. Equat^o de propagat^o et solut^o en OPP

1^o Obtent^o de l'éq de d'Alembert

On choisit de l'établir m P_1

$$\text{div} (1) \Rightarrow \rho_0 \frac{\partial}{\partial t} (\text{div} \vec{v}_1) = -\text{div} (\text{grad } P_1)$$

$$(4) \Rightarrow \rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(-\chi_s \frac{\partial P_1}{\partial t} \right) = -\Delta P_1$$

$$\Delta P_1 - \rho_0 \chi_s \frac{\partial^2 P_1}{\partial t^2} = 0$$

Si onde unidimensionnelle selon x :

$$\Delta P_1 = \frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2}$$

1D x :

$$\Delta P_1 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 P_1}{\partial t^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 P_1}{\partial t^2} = 0$$

$$c^2 = \frac{1}{\rho \chi_s}$$

$$\text{et } \Delta \vec{v}_1 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{v}_1}{\partial t^2} = \vec{0}$$

2° Célérité de l'onde

• Célérité du son de l'eau :

$$\chi_s = 5 \cdot 10^{10} \text{ Pa}^{-1} \quad \rho_0 = 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} \quad \rightarrow c_{\text{eau}} = 1400 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

• Célérité du son de l'air :

$$\text{GP} : P_0 V = n R T_0 = \frac{m}{M} R T_0$$

$$\Leftrightarrow \rho_0 = \frac{m}{V} = \frac{M P_0}{R T_0}$$

→ Transfo isentropique du GP :

$$\text{loi de Laplace} \quad p v^\gamma = \text{cte}$$

$$(m = \rho V) \quad p \rho^{-\gamma} = \text{cte}$$

$$p \rho^{-\gamma} = \text{cte}$$

$$\frac{dp}{p} = -\gamma \frac{d\rho}{\rho} \Rightarrow \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right) = -\frac{1}{\gamma p}$$

$$\chi_s = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_s = \frac{1}{\gamma p} = \frac{1}{\gamma P_0}$$

$$c = \sqrt{\frac{1}{\rho \chi_s}} = \sqrt{\frac{\gamma R T_0 P_0}{M P_0}} = \sqrt{\frac{\gamma R T_0}{M}} = c$$

Vit son de l'air dep que de T.

$$\left. \begin{array}{l} T_0 = 293 \text{ K (à } 20^\circ \text{C)} \\ \gamma = 1,4 \end{array} \right\} c_{\text{air}} = 343 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$M = 29 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$$

$$R_g : \text{à } 0^\circ \text{C} \rightarrow c_{\text{air}} = 331 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

• Newton hypoth pose d'éval $c_{\text{air}} = 290 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

↳ 3 baillé variat° de T

Fluide incompressible : si $(\frac{\rho}{\rho_0})^c = \rho_0^c \ll 1$, ρ_0 nb Mach = $\frac{v}{c}$

3° Solut° en OPPH

a) Structure générale des OPPH

à 1D en $\cos(\omega t - kx)$ à 3D $\cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})$

• Opérateur grad en notat° complexe :

Unidimensionnelle selon $(\text{Ox})^T$

↳ onde $p_1 = A e^{j(\omega t - kx)}$

$$\text{grad } p_1 = \frac{\partial p_1}{\partial x} \vec{e}_x = -j k \vec{e}_x p_1 = -j \vec{k} p_1$$

Opérateur grad eqv $\times -j \vec{k}$

Voici à 3D avec $p_1 = A e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$

• Onde Pongitudinale :

$$\text{①} \Rightarrow \rho_0 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = -\text{grad } p_1 \Leftrightarrow \rho_0 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = j \vec{k} p_1$$

$\vec{v}_1$ col à $\vec{k}$

↳ onde Pongitudinale (déplacement selon $\vec{k}$)

