

INTERFACE ENTRE DEUX MILIEUX (Ondes)

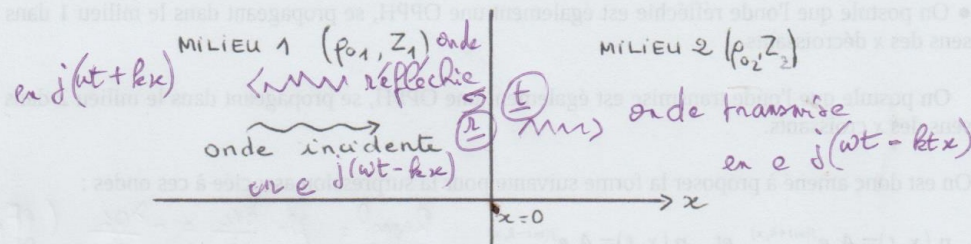
I CAS DES ONDES SONORES

1. Interface entre deux fluides- généralités.

- On considère une onde sonore, de type OPPH, se propageant selon une direction que l'on appelle $\vec{u}_x$, selon les x croissants, au sein d'un milieu 1 fluide.

- L'onde rencontre une interface normale à la direction de propagation, séparant le milieu 1 d'un milieu 2.

On appelle $x=0$ le plan de l'interface.



Physiquement, l'onde sonore résulte de la propagation d'une perturbation du milieu, associée à la compression de « tranches de fluide ».

De façon générale, on note $p(x, t)$ la surpression acoustique.

La pression totale $P(x, t)$ en un point est donc donnée par $P(x, t) = P_0 + p(x, t)$, où P_0 est la pression en l'absence d'onde.

De même, la vitesse de déplacement d'une tranche de fluide est caractérisé par $\vec{v}(x, t) = v(x, t)\vec{u}_x$.

Enfin, la masse volumique est $\rho(x, t) = \rho_0 + \mu(x, t)$, où ρ_0 est la masse volumique du fluide au repos (sans onde) et $\mu(x, t)$ la perturbation locale due au passage de l'onde.

On rappelle que dans l'approximation acoustique :

$$\begin{cases} p(x, t) \ll P_0 \\ v(x, t) \ll c \\ \mu(x, t) \ll \rho_0 \end{cases}, \text{ où } c \text{ est la célérité de l'onde acoustique dans le milieu.}$$

$\rightarrow$ car discontinuité de milieu $\Rightarrow Z_1 \neq Z_2$!

Dans le plan de l'interface, en $x=0$, sont créées une onde transmise, se propageant dans le milieu 2, et une onde réfléchie, se propageant dans le milieu 1.

Dans la suite, pour les grandeurs acoustiques qui viennent d'être définies, on rajoutera :

- l'**indice 1** (resp. 2) pour les caractéristiques physiques du milieu 1 (resp. 2),

- l'**indice i** si l'onde est incidente, l'**indice r** si l'onde est réfléchie, l'**indice t** si l'onde est transmise.

2. Structure de l'onde réfléchie et de l'onde transmise

• L'onde l'incidente est une OPPH, la surpression acoustique, est de la forme :

$$p_i(x, t) = A_i \cos(\omega t - k_i x), \text{ ou encore en notation complexe } p_i(x, t) = A_i e^{j(\omega t - k_i x)},$$

et on a $\omega = k_i c_1$ (c_1 célérité de l'onde sonore dans le milieu 1...).

De même, la vitesse est $\vec{v}_i(x, t) = \frac{1}{Z_1} p_i(x, t)\vec{u}_x$, et en complexes $\vec{v}_i(x, t) = \frac{1}{Z_1} p_i(x, t)\vec{u}_x$,

avec $Z_1 = \rho_{0,1} c_1$ impédance acoustique du milieu 1.

• On postule que l'onde réfléchie est également une OPPH, se propageant dans le milieu 1 dans le sens des x décroissants.

On postule que l'onde transmise est également une OPPH, se propageant dans le milieu 2 dans le sens des x croissants.

On est donc amené à proposer la forme suivante pour la surpression associée à ces ondes :

$$p_r(x, t) = A_r e^{j(\omega t + k_r x)} \text{ et } p_t(x, t) = A_t e^{j(\omega t - k_t x)}, \text{ Rappel : } \mu_0 \frac{\partial v_z}{\partial t} = -\frac{\partial p_z}{\partial x} \text{ (PFD) linéarisé}$$

et pour la vitesse :

$$\vec{v}_r = \frac{-A_r}{Z_1} e^{j(\omega t + k_r x)} \vec{u}_x \text{ et } \vec{v}_t = \frac{A_t}{Z_2} e^{j(\omega t - k_t x)} \vec{u}_x$$

$\rightarrow$ onde PPH : en $e^{j(\omega t - kx)}$
 $\hookrightarrow \mu_0 \omega v_z = +jk p_z$
 $v_z = + \frac{p_z}{Z} = + \frac{p_z}{Z}$

Plusieurs commentaires s'imposent :

$\rightarrow$ onde PRH en $e^{j(\omega t + kx)}$
 négative $v_z = - \frac{p_z}{Z}$

- ♥ Pour les ondes réfléchies et pour les ondes transmises on a choisi volontairement la même pulsation ω que pour l'onde incidente.

En effet, ω correspond à la pulsation associée aux vibrations des tranches de fluide ; ce sont ces vibrations qui donnent naissance aux ondes réfléchies et transmises dans le plan $x=0$ de l'interface.

On peut également proposer une analogie avec le régime sinusoïdal forcé en électricité, où le générateur impose sa pulsation à toutes les grandeurs électriques du circuit.

- ♥ Les ondes réfléchies et transmises ont même direction de propagation que l'onde incidente, ici $\vec{u}_x$.

