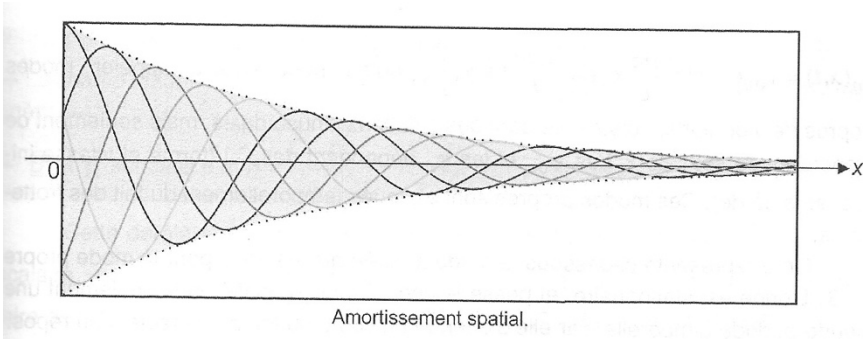
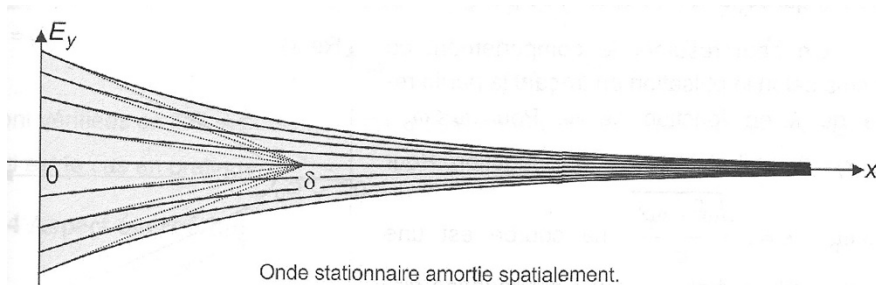


## Absorption des ondes dans un milieu dispersif

→ **OPPH atténuée avec  $\text{Re}(k)$  et  $\text{Im}(k)$  non nulles**



→ **Onde stationnaire atténuée avec  $\text{Re}(k) = 0$  (absence de propagation)**



## Complément : cas de l'amortissement temporel

On pourrait aussi chercher  $k \in \mathbb{R}$  (l'onde est une fonction sinusoïdale de  $x$ ), et  $\omega \in \mathbb{C}$  (il y a alors amortissement temporel).

Prenons l'exemple d'une corde de longueur  $L$ , attachée à ses deux extrémités, et qu'on écarte initialement de sa position de repos. La relation de dispersion est inchangée :  $k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} + \frac{i\omega}{v} = 0$ . Elle constitue une équation du second degré en  $\omega$ , pour  $k$

fixé :  $\omega^2 - \frac{ic^2}{v}\omega - k^2c^2 = 0$ , dont le discriminant  $\Delta = -\frac{c^4}{v^2} + 4k^2c^2 \approx 4k^2c^2$  se simplifie

si on suppose comme précédemment que les frottements visqueux sont faibles :

$\frac{c}{v} \ll k$ . On a alors  $\omega = \frac{ic^2}{2v} \pm kc = \frac{i}{\tau} \pm kc$ , où  $\tau = \frac{2v}{c^2}$  est un temps caractéristique.

À une valeur  $k$  positive correspondent deux valeurs de  $\omega$ . Or si  $k > 0$  est une solution du problème,  $-k < 0$  est aussi une solution du problème. On a donc quatre couples de solutions  $(\pm k, \omega = \frac{i}{\tau} \pm kc)$ , et les solutions complexes sont :

$$\underline{\psi}(x, t) = e^{-\frac{t}{\tau}} \left[ Ae^{ik(ct-x)} + Be^{ik(ct+x)} + Ce^{-ik(ct-x)} + De^{-ik(ct+x)} \right]. \text{ En notation réelle :}$$

$\psi(x, t) = \psi_{0+} e^{-\frac{t}{\tau}} \cos[k(ct-x) + \varphi_+] + \psi_{0-} e^{-\frac{t}{\tau}} \cos[k(ct+x) + \varphi_-]$ . C'est la somme d'une O.P.P se propageant dans le sens des  $x$  croissants à la célérité  $c$ , et d'une O.P.P se propageant dans le sens des  $x$  décroissants à la célérité  $c$ , les deux ondes étant amorties temporellement avec une durée caractéristique  $\tau$ .