• Trés chers χ et P

$$\rho_0 \omega \vec{v}_1 = j \vec{k} p_1 \Leftrightarrow p_1 = \rho_0 \frac{\omega}{k} \vec{v}_1 = \rho_0 c \vec{v}_1$$

dc p_1 et $\vec{v}_1$ en phase

4° Impédance acoustique de l'air

$$Z_c = \frac{p_1}{\vec{v}_1} \left(\begin{array}{l} \text{cause} \\ \text{effet} \end{array} \right) = \rho_0 c \text{ m Proprié selon } + \text{Ox}$$

$$Z_c = -\rho_0 c \text{ (kg} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}) - \text{Ox}$$

$$Z_{\text{on}} \ll Z_{\text{air}} < Z_{\text{solide}}$$

410 14140

Complément : étudier Z_c avec des OPP

$$p_1(x, t) = p_1(t - \frac{x}{c}) = p_1(\theta)$$

$$v_1(x, t) = v_1(t - \frac{x}{c}) = v_1(\theta), \quad \theta = t - \frac{x}{c}$$

PFD : $\rho_0 \frac{\partial v_1}{\partial t} = - \frac{\partial p_1}{\partial x}$

$$\frac{\partial p_1}{\partial \theta} = \frac{dp_1}{d\theta} \frac{d\theta}{dx} = \frac{dp_1}{d\theta} \left(-\frac{1}{c} \right) = -\frac{dp_1}{d\theta} \frac{1}{c}$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial \theta} = \frac{dv_1}{d\theta} \frac{d\theta}{dx} = \frac{dv_1}{d\theta}$$

$$\rho_0 \frac{dv_1}{d\theta} = \frac{dp_1}{d\theta} \times \frac{1}{c} \Leftrightarrow \rho_0 c \frac{dv_1}{d\theta} = \frac{dp_1}{d\theta}$$

intégrat° $\hookrightarrow \rho_0 c v_1 = p_1 + \text{cte} = 0 \text{ car propagat°}$

$$Z_c = \frac{p_1}{v_1} = \rho_0 c$$

Rq : impédance généralisée intégrant la sect° S

$$Z_c = \frac{\text{press}^\circ}{\text{débit volq}} = \frac{p}{vS}$$

III. Aspects énergétiques

1° Vecteur densité de courant énergétique

o Bilan d'énrg et énergies volq

-> Analyse dimensionnelle :

Flux d'énrg = $J_0 \cdot s^{-1} = W \Rightarrow$ Puissance

Vect densité de courant énergétiq

$$[\pi] = W m^{-2} \Rightarrow \text{puissance surfacique}$$

②
énergétique

En méca $\Rightarrow [puissance] = [FV]$

$$W m^{-2} = [p_1 v_1]$$

$$\vec{\pi} = p_1 \vec{v}_1 \quad \text{densité de courant énergétique}$$

-> Bilan énergétique (flux d'énrg)

$$\text{div } \vec{j} = \text{div } \vec{\pi}$$

Résultat attendu : $\frac{\partial u_{ac}}{\partial t} + \text{div } \vec{\pi} = 0$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \text{div } \vec{j} = 0$$

vect
courant

conservé
vis volq

vecteur
courant

vis l'énergie
moyenne vol

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{\pi} &= \text{div} (p_1 \vec{v}_1) = p_1 \text{div } \vec{v}_1 + \text{grad } p_1 \cdot \vec{v}_1 \\ &= \chi_s p_1 \frac{\partial v_1}{\partial t} - \rho_0 \frac{\partial v_1}{\partial t} \cdot \vec{v}_1 = - \frac{\partial}{\partial t} \left[\chi_s \frac{p_1^2}{2} + \rho_0 \frac{v_1^2}{2} \right] \end{aligned}$$

$$\frac{\partial u_{ac}}{\partial t} + \text{div } \vec{\pi} = 0 \Leftrightarrow u_{ac} = \underbrace{\rho_0 \frac{v_1^2}{2}}_{\text{énrg cinétique volq}} + \underbrace{\frac{1}{2} \chi_s p_1^2}_{\text{énrg potentielle volq de compress° (dép = -SW \Rightarrow p dV)}}$$

$$\text{div} (c \vec{B}) = c \text{div } \vec{B} + \text{grad } c \cdot \vec{B}$$

-> Puiss acoustique moyennée à travers une surf S

$$P_{ac} = \iint_S \vec{\pi} \cdot d\vec{S} = \iint_S p_1 v_1 \cdot d\vec{S}$$

o Bilan énergétique p un vol donnée :

$$\frac{dE_{ac}}{dt} + P_{rayonnée} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left[\iint_V u_{ac} \cdot dv \right] + \iint_S \vec{\pi} \cdot d\vec{S} = 0$$

méd vol

forme
intégrale

2° - Intensité sonore et niveau sonore

° Intensité sonore :

$$I = \langle p_1 v_1 \rangle = \langle \|\vec{\pi}\| \rangle \quad \text{W.m}^{-2} \quad \text{puissance surfacique}$$