- ♥ Le sens de propagation de l'onde réfléchie est opposé à celui de l'onde incidente, et pour l'onde transmise il est au contraire le même.

- Que dire de la norme des vecteurs d'onde ?

onde incidente $\vec{k}_i = k_i \vec{u}_x$; onde réfléchie $\vec{k}_r = -k_r \vec{u}_x$; onde transmise $\vec{k}_t = k_t \vec{u}_x$
 avec $k_i > 0$, $k_r > 0$, $k_t > 0$.

♥ Dans le milieu 1, on a $\omega = k_i c_1$ et $\omega = k_r c_1$, donc $k_i = k_r$.

Dans le milieu 2, on a $\omega = k_t c_2$ donc $k_t \neq k_i$.

b) Relations de continuité (conditions aux limites à l'interface).

Dans le plan de l'interface, en $x=0$, on a continuité de la surpression acoustique et de la vitesse.

• **continuité de la surpression** (♥) → en imaginant une membrane de séparation de masse $m \approx 0$

$\forall t$, surpression totale dans le milieu 1 ($x=0^-$) = surpression totale dans le milieu 2 ($x=0^+$)

$$\forall t, p_1(x=0^-) + p_r(x=0^-) = p_t(x=0^+)$$

$$\forall t, A_i e^{j\omega t} + r A_i e^{j\omega t} = t A_i e^{j\omega t}$$

d'où $1+r=t$ (en supposant $A_i \neq 0$, sinon il n'y a pas d'onde incidente).

Physiquement, cette continuité de la surpression traduit que l'interface séparant les deux milieux est à peu près à l'équilibre.

• **continuité de la vitesse** (♥) → si v discontinue, il y aurait interprétation des 2 fluides ou créat de vide!

A FAIRE : trouver une nouvelle relation entre r et t

$$\frac{A_i}{Z_1} e^{j\omega t} - \frac{A_r}{Z_1} e^{j\omega t} = \frac{A_t}{Z_2} e^{j\omega t}$$

$$\frac{1}{Z_1} (1-r) = \frac{t}{Z_2}$$

$$\frac{p_1}{Z_1} - \frac{p_r}{Z_1} = \frac{p_t}{Z_2} \leftarrow \text{on } x=0$$

$$\frac{p_1}{Z_1} - r \frac{p_1}{Z_1} = t \frac{p_t}{Z_2}$$

→ m chose avec écriture explicite ou pas

Physiquement la continuité de la vitesse renvoie au fait que il n'existe pas de formation de poche de vide entre les deux milieux fluides, ou encore de mélange entre les deux fluides.

c) Expression des coefficients de réflexion en amplitude et de transmission en amplitude.

A FAIRE : A l'aide des relations précédentes, calculer r et t , en fonction de Z_1 et Z_2 , ainsi que r_v et t_v .

$$\frac{1}{Z_1} (1-r) = \frac{t}{Z_2} \Rightarrow r = \frac{1}{Z_1} \left(\frac{1}{Z_2} - t \right) = \frac{1}{Z_1} - \frac{t}{Z_2} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 Z_2}$$

$$t = 1 + \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} \Rightarrow r = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} \Rightarrow t = \frac{2Z_2}{Z_2 + Z_1}$$

$$t = \frac{2Z_2}{Z_1 + Z_2} \quad \text{et} \quad t_v = \frac{Z_1}{Z_2} t = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2}$$

- On remarque que r et t sont réels, ainsi que r_v et t_v .

- Le coefficient de transmission t est nécessairement un réel positif.

- si Z_1 et Z_2 sont proches, $r, r_v \rightarrow 0$ il n'y a quasiment pas d'onde réfléchie.
- si $t_v > 0 \rightarrow$ transmission en P
- si $r_v < 0 \rightarrow$ réflexion en off. P
- si $t_v \rightarrow 1$ condition si l'on cherche à obtenir une bonne transmission entre 2 milieux

- ♥ les amplitudes A_r et A_t sont choisies complexes pour tenir compte d'un éventuel déphasage φ_r (resp. φ_t) de l'onde réfléchie (resp. transmise) par rapport à l'onde incidente ($A_r = |A_r| e^{j\varphi_r}$).

- Finalement, si $p_i(x,t) = A_i e^{j(\omega t - kx)}$, en notant plus simplement $k_i = k = k_r$ alors :

onde réfléchie : $p_r(x,t) = A_r e^{j(\omega t + kx)}$ onde transmise : $p_t(x,t) = A_t e^{j(\omega t - kx)}$

$$\vec{v}_r = \frac{-A_r}{Z_1} e^{j(\omega t + kx)} \vec{u}_x = \vec{v}_r(x,t) \vec{u}_x$$

$$\vec{v}_t = \frac{A_t}{Z_2} e^{j(\omega t - kx)} \vec{u}_x = \vec{v}_t(x,t) \vec{u}_x$$

3. Coefficient de réflexion et transmission en amplitude.

a) Définition

Pour la surpression acoustique, le coefficient de réflexion en amplitude est $r = \frac{p_r(x=0,t)}{p_i(x=0,t)}$

Pour la surpression acoustique, le coefficient de transmission en amplitude est $t = \frac{p_t(x=0,t)}{p_i(x=0,t)}$

en $x=0, \forall t$, $r = \frac{A_r e^{j\omega t}}{A_i e^{j\omega t}} = \frac{A_r}{A_i}$ (rapport des amplitudes..), donc $A_r = r A_i$.

en $x=0, \forall t$, $t = \frac{A_t e^{j\omega t}}{A_i e^{j\omega t}} = \frac{A_t}{A_i}$, donc $A_t = t A_i$.