Il reste à vérifier les C.A.L :

$$- \psi(x=0, t) = 0 \quad \forall t \Rightarrow \psi_{0-} \cos(kct + \varphi_-) = -\psi_{0+} \cos(kct + \varphi_+) \quad \forall t. \text{ On peut prendre :}$$

$$\varphi_- = \varphi_+ = \varphi, \text{ et on a alors } \psi_{0-} = -\psi_{0+} = -\frac{\psi_0}{2} \Rightarrow \psi(x, t) = \psi_0 \sin(kx) e^{-\frac{t}{\tau}} \sin(kct + \varphi).$$

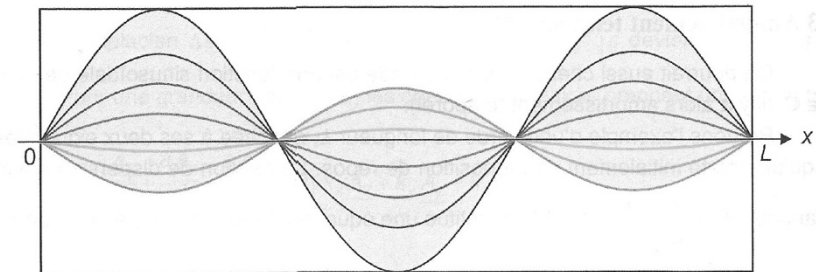
$$- \psi(x=L, t) = 0 \quad \forall t \Rightarrow \sin(kL) = 0 \Leftrightarrow kL = n\pi, \text{ avec } n \in \mathbb{N}^*.$$

Les solutions du problème se décomposent alors sur une base de solutions :

$$\psi_n(x, t) = \psi_{0n} e^{-\frac{t}{\tau}} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \sin\left(\frac{n\pi c}{L}t + \varphi_n\right), \text{ qu'on peut encore appeler modes}$$

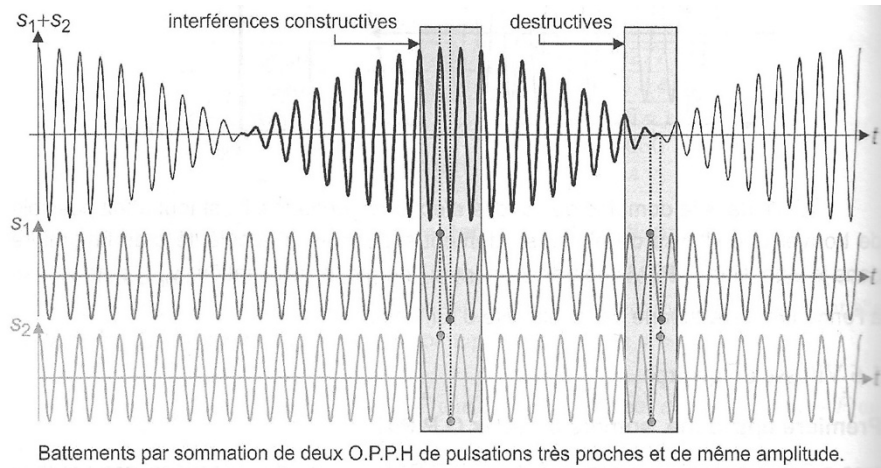
propres de vibrations, puisque ce sont des solutions sinusoïdales, mais seulement de la coordonnée spatiale  $x$ . Les  $\psi_{0n}$  et les  $\varphi_n$  dépendent des C.I (forme et vitesse initiale de la corde). Ces modes propres sont atténués temporellement du fait des frottements.

On a représenté ci-dessous la corde à différents instants, pour le mode propre  $n=3$ . L'onde est stationnaire, et possède une période spatiale, mais seulement une pseudo-période temporelle, car elle s'atténue au cours du temps, et revient au repos.

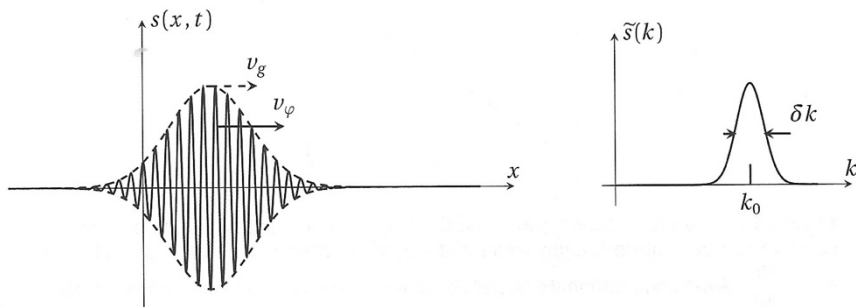


Amortissement temporel du mode  $n=3$ .