° Niveau sonore en dB :

$$I_{dB} = 10 \log \frac{I}{I_{ref}}, \quad I_{ref} = 10^{-12} \text{ W.m}^{-2} \quad \text{seuil d'audibilité (à 1 kHz)}$$

0 dB $\Rightarrow I = \text{seuil}$

60 dB $\Rightarrow$ conversation

120 dB $\Rightarrow$ à 20 m d'un avion

$I = 1 \text{ W.m}^{-2} \Rightarrow I_{dB} = 120 \text{ dB}$

3° - Applicat° au cas d'une OPPH

° Equipartit° de l'énergie :

$$e_{gv} = \frac{1}{2} \rho_0 v_1^2$$

$$e_{pv} = \frac{1}{2} \chi_s p_1^2 \quad \text{avec } p_1 = Z_0 v_1 = \rho_0 c v_1$$

$$= \frac{1}{2} \chi_s \rho_0^2 c^2 v_1^2 = \frac{1}{2} \rho_0 v_1^2$$

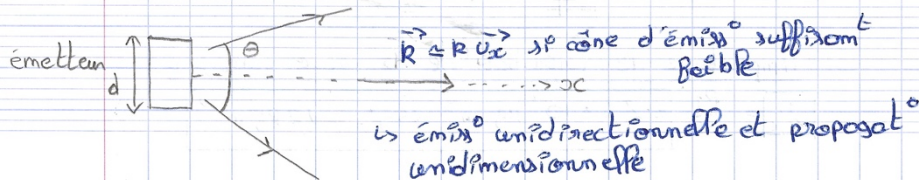
$e_v = e_{pv}$ equipartit° de l'énergie (VT)

$u_{ac} = \rho_0 v_1^2$ par cycle

Vect densité de courant $\vec{\pi} = p_1 \vec{v}_1 = \rho_0 c v_1^2 \vec{e}_x$

$\vec{\pi} = u_{ac} \vec{e}_x$, $\vec{e}_x$ vit propagat° de l'onde

4° - Validité de l'OPPH unidimensionnelle



$\sin \theta = \frac{\lambda}{d} \rightarrow$ Théorie de la diffraction

$\sin \theta \approx \theta = \frac{\lambda}{d} \ll 1$

$\hookrightarrow d \gg \lambda$ Limite de l'optique en RCSI

° sonore $\rightarrow \lambda = 1.7 \text{ cm}$

° son grave ($\lambda = \frac{c}{f}$) $\lambda = 17 \text{ cm}$

$\Rightarrow$ approx valide

5° Retour sur les ODE de l'approx acoustique (m P'OPPH)

On considère un n sonore élevé $I_{dB} = 120 \text{ dB}$

$I = \langle p_1 v_1 \rangle = 1 \text{ W.m}^{-2}$

$\rho_0 = \frac{\pi P_0}{RT_0} = 1.19 \text{ kg.m}^{-3}$ $T_0 = 20^\circ \text{C}$, $P_0 = 1 \text{ bar}$

$c_0 = \sqrt{\frac{\gamma RT_0}{M}} = 343 \text{ m.s}^{-1}$

Tous les grandeurs st en phase

$p_1(x,t) = P_1 \cos(\omega t - kx)$

$v_1(x,t) = v_1 \cos(\omega t - kx)$

$\rho_1(x,t) = \rho_0 p_1 = \frac{P_1^2}{c^2}$

avec S_1 le déplacement suite au passage de l'onde, $v_1 = \frac{dS_1}{dt}$

et $T(x,t) = T_0 + T_1(x,t)$

° Amplitude de vitesse :

$I = \langle p_1 v_1 \rangle = \langle Z_0 v_1^2 \rangle = \rho_0 c \langle v_1^2 \rangle = \rho_0 c \frac{v_1^2}{2}$

$\hookrightarrow v_1 = \sqrt{\frac{2I}{\rho_0 c}} = 7 \text{ cm.s}^{-1}$ $\ll c = 343 \text{ m.s}^{-1}$

