

Exercice 1 : Ligne avec pertes

5. Ligne bifilaire avec pertes

(d'après CCP)

Un élément de ligne bifilaire possède en toute généralité non seulement une inductance Λdx et une capacité Γdx élémentaires, comme on l'a vu au paragraphe 3.1, mais aussi une résistance $R_0 dx$, et une conductance $G_0 dx$. Tout cela est résumé sur la figure 24.

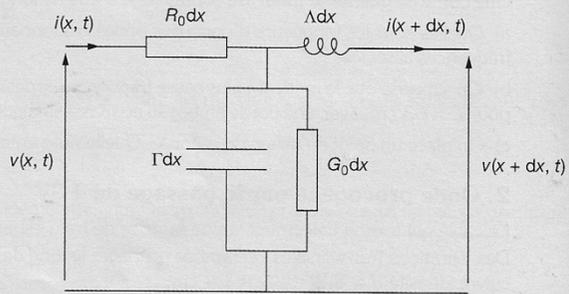


Figure 24

a) Quelle est l'origine physique de ces deux termes résistifs ?

b) Trouver les équations vérifiées par $\frac{\partial v}{\partial x}$ et $\frac{\partial i}{\partial x}$. En déduire l'équation aux dérivées partielles satisfaite par $v(x, t)$. Que retrouve-t-on pour la ligne sans perte ?

c) On cherche des solutions de l'équation précédente des télégraphistes sous la forme d'OPPH/ $\underline{v}(x, t) = v_0 e^{j(\omega t - \underline{k}x)}$ avec un vecteur d'onde complexe. Etablir la relation de dispersion.

d) On notera $\underline{k} = \pm(k_1 + jk_2)$ avec $k_1 > 0$. Montrer alors que k_2 est négatif. On posera alors $k_2 = -1/\delta$. Etablir l'expression générale de l'onde correspondant à une solution propagative sachant que la ligne s'étend entre $x = 0$ et x très grand et décrire cette onde.

A quelle vitesse se propage un signal sinusoïdal de pulsation ω ? Que se passe-t-il si on envoie à l'entrée de la ligne un signal périodique comme un signal carré, ou un signal quelconque ?

e) On se place dans le cas de faibles pertes : la tension aux bornes du conducteur ohmique de résistance $R_0 dx$ est faible devant celle aux bornes de la bobine, et le courant dans le conducteur ohmique de conductance $G_0 dx$ est faible devant le courant dans le condensateur. Montrer que ces conditions se traduisent par les approximations $R_0 \ll \Lambda \omega$ et $G_0 \ll \Gamma \omega$.

f) Réaliser un développement limité à l'ordre 2 de \underline{k}^2 en $R_0/\Lambda \omega$ et $G_0/\Gamma \omega$ pour montrer que :

$$\underline{k} \approx \frac{\omega}{c} \left(1 - \frac{j}{2\omega} \left(\frac{R_0}{\Lambda} + \frac{G_0}{\Gamma} \right) + \frac{1}{8\omega^2} \left(\frac{R_0}{\Lambda} - \frac{G_0}{\Gamma} \right)^2 \right) \text{ avec } c = \frac{1}{\sqrt{\Lambda \Gamma}}$$

On rappelle $(1+x)^{1/2} = 1+x/2 - x^2/8$ à l'ordre 2 en $x \ll 1$

dans la limite des faibles pertes. À quelle condition sur R_0 , G_0 , Λ , Γ les signaux sont-ils peu déformés au cours de leur propagation ?

On utilise une ligne telle que $R_0 \approx 10^{-2} \Omega \cdot \text{m}^{-1}$, $G_0 \approx 10^{-8} \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$, $\Lambda \approx 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$ et $\Gamma \approx 10^{-10} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$. La condition précédente est-elle vérifiée ?

g) On envoie en entrée de la ligne de longueur ℓ un signal rectangulaire de fréquence $f = 15 \text{ kHz}$. Quel est l'écart des temps Δt à la sortie entre le fondamental et le premier harmonique pour une ligne de longueur $\ell = 2 \text{ km}$? Pour que le signal ne soit pas trop déformé, il est nécessaire que $\Delta t \leq \frac{T}{100}$, où $T = \frac{1}{f}$. Qu'en est-il ?

On rappelle que le premier harmonique d'un signal rectangulaire possède une fréquence triple de celle du fondamental.

Exercice 2 : Pavillon acoustique

Pour amplifier le son perçu par l'oreille, on peut placer à son extrémité un cornet acoustique limité par une surface de révolution d'axe (Ox) et de section variable $S(x) = S_0 \exp(-\sigma x)$ où S_0 et σ sont des constantes. Au repos, la pression p_0 et la masse volumique ρ_0 sont uniformes. On note χ_0 le coefficient de compressibilité isentropique de l'air et $c = 1/\sqrt{\rho_0 \chi_0}$. L'onde acoustique est décrite par les champs $p_1(x, t)$, $\rho_1(x, t)$ et le champ des vitesses \vec{v}_1 pour lequel on fait l'approximation de l'écoulement unidimensionnel en posant $\vec{v}_1 = v_1(x, t) \vec{u}_x$.



À gauche, photographie d'un cornet acoustique; au centre, cornet acoustique du professeur Tournesol dans Hergé, les aventures de Tintin; à droite, modélisation par un pavillon rigide de section exponentielle.

