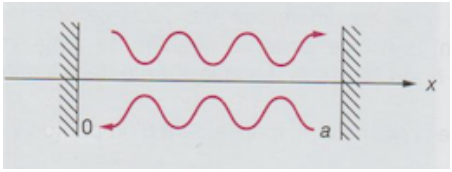
TD 2 – Réflexion des ondes électromagnétiques

1. Cavité résonante



On s'intéresse à une cavité de vide contenue entre 2 plans parallèles infinis, taillée dans un conducteur parfait entre x =`0 et x = a (ci-contre).
Un émetteur y produit en continu une onde électromagnétique à la pulsation ω, de telle manière qu'il s'y produit un phénomène de réflexions multiples, par superposition d'ondes progressives de sens de propagation opposés.
Naturellement, on adoptera une solution d'onde stationnaire, qui respecte les symétries du problème, polarisée rectilignement, telle que :

$$\vec{E}(x,t) = f(x)g(t)\,\vec{e_z}$$

a) Donner l'équation différentielle à laquelle satisfait le champ électrique dans la cavité.
b) En exploitant cette équation de propagation, et les conditions aux limites dans la cavité, déterminer les expressions de f(x) et g(t).
c) Préciser la quantification du champ électrique et l'apparition de n modes électromagnétiques électrique au sein de la cavité. Préciser notamment la quantification de la relation de dispersion, les quantifications de la longueur d'onde (apparition de discrètes λ_n), les fréquences associées, et représenter les trois premiers modes de cette onde stationnaire à l'aide de schémas.
d) Quelle est la distance entre deux nœuds du champ électrique ?
e) Représenter l'allure de l'énergie contenue dans une cavité taillée dans un métal réel, en fonction de la fréquence produise par l'émetteur.
f) En admettant que, dans le domaine de l'acoustique, un tube ouvert à ses deux extrémités soit régi par les mêmes équations qu'une cavité résonante, avec des facteurs de réflexion très élevés à ses extrémités, quels sont les tubes d'une flûte de Pan qui produisent les sons aigus et les sons graves. On supposera le mode n = 1 fondamental prépondérant.
g) Une cavité de forme quelconque a pour taille typique d. Que peut-on dire de la longueur d'onde d'une onde stationnaire existant dans cette cavité ?

2. Réflexion transmission à l'interface vide/plasma

Un plasma occupe le demi-espace $z \geq 0$, le demi-espace z < 0 étant vide. Une onde plane progressive monochromatique, polarisée rectilignement, arrive en incidence normale sur ce plasma :
$\vec{E_i} = E_0 e^{j(\omega t - k_0 z)}\,\vec{e_x}$ avec $k_0 = \frac{\omega}{c}$ la valeur du vecteur d'onde dans le vide

On rappelle que dans un plasma la relation de dispersion est $k^2 = \frac{\omega^2 - {\omega_p}^2}{c^2}$.
Le vecteur d'onde k dans le plasma peut être complexe en fonction de la fréquence, et il sera noté $\underline{k}$ de manière générale.
On appelle $\underline{r}$ et $\underline{t}$ les coefficients de réflexion et transmission en amplitude pour le champ électrique.
a) Ecrire la forme des champs électriques et magnétiques, réfléchis et transmis.
b) En utilisant les relations de passage sur l'interface vide/plasma, calculer $\underline{r}$ et $\underline{t}$ en fonction de $\underline{n} = \frac{\underline{k}}{k_0}$.
c) En déduire les coefficients de réflexion R et transmission T en énergie, définis comme le rapport des normes des vecteurs de Poynting moyens réfléchi (et transmis) et incident. On les exprimera en fonction de $\underline{r}$ et $\underline{t}$.
d) Calculer explicitement $\underline{n}$, puis R et T dans le cas $\omega < \omega_p$. Que conclure ? Donner la forme de l'onde dans le plasma et commenter.
e) Dans le cas où $\omega > \omega_p$, calculer R et T en fonction $\underline{n}$, dont on donnera aussi l'expression. Commenter ce cas, et le dernier cas où $\omega = \omega_p$.
f) Quelle relation existe entre R et T ? Quelle est son interprétation physique ?