° Amplitude de surpression :

$p_1 = \rho_0 c v_1 \Rightarrow p_1 = \rho_0 c v_1 = 29 \text{ Pa}$ $\ll P_0 = 10^5 \text{ Pa}$

° Amplitude de perturbat° de la masse volu :

$\rho_1 = \frac{P_1}{c^2} = 2.4 \times 10^{-4} \text{ kg.m}^{-3} \ll \rho_0 = 1.2 \text{ kg.m}^{-3}$

• Amplitude du déplacement :

$$\frac{\partial S_1}{\partial t} = v_1 \Rightarrow \omega S_1 = v_1 \rightarrow S_1 = \frac{v_1}{2\pi B}$$

Δ dep de β
 $B = 1 \text{ kHz}$

$$S_1 = 11 \mu\text{m}$$

$$\lambda = \frac{c}{B} = 34 \text{ cm}$$

$$\Rightarrow S_1 \ll \lambda$$

• Amplitude de la perturbat° de T :

Transfo isentropique $PV^\gamma = \text{cte} \Rightarrow TP^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = \text{cte}$

L> dérivée log : $\frac{dT}{T} + \frac{1-\gamma}{\gamma} \frac{dP}{P} = 0$

$$dT = \frac{\gamma-1}{\gamma} T \frac{dP}{P}$$

$$\Rightarrow T_1 \approx \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{T_0}{P_0} P_1$$

AN $T_1 = 0,024 \text{ K} \rightarrow$ F bien une var de T

$$T_1 \ll T_0 = 293 \text{ K}$$

Rq° : $u_\infty = \mu_0 v_1^2 \approx \frac{1}{200} \text{ J} \cdot \text{m}^{-3}$
(densité d'énj magn)

6° Retour sur le modèle de l'écoulement parfait

a) Effet mécanique de la viscosité

$$\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{v}_1}{\partial t^2} = -\text{grad } P_1 + \eta \Delta \vec{v}_1$$

En ODG° : $\left| \frac{\eta \Delta \vec{v}_1}{\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{v}_1}{\partial t^2}} \right| = \frac{\eta}{\mu_0} \frac{\frac{v_1}{r^2}}{\frac{v_1}{T}} = \frac{\eta}{\mu_0} \frac{T}{c^2 T^2}$

dist caract. d'une onde $\rightarrow \lambda$

tps caract. d'une onde $\rightarrow T$ $= \frac{\eta}{\mu_0} \frac{B}{c^2} \ll 1$

Variable μ_0 β suffisamment faible

AN° : $B = 20 \text{ kHz}$ avec $\frac{\eta}{\mu_0} \approx 10^{-5} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$, $c = 340 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

$$\frac{\eta}{\mu_0} \frac{B}{c^2} = 10^{-5} \frac{2 \cdot 10^4}{(3 \cdot 10^1)^2} \approx 2 \cdot 10^{-6} \ll 1$$

b) Effet de la diffus° thermique

1^{er} principe $\Rightarrow dU = \delta Q + \delta W$
 $dU = \mu_c dV \frac{\partial T}{\partial t} dt$
 $\delta Q = \lambda \Delta T dV dt$

Eq de diff thermique $\Rightarrow dU = \delta Q$

L> $\mu_c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \Delta T \Rightarrow D_{\text{th}} \Delta T = \frac{\partial T}{\partial t}$ avec $D_{\text{th}} = \frac{\lambda}{\mu_c}$

Temp typique Θ : $\left| \frac{\delta Q}{dU} \right| \propto \left| \frac{\lambda \Delta T}{\mu_c \frac{\partial T}{\partial t}} \right| \propto D_{\text{th}} \frac{\Theta/r^2}{\Theta/T} = D_{\text{th}} \frac{T}{\lambda^2} = \frac{D_{\text{th}}}{c^2} B \ll 1$
variable si β q suffisamment faible

$D_{\text{th}}(\text{air}) = 10^{-5} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1} \Rightarrow \frac{D_{\text{th}}}{c^2} B = \frac{10^{-5}}{10^5} \times 2 \cdot 10^4 = 2 \cdot 10^{-6} \ll 1$