De même :

Pour la vitesse, le coefficient de réflexion en amplitude est $r_v = \frac{v_r(x=0,t)}{v_i(x=0,t)}$

Pour la vitesse, le coefficient de transmission en amplitude est $t_v = \frac{v_t(x=0,t)}{v_i(x=0,t)}$

$$\text{en } x=0, \forall t, r_v = \frac{-\frac{A_r}{Z_1} e^{j\omega t}}{\frac{A_i}{Z_1} e^{j\omega t}} = -\frac{A_r}{A_i}$$

$$\text{soit } r_v = -r$$

A FAIRE : Exprimer t_v en fonction de t .

$$t_v = \frac{v_t(x=0,t)}{v_i(x=0,t)} = \frac{\frac{p_t(x=0,t)}{Z_2}}{\frac{p_i(x=0,t)}{Z_1}} \times \frac{Z_1}{p_i(x=0,t)} = \frac{Z_1}{Z_2} t$$

- Par contre, le coefficient de réflexion r peut être positif ou négatif.

Conséquence sur le déphasage de l'onde réfléchie ou transmise par rapport à l'onde incidente :

- Comme t réel positif, l'ONDE TRANSMISE EST TOUJOURS EN PHASE avec l'onde incidente, que ce soit pour la surpression ou pour la vitesse, puisque $p_t = t A_i e^{j(\omega t - kx)}$ et $\underline{v}_t = \frac{1}{Z_2} p_t(x, t) \underline{u}_x$.

- Si $Z_1 < Z_2$, l'ONDE REFLECHIE EST EN PHASE POUR LA SURPRESSION, puisque r est un réel positif et $p_r = r A_i e^{j(\omega t + kx)}$ et EN OPPOSITION DE PHASE POUR LA VITESSE puisque $\underline{v}_r = \frac{-1}{Z_1} p_r(x, t) \underline{u}_x$.

- Si $Z_2 < Z_1$, l'ONDE REFLECHIE EST EN OPPOSITION DE PHASE POUR LA SURPRESSION puisque r est un réel négatif et $p_r = r A_i e^{j(\omega t + kx)}$ et EN PHASE POUR LA VITESSE puisque $\underline{v}_r = \frac{-1}{Z_1} p_r(x, t) \underline{u}_x$.

Importance respective de l'amplitude du signal transmis et du signal réfléchi (♥)

- Si Z_1 et Z_2 sont « peu différents » :

l'amplitude du signal réfléchi est faible (surpression et vitesse) et $t \approx 1$, $r_v \approx 1$. L'onde sonore est peu perturbée par le changement de milieu. Il faut être dans ces conditions pour avoir une bonne transmission du signal en amplitude.

- Si Z_1 et Z_2 sont « très différents », l'amplitude réfléchie peut au contraire devenir importante (surpression et vitesse).

Exemple de l'interface air/eau :

$Z_1(\text{air}) = \rho_1 c_1 = 1 \times 340 = 340 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$ et $Z_2(\text{air}) = \rho_2 c_2 = 10^3 \times 1500 = 1,5 \cdot 10^6 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$
on a $r \approx 1$ et $r_v \approx -1$.

d) structure de l'onde résultante dans le milieu 1, quand $r \approx 1$ et $r_v \approx -1$

→ l'onde est fortement réfléchie avec réflexion en app. de φ pour v !
Dans le milieu 1, l'onde résulte de la superposition de l'onde incidente et de l'onde réfléchie.

• **surpression**

$$\forall t, \forall x, p(x, t) = p_i(x, t) + p_r(x, t)$$

$$\forall t, \forall x, p(x, t) = A_i e^{j(\omega t - kx)} + r A_i e^{j(\omega t + kx)} = A_i e^{j(\omega t - kx)} + A_i e^{j(\omega t + kx)}$$

$$\forall t, \forall x, p(x, t) = A_i e^{j\omega t} (e^{-jkx} + e^{+jkx}) = 2 A_i e^{j\omega t} \cos(kx)$$

soit en réels :

$$\forall t, \forall x, p(x, t) = 2 A_i \cos(\omega t) \cos(kx)$$

L'onde est **stationnaire**, et il y a un **ventre de surpression acoustique** en $x=0$

• **vitesse**

A FAIRE : Etablir l'expression (réelle) de la vitesse $\underline{v}(x, t) = v(x, t) \underline{u}_x$ dans le milieu 1.

$$\underline{v}_i = v_i e^{j(\omega t - kx)} \text{ OPH (monochromatique)}$$

$$\underline{v} = \underline{v}_i + \underline{v}_r = \underline{v}_i + \frac{r_v}{r} \underline{v}_i = v_i e^{j(\omega t - kx)} - v_i e^{j(\omega t + kx)}$$

$$\underline{v} = v_i e^{j\omega t} (e^{-jkx} - e^{+jkx}) = -2j v_i e^{j\omega t} \left(\frac{e^{jkx} - e^{-jkx}}{2} \right)$$

$$\underline{v} = 2j v_i e^{j\omega t} \sin kx \text{ avec } \boxed{\underline{v}} = \Re(\underline{v}) = \boxed{2 v_i \sin kx \sin \omega t}$$

→ onde stationnaire avec un nœud de vitesse en $x=0$! En effet : $\underline{v}_i + \underline{v}_r = \underline{v}_t = 0$

3. Réflexion et transmission en puissance

On adopte ici un point de vue énergétique.

On définit deux nouveaux coefficients $R = \frac{P_r}{P_i}$ et $T = \frac{P_t}{P_i}$, où :

P_i puissance de l'onde incidente, P_r puissance de l'onde réfléchie, P_t puissance de l'onde transmise.

On peut également exprimer ces coefficients à l'aide de l'intensité sonore : $R = \frac{I_r}{I_i}$ et $T = \frac{I_t}{I_i}$ ♥

On rappelle que l'intensité sonore est liée à la valeur moyenne (temporelle) du vecteur de Poynting : $I = \langle |\vec{\Pi}| \rangle$, avec $\vec{\Pi} = p(x, t) \underline{v}(x, t) = p(x, t) v(x, t) \underline{u}_x$.