3. Réflexion transmission à l'interface entre deux milieux transparents

On rappelle qu'un milieu transparent est non-dispersif (pas d'absorption) vis-à-vis des ondes électromagnétiques qui s'y propagent, ondes appartenant au domaine optique. Un milieu transparent est caractérisé par un indice optique réel, noté n > 1 tel que :

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi\, n}{\lambda_0} = \frac{\omega}{c(milieu)} = n\frac{\omega}{c}$$

avec c la célérité de la lumière dans le vide, c(milieu) = c/n < c, et λ_0 la longueur d'onde de l'onde correspondante dans le vide

Deux milieux semi-infinis, transparents, d'indices n_1 et n_2, occupent les demi-espaces $z \leqslant 0$ et $z \geqslant 0$. Une onde plane progressive monochromatique polarisée rectilignement selon $\vec{u}_x$ arrive depuis les $z \leqslant 0$ en incidence normale sur l'interface.

a) On rappelle que la célérité des ondes dans un milieu d'indice n est égale à $\frac{c}{n}$. En déduire la relation entre k et ω pour une onde dans un milieu transparent d'indice n.

b) On appelle $\underline{r}$ et $\underline{t}$ les coefficients de réflexion et transmission en amplitude pour le champ électrique. Donner l'expression des champs électrique et magnétique incidents, réfléchis et transmis en fonction de $\underline{r}$ et $\underline{t}$.

c) Calculer $\underline{r}$ et $\underline{t}$ grâce aux conditions aux limites. Commenter.

d) Calculer les coefficients de réflexion R (transmission T) en énergie, définis comme le rapport du module du vecteur de Poynting moyen réfléchi (transmis) par celui du vecteur de Poynting moyen incident. Quelle relation existe-t-il entre R et T, quel est son sens physique ?

Donnée : on admet ici que les champs électrique et magnétique sont continus en $z = 0$.

Pour aller plus loin

4. Equations de Maxwell et lois de Descartes : réflexion oblique d'une onde électromagnétique

7. Lois de Descartes et équations de Maxwell

Une onde plane progressive monochromatique arrive avec l'incidence θ_1 sur l'interface $z = 0$ séparant deux milieux transparents d'indices n_1 et n_2. Son vecteur d'onde est contenu dans le plan $y = 0$ et fait un angle θ_1 avec $\vec{u}_z$ (Fig. 32). Une onde réfléchie et une onde transmise sont engendrées à cette interface. On les choisit aussi comme planes progressives monochromatiques de vecteurs d'onde $\vec{k}_r$ et $\vec{k}_t$.

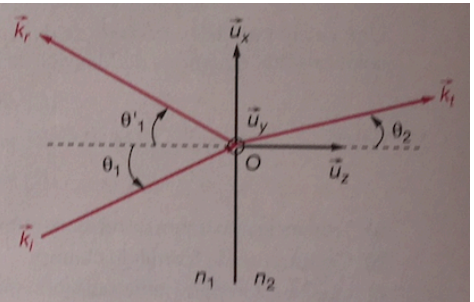


Figure 32

a) Écrire les formes de ces trois ondes.

b) En utilisant la continuité du champ électrique en $z = 0$, montrer que les trois ondes ont même pulsation et exprimer le module des trois vecteurs d'onde.

c) Montrer que les vecteurs d'onde réfléchis et transmis appartiennent au plan d'incidence (plan $y = 0$ sur la figure 32), et trouver une relation entre les trois angles indiqués grâce à la partie spatiale de leur phase. Qu'en déduisez-vous ?

5. Propagation guidée

Une cavité vide, invariante par translation selon $\vec{u}_z$, est taillée dans un conducteur parfait. Sa section est un rectangle $a \times b$ (Fig. 31). On s'intéresse à la propagation d'une onde électromagnétique le long de la direction $\vec{u}_z$:

$$\underline{\vec{E}}(M, t) = f(x, y)\exp(\mathrm{i}(\omega t - kz))\,\vec{u}_y$$

où f est une fonction à déterminer.

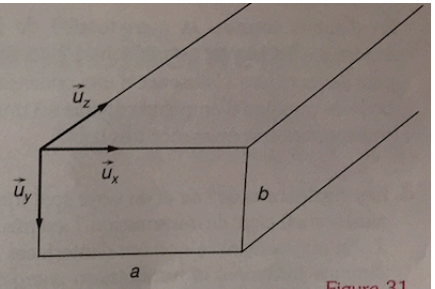


Figure 31

a) Commenter la forme de cette onde et notamment le fait que f ne dépende pas de z.

b) En utilisant une équation de Maxwell, montrer que f ne dépend en fait que d'une seule variable.

c) À l'aide de l'équation de propagation du champ électrique, trouver une équation différentielle en f.

d) La résoudre en utilisant les conditions aux limites.

e) Exprimer le champ électrique $\underline{\vec{E}}$ et commenter le résultat obtenu.

f) Montrer que ce champ électrique ne peut se propager qu'à partir d'une fréquence minimale f_c. Quel type de filtrage effectue le guide ? Calculer f_c pour $a = 1$ cm et préciser le domaine spectral correspondant.