IV. Onde sonore sphérique

1° Express° générale de la solution en onde sphérique de l'eq de d'Alembert

Emetteur ponctuel



Onde sphérique : s'il y a un pt O / onde en M ne dep que de $r = OM$ $s(s,t)$

Surfaces d'ondes $\Rightarrow$ sphères de centre O et de rayon r
 $\hookrightarrow r = \text{cte}$ de l'onde y est identique en tt pt

• Forme générale des sol de Preq de d'Alembert
 $\Delta s - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0$ (d'Alembert à 3D)

En coord sphériques : $\Delta s = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial s}{\partial r})$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial s}{\partial r}) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial^2 (rs)}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 (rs)}{\partial t^2} = 0$$

Sol de la forme $s(r,t) = f(t - \frac{r}{c}) + g(t + \frac{r}{c})$

$$s(r,t) = \frac{f(t - \frac{r}{c})}{r} + \frac{g(t + \frac{r}{c})}{r}$$

propagat° selon r
 "s'éloigne de 0"

prop° selon r

onde sphérique convergente

onde sphérique divergente

Rq° : Par des ondes vectorielles ce dernier résultat n'est pas exploitable

2° - Cas de l'onde sphérique divergente harmonique

$$p_1(r,t) = \frac{A}{r} \cos(\omega t - kr)$$

$$p_1(r,t) = \frac{A}{r} e^{j(\omega t - kr)}$$

⚠ $\vec{v}_1(r,t)$ chp vectoriel / $\vec{v}_1(r,t) = v_1(r,t) \vec{e}_r$

Mais $\Delta \vec{v} \cdot \vec{e}_r \neq \Delta v_1$ on ne peut pas appliquer la forme générale de la sol. Mais on en déduit $\vec{v}_1$ par

$$\mu_0 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = -\vec{\text{grad}} p_1 \text{ en coord sph} \Rightarrow \vec{\text{grad}} p_1 = \frac{\partial p_1}{\partial r} \vec{e}_r$$

$$\mu_0 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = \frac{\partial p_1}{\partial r} \vec{e}_r \Rightarrow \vec{v}_1 \text{ selon } \vec{e}_r, \text{ onde longitudinale}$$

$$\vec{v}_1 = \mu_0 \sin \vec{v}_1 = -A c e^{j(\omega t - kr)} \left[+ \frac{1}{r^2} - \frac{j k}{r} \right]$$

$$v_1 = \frac{A}{\mu_0 \omega r} (-j) e^{j(\omega t - kr)} \left[\frac{1}{r} + j k \right]$$

$$v_1 = \frac{A}{\mu_0 \omega r} e^{j(\omega t - kr)} \left[k - \frac{j}{r} \right] e^{-j \frac{\pi}{2}}$$

$$v_1(r,t) = \frac{A}{\mu_0 \omega r} \left[k \cos(\omega t - kr) + \frac{1}{r} \cos(\omega t - kr - \frac{\pi}{2}) \right]$$

$$v_1(r,t) = \frac{A}{\mu_0 \omega r} \left[k \cos(\omega t - kr) + \frac{1}{r} \sin(\omega t - kr) \right]$$

en $\frac{1}{r}$, en phase avec p_1

en $\frac{1}{r^2}$, déphasé $\pi/2$ à p_1 en quadrature

3° - Puissance rayonnée : "atténuat° géométrique"

$$I = \langle \vec{\Pi} \rangle = \langle p_1 v_1 \rangle$$

$$P = \oint_S \langle \vec{\Pi} \cdot d\vec{S} \rangle$$

$$\vec{\Pi} = p_1 v_1 \vec{e}_r, d\vec{S} = dS \vec{e}_r$$

$$P = \oint_S \langle p_1 v_1 \rangle dS$$

on v_1 et p_1 en quadrature

$$\langle p_1 v_1 \rangle = \frac{1}{2} \langle \cos^2(\omega t - kr) + \cos(\omega t - kr) \sin(\omega t - kr) \rangle$$

$$\langle p_1 v_1 \rangle = \frac{A^2}{\mu_0 \omega r^2} \left[\frac{r}{2} \right] = \frac{A^2}{2 \mu_0 c r^2}$$

$$P = \oint_S \frac{A^2}{2 \mu_0 c r^2} \times dS = \frac{A^2}{2 \mu_0 c r^2} \times 4 \pi r^2 = \frac{2 A^2 \pi}{\mu_0 c} = \text{cte}$$

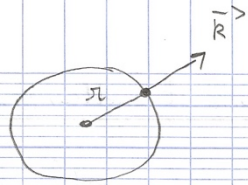
Puis cte car flux conservatif.

