Chap 12 : Ondes électromagnétiques ds le vide

I. Eq de propagat° des chps ds le vide : "en dehors des sources"

1° - Eq de Max ds le vide

Vide de charges et de courants : $\rho = 0$ et $\vec{j} = \vec{0}$

$\text{div}\,\vec{E} = 0$ | $\text{div}\,\vec{B} = 0$

$\vec{\text{rot}}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ | $\vec{\text{rot}}\,\vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

couplage entre $\vec{E}$ et $\vec{B}$

2° - Eq de propagat° de $\vec{E}$ et de $\vec{B}$

$$\boxed{\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}}\,\vec{A}) = \vec{\text{grad}}(\text{div}\,\vec{A}) - \Delta\vec{A}}$$

$\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}}\,\vec{E}) = \vec{\text{grad}}(\underbrace{\text{div}\,\vec{E}}_{=0}) - \Delta\vec{E} = -\Delta\vec{E}$

D'autre part, $\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}}\,\vec{E}) = -\vec{\text{rot}}\left(\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) \underset{MF}{=} -\dfrac{\partial}{\partial t}(\vec{\text{rot}}\,\vec{B})$

$\underset{MA}{=} -\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)$

$\Delta\vec{E} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \iff \boxed{\Delta\vec{E} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}}$ Eq d'Alembert Vect

⚠ La vit de propagat° est c, invariante par chgt de référentiel

3° - Sol générale en OPP et OPPH

OPP : $\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}\left(t - \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{r}}{c}\right)$ — direct° de propagat°

OPPH : $\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E_0}\cos\left(\omega t - \dfrac{\vec{k}\cdot\vec{r}}{c}\right)$, $\vec{k} = k\vec{u} = \dfrac{\omega}{c}\vec{u}$

$\underline{\vec{E}}(\vec{r},t) = \underline{\vec{E_0}}\,e^{j(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}$, svt on prendra $\vec{k} = k\vec{u_3}$

4° - Structure des sol en OPP/OPPH

Résultats démontrés pr les OPPH mais généralisables aux OPP.

a) Notat° complexe et opérateurs différentiels

Convention : $e^{j(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}$

$\dfrac{\partial}{\partial t} \iff \times j\omega$ | $\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} \iff -\omega^2$

$\vec{\text{grad}}\,A \iff -j\vec{k}A$ | $\text{div}\,\vec{A} \iff -j\vec{k}\cdot\vec{A}$

$\vec{\text{rot}}\,\vec{A} \iff -j\vec{k}\wedge\vec{A}$

$\Delta A \iff -k^2 A$ Vrai que pr ondes planes progressives

b) Ondes transverses et relat° de couplage entre $\vec{E}$ et $\vec{B}$

- $\text{div}\,\vec{E} = 0 \iff -j\vec{k}\cdot\vec{E} = 0$ dc $\vec{E} \perp \vec{k}$ → transverse
- $\text{div}\,\vec{B} = 0 \iff -j\vec{k}\cdot\vec{B} = 0$, $\vec{B} \perp \vec{k}$ → transverse
- $\vec{\text{rot}}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} \iff -j\vec{k}\wedge\vec{E} = j\omega\vec{B} \iff \vec{B} = \dfrac{\vec{k}\wedge\vec{E}}{\omega} = \dfrac{\vec{u}\wedge\vec{E}}{c}$

avec $\vec{u}$ vect unitaire de la direct° de prop.

$(\vec{k},\vec{E},\vec{B})$ forment un trièdre direct

Rq : $\boxed{\left|\dfrac{\vec{E}}{\vec{B}}\right| = c}$

- Act° OPPH sur une charge ponctuelle q

$\left|\dfrac{F_{mag}}{F_{elec}}\right| = \dfrac{qvB}{qE} = \dfrac{v}{c}$

Déplacemt non relativiste ⇒ $\dfrac{v}{c} \ll 1$

$F_{Lorentz} \approx F_{elec}$ seulemt

c) Relat° de dispersion

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \quad -k^2\vec{E} + \frac{\omega^2}{c^2}\vec{E} = \vec{0} \quad , \quad k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \Rightarrow k = \frac{\omega}{c} \in \mathbb{R}$$

Reportons ds les eq de Maxwell :

- $\vec{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow -j\vec{k}\wedge\vec{E} = -j\omega\vec{B}$

  $\vec{k}\wedge\vec{E} = \omega\vec{B}$
- $\vec{rot}\,\vec{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow -j\vec{k}\wedge\vec{B} = \frac{j\omega}{c^2}\vec{E}$

  $\vec{k}\wedge\vec{B} = -\frac{\omega}{c^2}\vec{E}$

$$\underbrace{\vec{k}\wedge(\vec{k}\wedge\vec{E})}_{-k^2\vec{E}} = \omega(\vec{k}\wedge\vec{B}) = -\frac{\omega^2}{c^2}\vec{E} \Rightarrow k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \Rightarrow k = \frac{\omega}{c}$$