Attention, pas de vecteur de Poynting complexe....

• **intensité sonore incidente**

$I_i = \langle |p_i(x, t) v_i(x, t)| \rangle = \langle |p_i(x, t)| \frac{1}{Z_1} |p_i(x, t)| \rangle$ (on met une valeur absolue car on moyenne la norme du vecteur de Poynting)

$$I_i = \frac{1}{Z_1} \langle p_i^2(x, t) \rangle$$

$$I_i = \frac{1}{Z_1} \langle A_i^2 \cos^2(\omega t - kx) \rangle$$

$$I_i = \frac{1}{2 Z_1} A_i^2$$

[pour calculer la valeur moyenne du vecteur de Poynting on peut utiliser un résultat mathématique utilisant le formalisme complexe :

$$I_i = \frac{1}{2} \Re \{ \underline{p}_i(x, t) \cdot \underline{v}_i^*(x, t) \}$$

$$I_i = \frac{1}{2} \Re \{ A_i e^{j(\omega t - kx)} \cdot \frac{A_i}{Z_1} e^{-j(\omega t - kx)} \}$$

$$I_i = \frac{1}{2} \Re \left\{ \frac{A_i^2}{Z_1} \right\} = \frac{1}{2} \frac{A_i^2}{Z_1}$$

● intensité sonore réfléchie

$$I_r = \langle |p_r(x, t) v_r(x, t)| \rangle = \langle |r A_i \cos(\omega t + kx) \cdot r_v \left(\frac{A_i}{Z_1} \right) \cos(\omega t + kx)| \rangle, \text{ avec } r_v = -r$$

$$I_r = \langle |-r|^2 \frac{A_i^2}{Z_1} \cos^2(\omega t + kx) \rangle = \frac{1}{2} r^2 \frac{A_i^2}{Z_1}$$

● intensité sonore transmise

A FAIRE : calculer l'intensité sonore transmise

$$I_t = \langle |p_t v_t| \rangle = \langle |p_t \times \frac{p_t}{Z_2}| \rangle = \frac{1}{Z_2} \langle p_t^2 \rangle = \frac{t^2}{Z_2} \langle A_i^2 \omega^2 (Z_1 - Z_2)^2 \rangle$$

$$I_t = t^2 \frac{A_i^2}{2 Z_2}$$

$$I_t = \langle |p_t v_t| \rangle = \langle t p_i t v_i \rangle = t t v \langle p_i v_i \rangle = t t v \langle p_i v_i \rangle$$

$$I_t = t^2 \frac{Z_1}{Z_2} I_i$$

Déduire des calculs précédents l'expression des coefficients R et T, en fonction de r et t :

$$R = \frac{I_r}{I_i} = \frac{\pi^2 \frac{A_i^2}{2 Z_1}}{\frac{A_i^2}{2 Z_1}} = r^2 = \left(\frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2} \right)^2 \quad \left| \quad T = \frac{t^2 \frac{A_i^2}{2 Z_2}}{\frac{A_i^2}{2 Z_1}} = t^2 \frac{Z_1}{Z_2} \right|$$

Exprimer ensuite ces coefficients en fonction de Z_1 et Z_2 :

$$R + T = \frac{t_1^2 + t_2^2 - 2 t_1 t_2 + 4 t_1 t_2}{(Z_1 + Z_2)^2} = \frac{t_1^2 + 2 t_1 t_2 + t_2^2}{(Z_1 + Z_2)^2} = 1!! \quad \left| \quad T = \frac{4 Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2} \right|$$

On vérifie la relation $R + T = 1$ qui traduit la conservation de l'énergie à l'interface

Commentaire :

- Si Z_1 et Z_2 sont « peu différents », alors $R \rightarrow 0$ et $T \rightarrow 1$.

Quasiment toute la puissance sonore est transmise du milieu 1 vers le milieu 2, on parle d'adaptation d'impédance.

On peut faire une analogie avec la transmission de puissance en électrocinétique...

- Si Z_1 et Z_2 sont « très différents », alors $R \rightarrow 1$ et $T \rightarrow 0$.

C'est le cas de l'interface air/eau où on obtient $R = 0,99$ et $T = 1,2 \cdot 10^{-3}$.

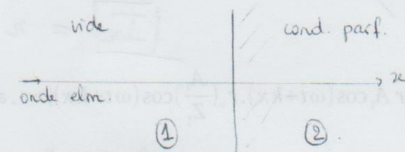
4. Mise en œuvre des ondes ultra-sonores pour l'échographie médicale

APPROCHE DOCUMENTAIRE

II CAS DES ONDES ELECTROMAGNETIQUES

1. Conducteur parfait

On considère l'incidence normale d'une OPPH sur un conducteur parfait.



Là encore, cela génère a priori une onde transmise et une onde réfléchie.

Le conducteur est parfait quand sa conductivité $\gamma \rightarrow \infty$.

Si $\vec{E}$ est le champ électrique dans le conducteur parfait, alors la puissance volumique cédée aux charges est $P_j = \vec{j} \cdot \vec{E} = \gamma E^2$.

Cette puissance devant rester finie, $E = 0$.

Dans un conducteur parfait le champ électrique est nul

$$\vec{E}_{int} = \vec{0}$$

Cela est cohérent avec le calcul de « l'épaisseur de peau » δ , qui est l'épaisseur sur laquelle le champ électrique peut pénétrer dans le conducteur. ($\delta < \text{mm}$)

On a $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}$, lorsque $\gamma \rightarrow \infty$ alors $\delta \rightarrow 0$.