## Superposition de deux OPPH de pulsations voisines

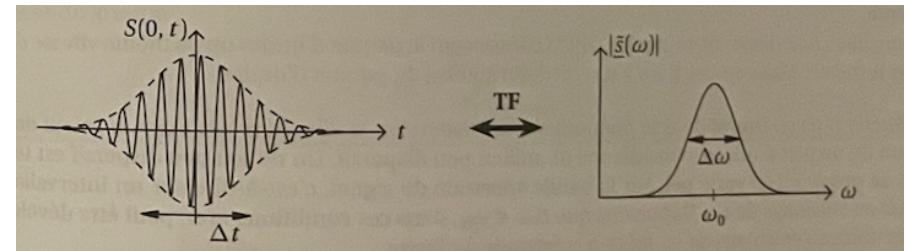


## Paquet d'ondes (continu)



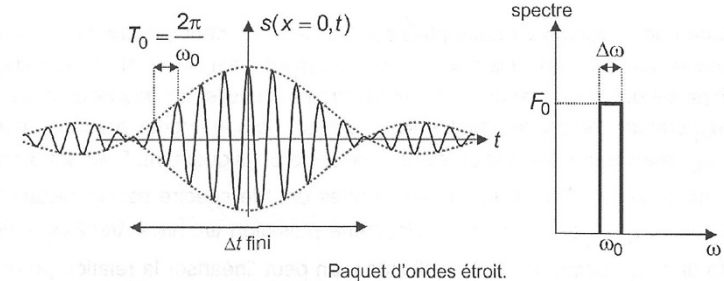
**Figure 26.7.** Paquet d'ondes continu. On constate qu'avec une distribution continue de vecteurs d'onde autour d'une valeur centrale  $k_0$ , l'enveloppe de l'onde résultante n'est plus périodique. La grandeur analogue à l'écart  $k_2 - k_1$  qui caractérisait le doublet devient la largeur typique  $\delta k$  de la distribution continue de vecteurs d'onde.

## Relation entre spectre et vibration en $x = 0$ avant propagation

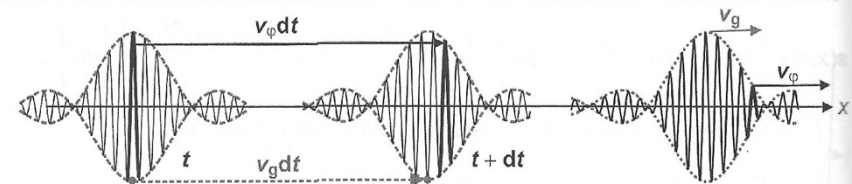


## Propagation d'un paquet d'ondes pour une densité spectrale de forme « rectangulaire » centrée en $\omega_0$

Le point crucial est que l'enveloppe du signal se propage à une vitesse différente  $v_g = \frac{d\omega}{dk}(k_0)$  de la vitesse de phase  $v_\phi = \frac{\omega_0}{k_0}$ .



La vitesse  $v_g = \frac{d\omega}{dk}$  est appelée *vitesse de groupe* : c'est la vitesse à laquelle se déplace l'enveloppe du paquet d'ondes de faible largeur spectrale autour de  $\omega_0$ .

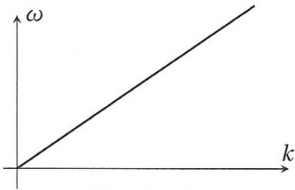


Les vitesses de phase et de groupe sont différentes dans un milieu dispersif.

Cette vitesse a un sens physique car l'enveloppe transporte de l'information, et devra pour une onde *électromagnétique* être inférieure ou égale à la célérité de la lumière dans le vide. On peut faire l'analogie avec la modulation d'amplitude : la « porteuse » ne véhicule aucune information, contrairement au signal modulant qui enveloppe la porteuse.

## Propagation d'un paquet d'ondes sans et avec dispersion

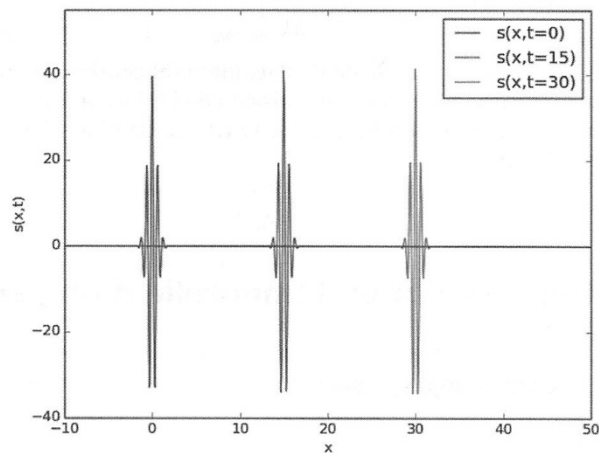
### → Sans dispersion



**Figure 26.8.** Représentation graphique de la relation de dispersion. La pente locale de cette courbe s'interprète physiquement comme la vitesse de groupe, puisque l'on a  $v_g = \frac{d\omega}{dk}$ . Avec une relation de dispersion linéaire, la courbe est une droite, et donc la vitesse de phase est la même pour toutes les composantes spectrales et coïncide avec la vitesse de groupe.