Rq : vitesse de phase ds le vide : $v_\varphi = \frac{\omega}{k} = c$

Onde nn dispersive car $v_\varphi = cste = c$

5°- Ordres de grandeurs / domaines électromagnétiques

Voir doc

II. Aspects énergétiques

1°- Energies volumiques ou densité d'énergie

$$\boxed{u_{em} = \varepsilon_0\frac{E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}}$$

($J.m^{-3}$)

$U_{em} = \iiint_V u_{em}\, dV$

l'énergie em ds le vol V

2°- Bilan d'énergie

Exceptionnellemt $\vec{j} \neq \vec{0}$

(cas des conducteurs, de la matière...)

$$\vec{rot}\,\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0\left[\vec{j} + \varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right]$$

$$\vec{E}\cdot\vec{rot}\,\vec{B} = \mu_0\Big[\underbrace{\vec{j}\cdot\vec{E}}_{P_v\,(\text{Joule})} + \underbrace{\varepsilon_0\vec{E}\cdot\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}_{\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon_0 E^2}{2}\right)}\Big]$$

$$\frac{\vec{E}\cdot\vec{rot}\,\vec{B}}{\mu_0} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2\right) = -\vec{j}\cdot\vec{E}$$

Utilisons $div(\vec{E}\wedge\vec{B}) = \vec{B}\cdot\vec{rot}\,\vec{E} - \vec{E}\cdot\vec{rot}\,\vec{B}$

$$\underbrace{\frac{1}{\mu_0}\vec{B}\cdot\vec{rot}\,\vec{E}}_{\frac{\vec{B}}{\mu_0} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2\right) + div\,\vec{\Pi} = -\vec{j}\cdot\vec{E}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{2\mu_0}\right) + div\,\vec{\Pi} = -\vec{j}\cdot\vec{E}$$

$$\boxed{\frac{\partial u_{em}}{\partial t} + div\,\vec{\Pi} = -\vec{j}\cdot\vec{E}}$$

ds le vide, $\vec{j} = \vec{0}$

Conservat° de l'énergie dc $\boxed{\frac{\partial u_{em}}{\partial t} + div\,\vec{\Pi} = 0}$

$$\boxed{\vec{\Pi} = \frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0}}$$

3°- Vecteur de Poynting pr OPP

$\vec{E} = E_0\vec{u_x}\, e^{j(\omega t - kz)}$, $\vec{E} = E_0\vec{u_x}\cos(\omega t - kz)$

$$\vec{B} = \frac{\vec{k}\wedge\vec{E}}{\omega} = \frac{\vec{u_z}\wedge\vec{E}}{c} = \frac{E_0}{c}\vec{u_y}\cos(\omega t - kz)$$

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c}\cos^2(\omega t - kz)\,\vec{u_z}$$

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c}\vec{u_z} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 c E_0^2\,\vec{u_z} = \langle u_{em} \rangle c\,\vec{u_z}$$

↳ $\vec{j} = \rho\vec{v}$

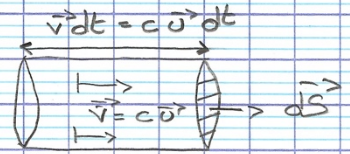
densité d'énergie

vit de déplacemt de l'énergie

4° - Vit de propagat° de l'énergie et notion de photon

• **Interprétat° de $\vec{\Pi}$**

Calculons le flux d'énergie qui traverse $\vec{dS}$ pdt dt



déplacem^t de l'nrj à $\vec{v} = c\vec{u}$

Contenues ds le vol, $dV = c\vec{u}\,dt \cdot \vec{dS}$

La qté d'énergie qui traverse $\vec{dS}$ pdt dt

$$dU_{em} = \langle u_{em} \rangle dV = \langle u_{em} \rangle c\vec{u} \cdot \vec{dS}\, dt$$

$$\frac{dU_{em}}{dt} = \langle u_{em} \rangle c\vec{u} \cdot \vec{dS}$$

(flux d'énergie $= \underbrace{\vec{\Pi}}_{\vec{j}} \cdot \vec{dS}$ $\Leftrightarrow$ $\vec{\Pi} = \langle u_{em} \rangle c\vec{u}$

est le vect densité de courant énergétique

$\langle \| \vec{\Pi} \| \rangle_{\text{Soleil à Paris}} = 150\ W \cdot m^{-2}$ à Paris $\simeq 10^3\ W \cdot m^{-2}$

$I = \langle \| \vec{\Pi} \| \rangle = 10^3\ W \cdot m^{-2}$ Laser de 1 mW du commerce

• **Photons**

Chaque photon transporte de l'énergie et de la qté de mvt

$$\boxed{E = h\nu = \frac{hc}{\lambda} \ ,\ \vec{p} = h\vec{k}}$$

L'onde électromagnétique transporte de la qté de mvt et du mom^t cinétique.

dN photons le nb de photons qui traversent dS pdt dt.

$$\phi_{photons} = \frac{dN_{photons}}{dt} = \frac{\overset{\text{puissance}}{I\,dS}}{h\nu}$$

dN photons $\times h\nu$ = nrj qui traverse $= I\,dS\,dt$