(interprétation physique du terme « conducteur parfait » : pour le moindre champ $\vec{E}$, si petit soit-il, les électrons se mettent en mouvement $\rightarrow$ les électrons ne sont soumis à aucun choc $\rightarrow$ pas de dissipation d'énergie $\rightarrow$ pas d'effet Joule).

$$\vec{B}_{int} = \vec{0}$$

En régime variable, le champ magnétique est également nul dans un conducteur parfait.

En effet, $\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0}$, donc $\vec{B}$ est stationnaire, donc nul si le régime est variable.

Conséquences importantes

• $\text{div} \vec{E} = 0$ dans le conducteur parfait impose $\rho = 0$, où ρ est la densité volumique de charge.

Par contre, il peut exister des charges localisées en surface qui créent une densité surfacique de charge $\sigma \neq 0$.

• $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ avec $\vec{E} = \vec{B} = \vec{0}$ imposent $\vec{j} = \vec{0}$, où $\vec{j}$ est la densité volumique de courant.

Par contre, il peut exister des courants localisés en surface qui créent une densité surfacique de courant $\vec{j}_s \neq 0$.

Dans un conducteur parfait, $\rho = 0$ et $\vec{j} = \vec{0}$, mais on peut avoir en surface $\sigma \neq 0$ et $\vec{j}_s \neq 0$

● Attention, il s'agit d'un modèle, en réalité une répartition de charges et de courants strictement surfaciques n'existe pas... ils sont répartis sur une épaisseur e très faible ($e \rightarrow 0$).

pour les charges :

on s'intéresse au volume élémentaire $dV = dS \cdot e$

où dS est une surface élémentaire contenue dans

le plan $x=0$.

Si on décrit le système comme étant chargé strictement en surface (densité surfacique σ) la charge contenue dans dV est $dq = \sigma dS$.

Si on décrit le système comme étant chargé en volume sur une épaisseur $e \rightarrow 0$ (densité volumique ρ) alors $dq = \rho dV = \rho \cdot e \cdot dS$, on a donc $\sigma = \lim_{e \rightarrow 0} (\rho \cdot e)$.

pour les courants :

$\vec{j}_s dS = \vec{j} dV = \vec{j} e dS$ donc $\vec{j}_s = \lim_{e \rightarrow 0} (\vec{j} \cdot e)$. Visiblement $\vec{j}$ et $\vec{j}_s$ ne s'expriment pas dans la même unité...

2. Relations de passage pour le champ électromagnétique (relations admises).

Deux milieux 1 et 2 sont séparés par une surface (on s'intéresse en général au cas surface plane, mais les résultats énoncés sont vrais quelque soit la topologie de la surface).

Soit M un point de cette surface. La densité surfacique de charge en M est notée σ , et la densité volumique de courants notée $\vec{j}$.

Soit $\vec{n}_{12}$ le vecteur normal à l'interface, en M, se dirigeant de 1 vers 2.

Dans le milieu 1, en un point infiniment proche de M,

le champ électrique est $\vec{E}_1 = \vec{E}_{1t} + \vec{E}_{1n}$ où :

$\vec{E}_{1t}$ composante tangentielle, parallèle à l'interface

(= dans le plan de la surface, si elle est plane)

$\vec{E}_{1n}$ composante normale, selon $\vec{n}_{12}$

Dans le milieu 2, en un point infiniment proche de M,

le champ électrique est $\vec{E}_2 = \vec{E}_{2t} + \vec{E}_{2n}$ où :

$\vec{E}_{2t}$ composante tangentielle, parallèle à l'interface

$\vec{E}_{2n}$ composante normale, selon $\vec{n}_{12}$

de part et d'autre de l'interface on a pour le champ électrique :

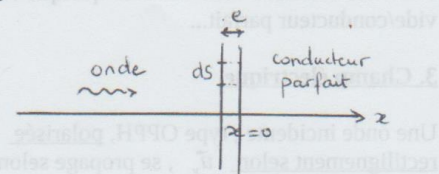
continuité de la composante tangentielle $\vec{E}_{2t} = \vec{E}_{1t}$

discontinuité de la composante normale $\vec{E}_{2n} - \vec{E}_{1n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{12}$

avec les mêmes conventions de notation pour le champ magnétique de part et d'autre de l'interface :

discontinuité de la composante tangentielle $\vec{B}_{2t} - \vec{B}_{1t} = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}_{12}$

continuité de la composante normale $\vec{B}_{2n} = \vec{B}_{1n}$



N.B. Ces relations sont valables quelque soient les milieux considérés, pas seulement à l'interface vide/conducteur parfait...

3. Champ électrique

Une onde incidente, type OPPH, polarisée rectilignement selon $\vec{u}_y$, se propage selon (Ox) vers le conducteur parfait.

Le champ électrique incident est de la forme :

$$\vec{E}_i = E_0 e^{j(\omega t - kx)} \vec{u}_y, \text{ avec } \omega = kc$$

a) Nécessité d'une onde réfléchie

À l'interface, côté vide, en $x=0^-$, si le seul champ électrique incident est présent, alors $\vec{E} = \vec{E}_i = E_0 e^{j\omega t} \vec{u}_y$. Ce champ est tangentiel et non nul.

Du côté conducteur, en $x=0^+$, le champ électrique est nul (conducteur parfait).

La composante tangentielle doit être conservée, il y a contradiction. Cela impose l'existence d'une onde réfléchie dans le vide, et c'est la composante tangentielle du champ total $\vec{E} = \vec{E}_i + \vec{E}_r$ qui est nulle en $x=0^-$.

b) Calcul du champ réfléchi

On recherche le champ réfléchi sous la forme $\vec{E}_r = E_r e^{j(\omega t + kx)} \vec{u}_y$.