Puis se répartie sur des sphères sur des sphères de rayon r , p_1 demeure cte i.e. $\frac{1}{r^2} \rightarrow I \times S = \text{cte}$

L'intensité sonore diminue avec la dist° à l'émetteur ponctuel en $\frac{1}{r^2} \Rightarrow$ c'est l'atténuat° géométrique ou dilut° (sans pertes réfléch)

4° - Structure de l'onde sphérique en chp
 Partant d'approx de l'onde plane





App pointain $r \gg \lambda$
 $\frac{1}{\lambda} \ll \frac{1}{r} \ll k$

$$r_1(r, t) = \frac{A}{r_0 \omega r} [R \cos(\omega t - kr) + \frac{1}{\lambda} \sin(\omega t - kr)]$$

négligeable

$$r_1(r, t) = \frac{A}{r_0 c} \cos(\omega t - kr) = \frac{p_1(r, t)}{r_0 c}$$

$$\frac{p_1}{r_1} = r_0 c = Z_c$$

On retrouve P_a relat° d'une app.

Localem^t, les fronts d'onde ressemblent à des droites

$$p_1(r, t) \approx \frac{A}{r_0} \cos(\omega t - kr)$$

↳ voit peu

On peut approximer localem^t l'onde sph en app

II. Décalage de freq par effet Doppler

Effet Doppler : $\exists$ (v) le type d'ondes lorsqu'il y a variat° de la dist émetteur E et récepteur R.

La freq d'une onde dep du référentiel $\Rightarrow$ elle n'est pas la m[^]me des ref de P'E et du R en mvlt relatifs.

On def R le ref privilégié du lequel l'onde se propage à la vitesse c .

1° 1^{ère} approche de l'effet Doppler longitudinal

Exple du radar routier.

On raisonne sur un signal émis impulsif émis à

$t=0$ puis à $T, 2T, \dots$

Déplacem^t à v est

a) Récepteur R mobile et émetteur fixe E

• Emission à $t=0$ du bip par E, récept° à t_1 par lequel la dist $\frac{E}{R} \Rightarrow d = ct_1 \Rightarrow t_1 = \frac{d}{c}$

• Emiss° du 2^e bip à $t=T$, récept° à t_2
avec $\frac{E}{R} = d - v(t_2 - t_1) \Rightarrow t_2 = T + \frac{d - v(t_2 - t_1)}{c}$

$$t_2 = T + t_1 - \frac{v(t_2 - t_1)}{c} = T + t_1 - \frac{vT'}{c}$$

$$t_2 - t_1 = T' = T - \frac{vT'}{c}$$

$$T'(1 + \frac{v}{c}) = T \Leftrightarrow \frac{B'}{1 + \frac{v}{c}} = B$$

$$\Leftrightarrow B' = B(1 + \frac{v}{c})$$

Si $v > 0$, véhicule se rapproche de P'E $\rightarrow B' > B$
Si $v < 0$, s'éloigne $\rightarrow B' < B$

b) Cas d'un émetteur E mobile et récepteur R fixe

• Emission à $t=0$ avec dist $\frac{E}{R} \Rightarrow d$, par le véhicule récept° à t_1 par le radar $t_1 = \frac{d}{c}$

• Emiss° du 2^e bip à $t=T'$ avec une dist $\frac{E}{R} = d - vT'$
récept° par le radar à $t_2 = T' + \frac{d - vT'}{c}$

$$t_2 = T' + t_1 - \frac{vT'}{c} \Leftrightarrow t_2 - t_1 = T'' = T'(1 - \frac{v}{c})$$

$$\Leftrightarrow B'' = \frac{B'}{1 - \frac{v}{c}}$$

- si $v > 0 \rightarrow$ véhicule se rapproche $B' > B$
- si $v < 0 \rightarrow$ s'éloigne $B' < B$

c) Approche aux faibles vitesses $v \ll c$

Les 2 cas précédents donne des relations $\neq$.