Rappel : vu la présence d'un conducteur parfait, le champ électrique tangentiel doit s'annuler sur les parois de la cavité.

6. Réflexion sur un conducteur réel

➔ Un zoom sur les courants de surface dans l'épaisseur de peau d'un conducteur réel

2. Onde dans un métal réel — D'après Centrale-Supélec

L'espace est muni du repère orthonormé $(Oxyz)$. Un métal remplit le milieu semi-infini $y \geqslant 0$; il constitue une modélisation d'une paroi délimitant un milieu où une onde se propage. On cherche dans le métal une solution sous la forme :

$$\underline{\vec{E}} = \underline{E}(y)\exp[i(\omega t - kz)]\vec{e}_x$$

où la variation spatiale selon la direction de l'axe (Oz) est celle d'une onde plane progressive monochromatique de vecteur d'onde $\vec{k}$, mais où la présence du terme $\underline{E}(y)$ est due à la présence de la paroi.

On considère pour les applications numériques que le milieu est en cuivre de conductivité non infinie $\gamma = 5{,}9.10^7$ S.m^{-1}. La fréquence des ondes considérées est 2,5 GHz.

1. Profondeur de pénétration

a) Montrer que dans le métal la densité volumique de charge est nulle.

b) Calculer dans le métal le rapport des ordres de grandeur du courant de déplacement $\vec{j}_d = \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ et du courant volumique de conduction $\vec{j}_v = \gamma \vec{E}$. Commenter.

c) En tenant compte de la question précédente, établir l'équation aux dérivées partielles vérifiée par le champ $\vec{E}$. En déduire l'équation vérifiée par $\underline{E}(y)$. On posera :

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}.$$

Calculer numériquement δ et comparer sa valeur à k, que l'on considérera de l'ordre de $\dfrac{\omega}{c}$.

d) En déduire l'expression de $\vec{j}_v$ en fonction de δ, ω, k, t, y, z et d'une constante que l'on notera $\vec{j}_0$.

2. Modélisation surfacique

On s'intéresse dans cette question au lien entre les représentations surfaciques et volumiques des courants. On considère un volume semi-infini selon Oy dont la base, d'aire $dS = dx\,dy$, appartient à la surface de séparation entre le vide et le métal.

a) En pratique, la profondeur de pénétration de l'onde dans le métal est faible. On peut donc modéliser les courants dans le métal par un champ de vecteur densité surfacique de courant $\vec{j}_s$. Établir la relation vectorielle entre $\vec{j}_s$ et le champ de vecteur densité volumique de courant $\vec{j}_v$.

b) On note $\langle dP_J \rangle$ la moyenne temporelle de la puissance dissipée par effet Joule dans une colonne d'aire dS. Trouver l'expression de $\langle dP_J / dS \rangle$ en fonction de γ et de $\vec{j}_v$.

c) En utilisant les résultats de la question **1.d)**, exprimer $\vec{j}_s$ et $\langle dP_J / dS \rangle$ en faisant intervenir notamment $\vec{j}_0$, δ et γ. En déduire :

$$\left\langle \frac{dP_J}{dS} \right\rangle = \frac{1}{\gamma\delta}\langle \vec{j}_s^{\,2} \rangle.$$

d) Montrer que l'on pourrait considérer que la répartition surfacique $\vec{j}_s$ est équivalente énergétiquement à une densité de courant volumique uniforme sur une épaisseur δ_{eff}. Exprimer δ_{eff} en fonction de δ.

➔ **Facteurs de réflexion/transmission complexes, atténuation avec vecteur d'onde complexe dans un conducteur réel**

3. Onde réfléchie sur un métal — D'après e3a

Une onde électromagnétique plane $(\vec{E}_i, \vec{B}_i, \vec{k})$ progressive harmonique de pulsation $\omega = 2\pi f$ se propage dans l'air dans la direction $\vec{u}_x$ (Fig. 14).
Le vecteur d'onde associé est $\vec{k} = k\,\vec{u}_x$ (avec $k > 0$) et le champ électrique est :

$$\vec{E}_i = E_0 \cos(\omega t - kx)\,\vec{u}_z$$

où E_0 est un champ constant ; le champ électrique complexe associé est :