→ même pulsation ω que le champ incident

→ donc $k_r = k$ (puisque $\omega = k_r c = kc$)

→ signe « + » dans l'exponentielle traduit la propagation selon les x décroissants

→ même polarisation

en $x=0$ la continuité de la composante tangentielle impose :

$$\forall t, E_0 e^{j\omega t} \vec{u}_y + E_r e^{j\omega t} \vec{u}_y = \vec{0} \rightarrow E_r = -E_0$$

le champ réfléchi a même amplitude que le champ incident mais est en opposition de phase.

en notation complexe $\vec{E}_r = -E_0 e^{j(\omega t + kx)} \vec{u}_y$

en notation réelle $\vec{E}_r = -E_0 \cos(\omega t + kx) \vec{u}_y$

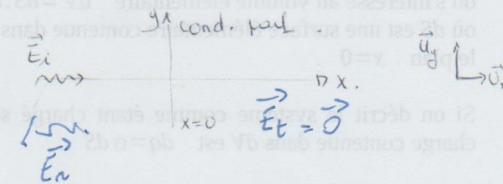
RQ : comme pour les ondes sonores, on aurait pu introduire le coefficient de réflexion en amplitude r et chercher le champ réfléchi sous la forme $\vec{E}_r = r E_0 e^{j(\omega t + kx)} \vec{u}_y$.

La condition de continuité de la composante tangentielle en $x=0$ aurait fourni $r = -1$

c) onde résultante dans le milieu incident (vide)

dans le milieu 1 (vide), le champ total est $\forall x, t, \vec{E}_1(x, t) = E_0 e^{j(\omega t - kx)} \vec{u}_y - E_0 e^{j(\omega t + kx)} \vec{u}_y$

→ $\vec{E}_1(x, t) = -E_0 e^{j\omega t} (2j \sin(kx)) \vec{u}_y$



la réflexion en spp. de 180°

d'où le champ réel : $\vec{E}_1(x,t) = 2E_0 \sin(\omega t) \sin(kx) \vec{u}_y$, l'onde est stationnaire

4. Champ magnétique

- champ magnétique incident

l'onde incidente est une OPPH donc $\vec{B}_i = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}_i}{\omega}$, avec $\vec{k} = k \vec{u}_x$ et $\omega = kc$

$$\text{soit } \vec{B}_i = \frac{1}{c} (\vec{u}_x \wedge E_0 e^{j(\omega t - kx)}) \vec{u}_y \rightarrow \boxed{\vec{B}_i = \frac{E_0}{c} e^{j(\omega t - kx)} \vec{u}_z}$$

- champ magnétique réfléchi

A FAIRE :

$$\vec{B}_r = \frac{1}{c} (-\vec{u}_x) \wedge \vec{E}_r = \frac{1}{c} (-\vec{u}_x) \wedge -E_0 e^{j(\omega t + kx)} \vec{u}_y$$

$$\boxed{\vec{B}_r = \frac{E_0}{c} e^{j(\omega t + kx)} \vec{u}_z} \quad \text{donc } \boxed{r_z = 1} \quad \text{réflexion en phase}$$

- champ magnétique total résultant

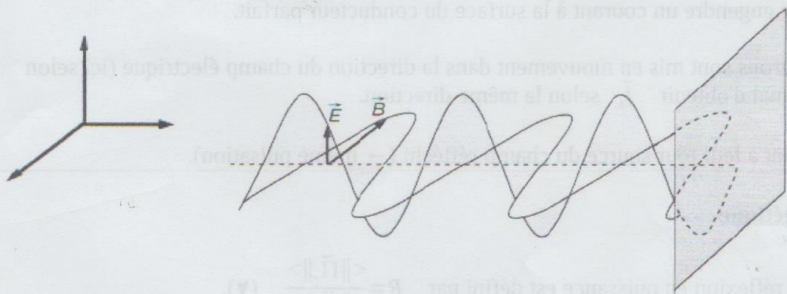
A FAIRE :

$$\vec{B}_s = \vec{B}_r + \vec{B}_i = \frac{E_0}{c} \vec{u}_z e^{j\omega t} (e^{jkx} + e^{-jkx}) = \frac{2E_0}{c} e^{j\omega t} \cos(kx) e^{j\omega t} \vec{u}_z$$

$$\boxed{\vec{B}(x,t) = \text{Re}(\vec{B}_s) = \frac{2E_0}{c} \cos(\omega t) \cos(kx) \vec{u}_z}$$

→ onde stationnaire avec ventre de $\vec{B}$ en $x=0$

- Allure du champ électrique et du champ magnétique dans l'espace à t donné :



On notera que les nœuds de $\vec{E}$ sont les ventres de $\vec{B}$ (et réciproquement).

5. Calcul de la densité surfacique de charge et de la densité surfacique de courant

- densité surfacique de charge (à l'interface entre les deux milieux vide/conducteur).

la discontinuité de la composante normale pour le champ électrique s'écrit : $\vec{E}_{2n} - \vec{E}_{1n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{12}$

Dans le vide, à l'interface en $x=0$, on obtient $\vec{E}_{1n} = \vec{0}$ car $\vec{E}$ est tangentiel (selon $\vec{u}_y$). Dans le conducteur parfait, on a vu $\vec{E} = \vec{0}$, donc $\vec{E}_{2n} = \vec{0}$.