Il $\exists$ un ref privilégié, l'effet Doppler ne dépend que de la vit relative.

Mais pr $\frac{v}{c} \ll 1$

$$B' = \frac{B}{1 - \frac{v}{c}} \approx B' (1 + \frac{v}{c}) \quad \text{à l'ordre 1}$$

à comparer à $B' = B (1 + \frac{v}{c})$

Effet Doppler ΔB en de B :

$$\frac{\Delta B}{B} = \frac{v}{c}$$

d) Effet Doppler double : double d_0 de freq

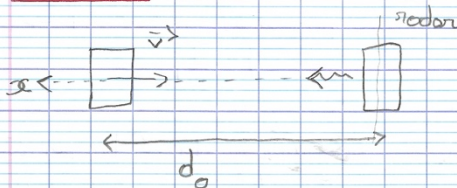
$$B_{\text{reçue par le radar fixe}} = B_{\text{émise par E mobile}} (1 + \frac{v}{c})$$

$$\text{avec } B_{\text{émise par voiture}} = B_{\text{émise par radar fixe}} = B / (1 - \frac{v}{c})$$

$$B_{\text{reçue radar}} = B \frac{(1 + \frac{v}{c})}{1 - \frac{v}{c}} = B (1 + \frac{v}{c}) (1 + \frac{v}{c}) \approx B (1 + \frac{2v}{c})$$

à l'ordre 1

Complém^t : Approche ondulatoire de l'effet Doppler double



Le radar émet une OPPH

$$s(x,t) = A \cos(\omega t - kx)$$

• si radar et voiture immobiles on réfléchit l'onde reçue à la m^{ème} freq mais avec un déphasage $\phi_0 = -R \times 2d_0 = -2 \frac{\omega}{c} d_0 = -\frac{4\pi B}{c} d_0$

• si véhicule mobile à v , d_0 évolue avec le tps (1)

$$d(t) = d_0 - vt$$

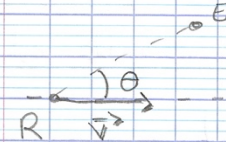
$$\phi(t) = -R \times 2(d_0 - vt) = \phi_0 + 2kvt = \phi_0 + \frac{4\pi B}{c} vt$$

onde reçue $s(x,t) \propto \cos(\omega t - \phi(t))$

$$s(x,t) \propto \cos(2\pi Bt + \phi_0 + \frac{4\pi B}{c} vt) \propto \cos(2\pi B(1 + \frac{2v}{c})t + \phi_0)$$

$$B' = B(1 + \frac{2v}{c})$$

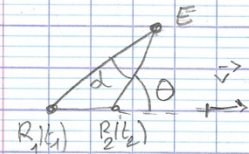
2^o - Cas où $\vec{v}$ et $\vec{RE}$ forment un angle



Rq^o en méca classique, l'ps d'effet Doppler transversal $\Rightarrow \vec{v} \perp \vec{RE}$ ps de décalage de freq

Hypoth^o dist parcourue par le récepteur mobile est très inférieure à RE la dist E/R

$$\alpha \ll \theta; \text{ dist parcourue } R_1, R_2 \ll ER$$

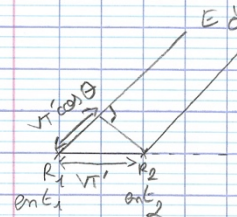


• Emission du 1^{er} bip à $t=0$ par E

Reçu par R à t_1 (en R_1) avec une dist

d à pr^o parcourue notée $d \rightarrow$ dist E/R

$$d = ct_1$$



• Emission du 2^e bip par E à $t=T$

Recept^o à t_2 , entre t_1 et t_2 le récepteur

s'est déplacé de $d - vT' \cos \theta$

(rapproché de E)

$$t_2 = T + \frac{d - vT' \cos \theta}{c} = T + t_1 - \frac{vT' \cos \theta}{c}$$