$$\underline{\vec{E}}_i = E_0\, e^{j(\omega t - kx)}\,\vec{u}_z.$$

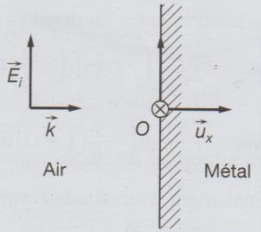


Figure 14

Cette onde incidente se propage vers un conducteur métallique (acier) de conductivité γ, de perméabilité $\mu_0\,\mu_r$ (supposée constante pour une température inférieure à 1000 °C) et de permittivité ε_0, occupant le demi-espace $x > 0$.
L'onde incidente donne naissance à une onde réfléchie (indicée R) et à une onde transmise (indicée T) dont les champs électriques s'écrivent, en notation complexe :

$$\underline{\vec{E}}_R = \underline{E}_{0R} e^{j(\omega t + k_R x)}\vec{u}_z \quad \text{et} \quad \underline{\vec{E}}_T = \underline{E}_{0T} e^{j(\omega t - \underline{k}_T x)}\vec{u}_z$$

(k_R est réel alors que $\underline{E}_{0R}$, $\underline{E}_{0T}$ et $\underline{k}_T$ sont *a priori* complexes).
Le conducteur métallique est supposé localement neutre.

1.a) Pour quelle gamme de fréquences les courants de déplacement dans le métal valent-ils moins de un pour cent des courants de conduction ? En déduire une simplification de l'équation de Maxwell-Ampère.

b) Dans ce cadre, établir l'équation vérifiée par le champ électrique dans le métal. Comment ce type d'équation s'appelle-t-il ?

c) En déduire la relation de dispersion reliant $\underline{k}_T$ à ω. Quelle est la seule solution $\underline{k}_T$ physiquement acceptable ? Dans ce cas, que représente la partie imaginaire de $\underline{k}_T$? Préciser pourquoi.

d) Calculer la vitesse de phase v_φ et la vitesse de groupe v_g de l'onde dans le métal. Le métal est-il dispersif ?
$\delta = \sqrt{\dfrac{2}{\mu_r \mu_0 \gamma \omega}}$ est un paramètre essentiel pour décrire la propagation de l'onde dans le métal.

2.a) Comment δ s'appelle-t-il ? Quelle est sa signification physique ?
Application numérique : calculer δ.

b) Exprimer $\underline{k}_T$ en fonction de δ. Quel lien existe-t-il entre k et k_R ?
Les champs magnétiques complexes incident $\underline{\vec{B}}_i$, réfléchi $\underline{\vec{B}}_R$ et transmis $\underline{\vec{B}}_T$ associés aux champs électriques $\underline{\vec{E}}_i$, $\underline{\vec{E}}_R$, et $\underline{\vec{E}}_T$ peuvent s'écrire (avec a_i réel positif, a_R réel et a_T réel positif) :

$$\underline{\vec{B}}_i = a_i\, E_0 e^{j(\omega t - kx)}\vec{v}$$
$$\underline{\vec{B}}_R = a_r \underline{E}_{0R} e^{j(\omega t + k_R x)}\vec{v}$$
$$\underline{\vec{B}}_T = a_T e^{j\varphi_T} \underline{E}_{0T}\, e^{j(\omega t - \underline{k}_T x)}\vec{v}.$$

3.a) Exprimer les coefficients a_i, a_R, a_T et le déphasage φ_T en fonction de c, ω et δ. Préciser le vecteur $\vec{v}$.
Le coefficient sans dimension $\alpha = \sqrt{\dfrac{2\varepsilon_0\,\omega}{\gamma \mu_r}}$ permettra de simplifier les expressions.

b) Écrire les relations de passage pour les champs électrique et magnétique dans le plan $x = 0$ et en déduire les deux équations suivantes entre E_0, $\underline{E}_{0R}$ et $\underline{E}_{0T}$:

$$\begin{cases} \underline{E}_{0R} + E_0 = \underline{E}_{0T} \\ \underline{E}_{0R} - E_0 = \dfrac{(-1+j)}{\alpha}\underline{E}_{0T}. \end{cases}$$

c) Préciser une relation simple entre α, ω, δ et c.
Dans la suite de cette première partie tous les calculs seront effectués au premier ordre en α.

d) Dans le cadre de cette approximation, donner alors $\underline{E}_{0R}$ et $\underline{E}_{0T}$ en fonction de E_0. Commenter les résultats obtenus dans le cas limite $\alpha = 0$.

Données numériques :

$\varepsilon_0 = \dfrac{1}{36\,\pi.10^9}$ F.m^{-1}, $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}$ H.m^{-1}, $\mu_r = 10^2$, $\gamma = 10^7\,\Omega^{-1}$.m^{-1}, $c = 3.10^8$ m.s^{-1}, $f = 100$ kHz.