Finalement $\sigma = 0$ sur la surface du conducteur parfait

- densité surfacique de courant

la continuité de la composante tangentielle s'écrit : $\vec{B}_{2t} - \vec{B}_{1t} = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}_{12}$, avec $\vec{n}_{12} = \vec{u}_x$.

on a $\vec{B}_{2t} = \vec{0}$ (conducteur parfait)

on a $\vec{B}_1(x,t) = 2 \frac{E_0}{c} \cos(kx) \cos(\omega t) \vec{u}_z$, $\forall x,t$, tangentiel à l'interface, donc $\vec{B}_1 = \vec{B}_{1t}$

$$\text{en } x=0, \forall t \quad -2 \frac{E_0}{c} \cos(\omega t) \vec{u}_z = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{u}_x$$

Par définition $\vec{j}_s$ est dans le plan de l'interface. On peut donc poser $\vec{j}_s = j_y \vec{u}_y + j_z \vec{u}_z$,

$$\text{donc } \vec{j}_s \wedge \vec{u}_x = -j_y \vec{u}_z + j_z \vec{u}_y.$$

$$\text{Il vient } j_z = 0 \text{ et } -\mu_0 j_y = -2 \frac{E_0}{c} \cos(\omega t) \rightarrow j_y = 2 \frac{E_0}{\mu_0 c} \cos(\omega t)$$

$$\text{Finalement } \vec{j}_s = 2 \frac{E_0}{\mu_0 c} \cos(\omega t) \vec{u}_y \text{ et } \frac{1}{\mu_0 c} = \epsilon_0 c$$

$$\rightarrow \vec{j}_s = 2E_0(\epsilon_0 c) \cos(\omega t) \vec{u}_y$$

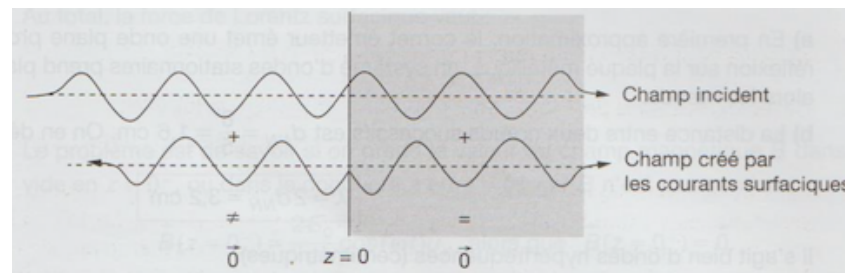
Conclusion :

-L'onde incidente engendre un courant à la surface du conducteur parfait.

-Comme les électrons sont mis en mouvement dans la direction du champ électrique (ici selon $\vec{u}_y$), il est normal d'obtenir $\vec{j}_s$ selon la même direction.

- Ces courants sont à leur tour source du champ réfléchi (→ même pulsation).

Le champ résultant peut-être considéré comme la superposition du champ incident et du champ émis par cette nappe de courants, qui produit le champ réfléchi, et annule le champ global dans le conducteur, car en opposition de phase avec le champ incident, ci-dessous.



6. Analyse énergétique

Le coefficient de réflexion en puissance est défini par $R = \frac{\langle \|\vec{\Pi}_r\| \rangle}{\langle \|\vec{\Pi}_i\| \rangle}$ (♥).

• onde incidente

$$\langle \|\vec{\Pi}_i\| \rangle = \langle \|\frac{1}{\mu_0} \vec{E}_i \wedge \vec{B}_i\| \rangle \quad (\text{remarquer la notation réelle})$$

$$\langle \|\vec{\Pi}_i\| \rangle = \langle \|\frac{1}{\mu_0} (E_0 \cos(\omega t - kx)) \vec{u}_y \wedge (\frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kx)) \vec{u}_z\| \rangle$$

$$\langle \|\vec{\Pi}_i\| \rangle = \frac{1}{2\mu_0 c} E_0^2$$

$$\langle \|\vec{\Pi}_i\| \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_0^2 J_z^2$$

• onde réfléchie

A FAIRE :

$$\begin{aligned} \langle \|\vec{\Pi}_r\| \rangle &= \langle \|\frac{1}{\mu_0} \vec{E}_r \wedge \vec{B}_r^* \rangle = \langle \|\frac{1}{\mu_0} \vec{E}_i \wedge \vec{B}_i^* \rangle \\ &= \langle \|\frac{1}{\mu_0} \vec{E}_i \wedge \vec{B}_i^* \rangle = \langle \|\vec{\Pi}_i\| \rangle \end{aligned}$$

En déduire, $R = \dots$ ♥

En effet, l'intégralité de l'onde est réfléchie par un conducteur parfait! (miroir parfait)

Rq: ds le milieu (1) pour l'onde totale

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \langle \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \rangle = \vec{0} \quad \text{car } \langle \cos \text{ et } \sin \rangle$$

onde stationnaire $\rightarrow$ l'énergie ne se propage

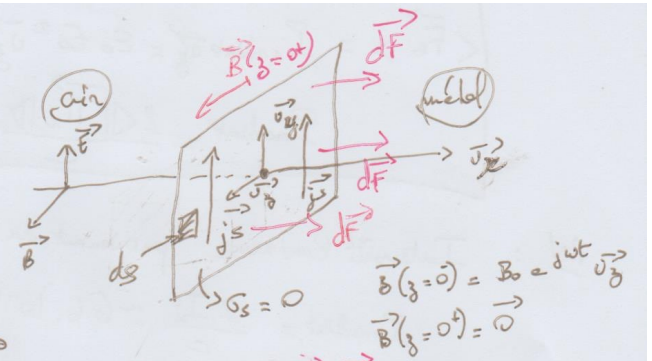
pas en moyenne : onde incidente et réfléchie

rayonnent en moy. la même puissance (même amplitude) mais en sens contraire!