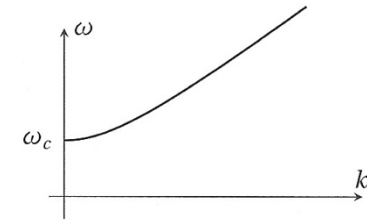
### Évolution d'un paquet d'ondes

La figure 26.9 montre l'évolution temporelle d'un paquet d'ondes dans le milieu non dispersif considéré. L'évolution consiste en une simple translation de l'ensemble du signal, sans déformation.



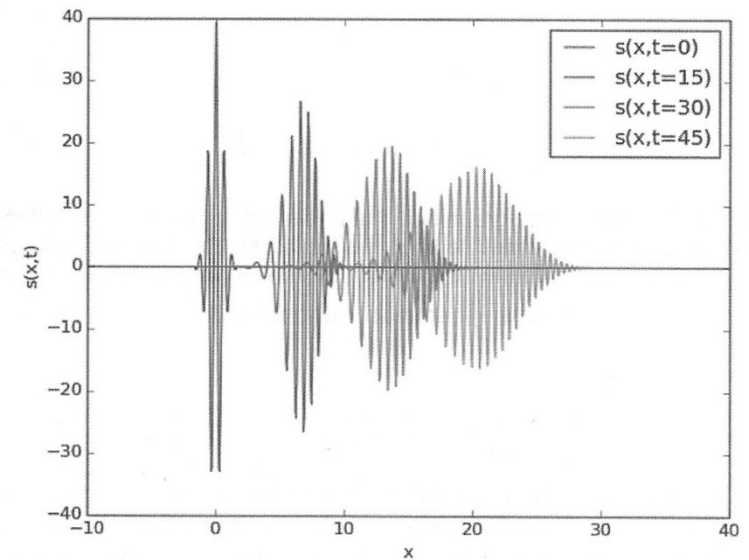
**Figure 26.9.** Évolution d'un paquet d'ondes continu en absence de dispersion : on observe une simple translation du signal au cours du temps, sans déformation ni glissement de la porteuse par rapport à l'enveloppe.

### → Avec dispersion



**Figure 26.10.** Représentation graphique d'une relation de dispersion non linéaire. La pente locale dépend désormais de  $k$ , et elle est distincte de la pente de la droite qui relie l'origine à un point donné de la courbe : vitesse de phase  $\omega/k$  et vitesse de

groupe  $\frac{d\omega}{dk}$  sont donc distinctes.



**Figure 26.11.** Évolution d'un paquet d'ondes dans un milieu dispersif avec la relation de dispersion  $\omega = \sqrt{c^2 k^2 + \omega_c^2}$ . Le centre du paquet d'onde se translate moins rapidement que dans le cas de la relation de dispersion  $\omega = ck$  : la vitesse de groupe n'est plus égale à  $c$ . Par ailleurs, on observe clairement une déformation de l'enveloppe du paquet d'ondes au cours du temps.

#### d) Simulation d'un paquet d'onde gaussien qui traverse un milieu dispersif

On réalise une simulation avec animation d'un paquet d'onde gaussien (l'enveloppe du paquet d'onde a la forme d'une gaussienne) qui se propage dans un milieu dispersif régi par une équation de Klein Gordon (équation de dispersion du plasma, en haute fréquence) :