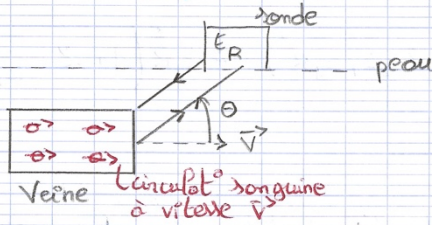
$$t_2 - t_1 = T' = T - vT' \frac{\cos \theta}{c} \Leftrightarrow T' \left(1 + \frac{v \cos \theta}{c} \right) = T$$

$$B' = B \left(1 + \frac{v \cos \theta}{c} \right)$$

1^{er} type de raisonnement : si E mobile et R fixe :

$$B'' = \frac{B'}{1 - \frac{v \cos \theta}{c}}$$

Exemple : Echographie Doppler

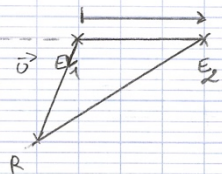


Effet Doppler double, $B'' = \frac{B(1 + \frac{v \cos \theta}{c})}{1 - \frac{v \cos \theta}{c}} \approx B \left(1 + \frac{2v \cos \theta}{c} \right)$

⚠ En le manipulateur, trouver un angle $\neq \frac{\pi}{2}$ relativement facile

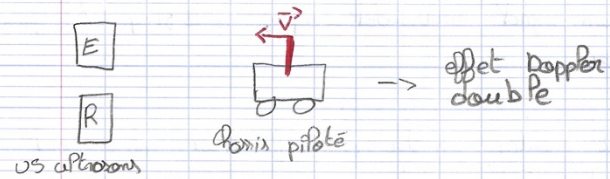
2^e approche calculatoire :

DB le cas E mobile et R fixe.



$\vec{v}$ repère la direct^{on} ER, $\vec{v} = \frac{\vec{E_1 R}}{E_1 R}$

3^e Détect^{ion} synchrone et mesure d'effet Doppler

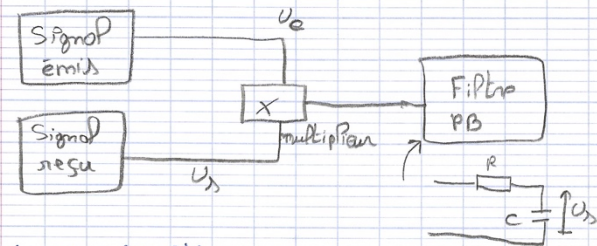


avec $B_{emis} = 40 \text{ kHz}$, $v = 10 \text{ cm.s}^{-1}$ pour le véhicule

$$B_{reçu} = B_{emis} \left(1 + \frac{2v}{c} \right)$$

$$\Delta B = B_{reçu} - B_{emis} = 2B \frac{v}{c} \Leftrightarrow \frac{\Delta B}{B} = \frac{2v}{c} = \frac{2 \times 10^{-1}}{340} \approx 10^{-3} \approx 0.1\%$$

La valeur relative est faible, il faut une technique spéciale
la détect^{ion} synchrone.



$$U_e = U_e \cos(2\pi f t)$$

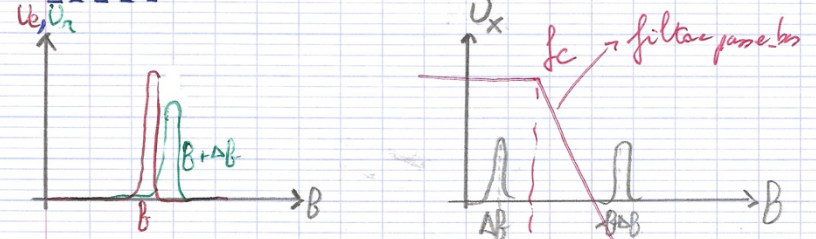
$$U_r = U_r \cos(2\pi(f + \Delta f)t + \varphi)$$

Le multiplieur présente un gain K,

$$U_x = K \left(\frac{1}{2} U_e U_r \cos(2\pi f t) \cos(2\pi(f + \Delta f)t + \varphi) \right)$$

$$= \frac{K U_e U_r}{2} \left(\cos[2\pi(f + \Delta f)t + \varphi] + \cos(2\pi f t - \varphi) \right)$$

Spektr^{um} :



On choisit $\Delta f < f_c < \Delta f$

Après le PB, $U_s = k U_e \cos(2\pi f_B t - \varphi)$

On récupère un signal sinusoïdal unique à la freq Δf qu'on veut mesurer.

Rq: On peut ajouter un bloc amplificateur entre signal reçu et x