7) Pression de rayonnement

$\rightarrow$ Origine de la force

Force de Lorentz qui s'applique sur les charges en mt à la surface du métal + charges fixes



$$d\vec{F} = dq_{mobile} \vec{v} \wedge \vec{B}$$

$$\text{avec } \vec{J}_s = \sigma_{mobile} \vec{v} \quad (\vec{J}_s = \rho_{mobile} \vec{v})$$

$$= \frac{dq_{mobile}}{ds} \vec{v}$$

$$d\vec{F} = dq \left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} \right)$$

$$d\vec{F} = \underbrace{\sigma_s ds \vec{E}}_{\text{charge fixes}} + \underbrace{dq_{mobile} \vec{v} \wedge \vec{B}}_{\text{charge mobiles}} \rightarrow \text{composante magnétique}$$

avec $\sigma_s = 0!$

$$\vec{F}_s = \frac{d\vec{F}}{ds} = \frac{dq_{mobile}}{ds} \vec{v} \wedge \vec{B} = \vec{J}_s \wedge \vec{B}(z=0)$$

$\rightarrow$ force surfacique = pression!

$\rightarrow$ Expression de la pression de radiation

Il faut prendre la moyenne de $\vec{B}(z=0^+)$ et $\vec{B}(z=0^-)$ pour ce calcul car l'origine de cette force est due aux courants surfaciques qui sont modélisés par une distribution surfacique qui n'est qu'un modèle approché "non physique" de courants volumiques réels contenus dans l'épaisseur de peau, au voisinage immédiat de la surface.

$$\vec{B}(z=0) = \frac{\vec{B}(z=0^+) + \vec{B}(z=0^-)}{2} = \frac{E_0}{c} \cos \omega t \vec{u}_y$$

$$\vec{J}_s = 2 \epsilon_0 c E_0 \cos \omega t \vec{u}_y$$

$$\vec{F}_s = 2 \epsilon_0 E_0^2 \cos^2 \omega t (\vec{u}_y \wedge \vec{u}_z) = 2 \epsilon_0 E_0^2 \cos^2 \omega t \vec{u}_x$$

$$\langle \vec{F}_s \rangle = I_{\text{radiat}} \vec{u}_z = \epsilon_0 \epsilon_0^2 \vec{u}_z$$

$$I_{\text{radiat}} = \frac{2 \langle |\vec{\Pi}|^2 \rangle}{c}$$

AN : Intensité lumineuse provenant du soleil $I_s = \langle |\vec{\Pi}|^2 \rangle = 10^3 \text{ W.m}^{-2}$

$$I_{\text{radiat}} = \frac{2 I_s}{c} \approx 6,6 \cdot 10^{-6} \text{ Pa} \ll \text{Patmos!!}$$

→ Interprétation corpusculaire ; lien avec l'approche ondulatoire

Les photons qui sont intrinsèquement liés à la propagation du champ électromagnétique transportent une énergie $\bar{\epsilon} = \frac{hc}{\lambda} = h\nu$ et sont animés d'une qte de mvmt $\vec{p} = \hbar \vec{k}$ avec $p = \frac{h}{\lambda} \times \frac{2\pi}{\lambda} \left(\text{vibe } n=1 \right)$ $p = \frac{h}{\lambda}$

Image $\Rightarrow$ réflexion parfaite à la surface du conducteur parfait $\Rightarrow$ ils ne perdent pas d'ny et sont réfléchis avec conservat de l'énergie et de la qte mvmt $p_i = p_r$ onde réfléchie pour le syst. { photons + métal } onde incidente sur la conducteur

Variat de la qte de mvmt et force exercée

$$\Delta \vec{p}_{\text{photons}} = \vec{p}_r - \vec{p}_i = -\Delta \vec{p}_{\text{conducteur}} \quad \text{car} \quad \Delta (\vec{p}_{\text{photons}} + \vec{p}_{\text{conducteur}}) = \vec{0}$$

↳ conservat de qte de mvmt

$$\Delta \vec{p}_{\text{conducteur}} = 2 \pi i \vec{u}_z \Rightarrow \text{pour 1 photon}$$

Pdt dt le conducteur est atteint par dN_{photons} il reçoit une qte de mvmt totale $\Rightarrow \Delta \vec{p}_{\text{total}} = dN_{\text{photons}} \times (2 \pi i \vec{u}_z)$ 1 choc $\rightarrow$ transfert de qte de mvmt!

$$\text{soit une } d\vec{F}_{\text{force}} = \frac{\Delta \vec{p}_{\text{total}}}{dt} = \frac{dN_{\text{photons}}}{dt} \times 2 \pi i \vec{u}_z$$

lien avec l'approche ondulatoire : évaluation du flux de photons

Pdt dt, on peut évaluer l'énergie électromag. incidente transportée par l'onde à l'énergie transportée par les photons correspondants.

Pour une surface ds de conducteur, l'ny incidente arrivant pdt dt est : $dU = \langle \vec{\Pi} \rangle \cdot d\vec{s} dt = \phi dt$ $d\phi$ flux d'énergie

$$dU = \frac{\epsilon_0 c \epsilon_0^2}{2} \vec{u}_x \cdot d\vec{s} \vec{u}_x dt$$

$$dU = \frac{\epsilon_0 c \epsilon_0^2}{2} ds dt \quad \text{et chaque photon transporte } \bar{\epsilon} = \frac{hc}{\lambda} = \pi i c$$

Le nombre de photons arrivant sur ds pdt dt est donc

$$dN_{\text{photons}} = \frac{dU}{\bar{\epsilon}} = \frac{\epsilon_0 c \epsilon_0^2}{2 \pi i c} ds dt$$

flux de photons

$$\left(\frac{dN_{\text{ph}}}{dt} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_0^2}{2 \pi i} ds \right)$$

$$\text{donc } d\vec{F} = \frac{dN_{\text{ph}}}{dt} \times 2 \pi i \vec{u}_x = \frac{\epsilon_0 \epsilon_0^2}{2 \pi i} \times 2 \pi i ds \vec{u}_x$$

$$\langle \vec{F}_s \rangle = \frac{d\vec{F}}{ds} = \epsilon_0 \epsilon_0^2 \vec{u}_z = I_{\text{radiat}} \vec{u}_z$$