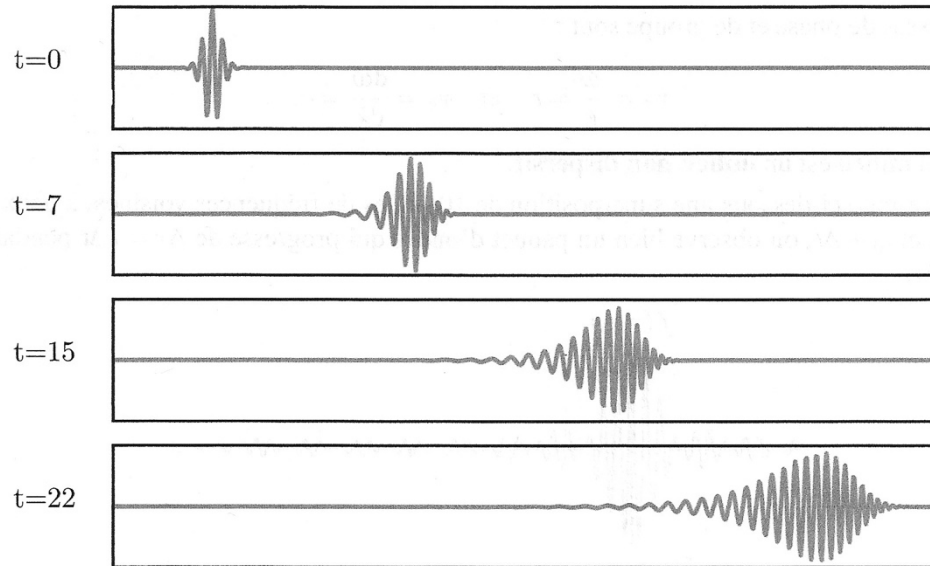


Figure 33.7 – Paquet d'onde à divers instants successifs dans un milieu dispersif.

```
t=np.linspace(0,30,Nt)
x=np.linspace(-5,30,Nx)
w=np.linspace(15,35,Nw)
w0=25;dw=w0/8;c=np.exp(-((w-w0)/dw)**2/2) # spectre gaussien
def k(w):return np.sqrt(w**2-15**2) # equation de dispersion
def s(t):return sum(c*np.cos(w*t-np.outer(x,k(w))),axis=1) # onde
frames=np.array([s(ti) for ti in t])
line = plt.plot(x,frames[:,Nt/5].T)[0] # scène initiale
def animate(i): line.set_ydata(frames[i]);return [line]
ani=FuncAnimation(line.figure, animate, np.arange(Nt),interval=25,
                  blit=True)
plt.grid();plt.show()
```

On observe que le paquet d'onde se déforme en traversant le milieu : il s'étale et les fréquences les plus élevées arrivent avant les fréquences les plus faibles, ce qui s'observe bien dans l'allure du paquet.

Le programme en langage python qui a réalisé la simulation est le suivant :

#### Programme (python)

```
import numpy as np
from matplotlib.animation import FuncAnimation
import matplotlib.pyplot as plt
Nx=1000;Nt=Nx//5;Nw=Nx//5
```

Vitesse de phase et vitesse de groupe dans un milieu conducteur dispersif

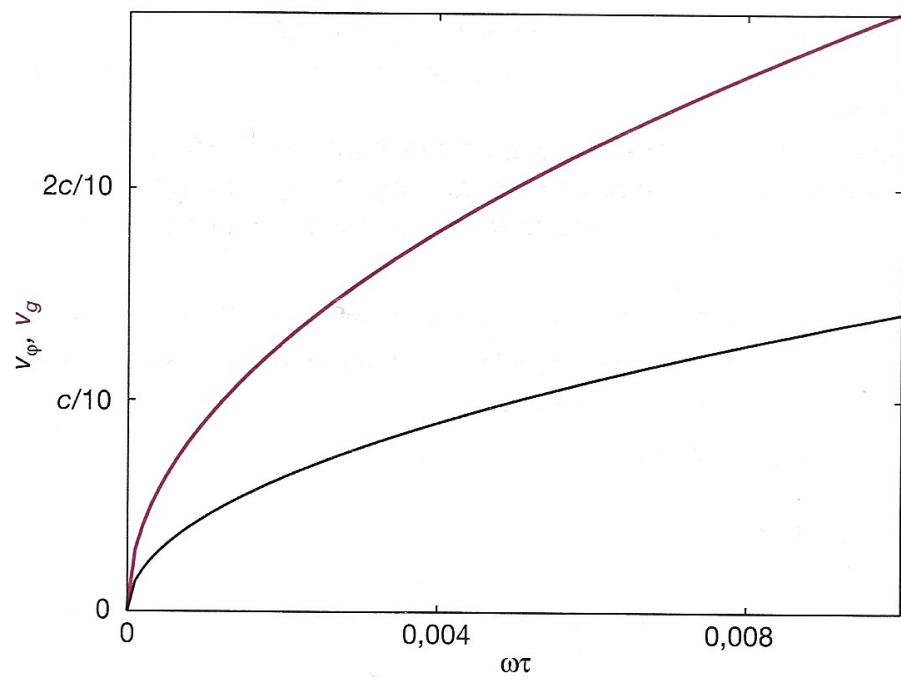


Figure 4