Partie A – Effet amplificateur

1. En faisant un bilan de masse pour le système ouvert (V) constitué de l'air compris entre les abscisses fixes x et $x + dx$, établir l'équation :

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} = -\rho_0 \frac{\partial v_1}{\partial x} + \rho_0 \sigma v_1.$$

2. À l'aide de l'équation d'Euler et de l'équation traduisant l'évolution thermodynamique du fluide, établir deux autres équations reliant les champs p_1 , ρ_1 et v_1 .
3. On cherche des solutions en notation complexe associées à un champ de surpression de la forme :

$$\underline{p}_1 = p_M e^{j(\omega t - kx)} \quad \text{avec} \quad k \in \mathbb{C}.$$

Montrer que, pour de telles ondes, la relation de dispersion s'écrit :

$$k^2 - j\sigma k - \frac{\omega^2}{c^2} = 0.$$

4. On suppose que $\omega > c\sigma/2$ et on choisit $k' = \Re(k) > 0$.
 - (a) Expliciter le champ réel $p_1(x, t)$. Vérifier l'effet amplificateur du cornet et expliciter la distance δ caractéristique de l'amplification.
 - (b) Expliciter le champ réel $v_1(x, t)$.
 - (c) En déduire l'expression de la puissance moyenne transportée par l'onde acoustique. Commenter.
5. Que dire physiquement du cas $\omega < c\sigma/2$? L'onde transporte-t-elle de l'énergie dans ce cas?

Partie B – Discussion des hypothèses

1. À quelle condition est-il légitime de considérer que les différentes grandeurs physiques ne dépendent spatialement que de la variable x ?
2. Pourquoi écrit-on un bilan de masse plutôt que l'équation locale de conservation de la masse?

Pour aller plus loin

7. Couche anti-reflet (d'après Oral CCP)

À la surface d'un verre (indice n) on dépose une couche d'épaisseur e et d'indice N de telle sorte que l'espace est divisé en trois domaines : l'air ($x < 0$) d'indice 1, la couche ($0 < x < e$) d'indice N et le verre ($x > e$) d'indice n . Une OPPH monochromatique de pulsation ω polarisée rectilignement sur \vec{u}_z arrive dans l'air sous incidence normale et on cherche des conditions pour qu'il n'y ait pas d'onde réfléchie dans l'air. On cherche alors en notation complexe des ondes dans les trois milieux de la forme :

$$\vec{E}(x < 0) = \alpha_a \exp(j\omega t - jk_0 x) \vec{u}_z \quad ; \quad \vec{E}(x > e) = \alpha_v \exp(j\omega t - jnk_0 x) \vec{u}_z$$

et $\vec{E}(0 < x < e) = \alpha_c \exp(j\omega t - jN k_0 x) \vec{u}_z + \beta_c \exp(j\omega t + jN k_0 x) \vec{u}_z$ avec $k_0 = \frac{\omega}{c}$.

- Quelle est la forme correspondante du champ magnétique dans les trois milieux ?
- On admet la continuité dans cette configuration du champ électrique et du champ magnétique aux interfaces. Établir quatre relations entre α_a , α_v , α_c et β_c .
- En déduire les valeurs qu'il faut choisir pour e et N sachant qu'une élimination non demandée conduit à la relation :

$$\frac{(N+1)(N-n)}{(N-1)(N+n)} = \exp(2jN k_0 e).$$
- Comment expliquer qu'il subsiste un reflet violet sur un objectif ainsi traité lorsqu'on l'observe à la lumière du Soleil ?

8. Ondes électromagnétiques dans un cristal ionique (d'après oral Centrale-Supélec)

On modélise un cristal de chlorure de sodium par un réseau cubique d'ions alternativement Na^+ et Cl^- , de masses respectives m_+ et m_- . On pose $m = m_+ m_- / (m_+ + m_-)$, $\omega_T = \sqrt{K/m}$ et $\omega_p = \sqrt{ne^2 / m\epsilon_0}$ où n est le nombre volumique d'ions de chaque type. Une onde électromagnétique associée à un champ électrique $\vec{E} = E_0 \exp(j\omega t - jkz) \vec{u}_x$ se propage dans le cristal et provoque des déplacements $\delta_+(z, t)$ des ions Na^+ et $\delta_-(z, t)$ des ions Cl^- selon \vec{u}_x . Ces déplacements sont collectifs à l'échelle mésoscopique et d'extension très faible devant la longueur d'onde. On pose $\delta = \delta_+ - \delta_-$ et on décrit l'action totale de ses voisins sur un ion Na^+ (respectivement Cl^-) par une force de rappel $-K \delta \vec{u}_x$ (resp. $+K \delta \vec{u}_x$). On note n le nombre volumique d'ions Na^+ , identique au nombre volumique d'ions Cl^- .

- Montrer que $\delta(z, t)$ est solution de :

$$\ddot{\delta} + \omega_T^2 \delta = \frac{eE}{m}.$$
- Exprimer $\underline{\delta}$ en fonction de e , m , ω_T et \underline{E} et montrer que le matériau possède une conductivité complexe :

$$\underline{\sigma} = \frac{j\omega \omega_p^2 \epsilon_0}{\omega_T^2 - \omega^2}.$$

- En déduire que la relation de dispersion des ondes se met sous la forme :

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left(\frac{\omega_L^2 - \omega^2}{\omega_T^2 - \omega^2} \right)$$

où on exprimera ω_L en fonction de ω_p et ω_T . En déduire sans calculs l'existence d'une bande interdite.

12. Onde évanescente - Réflexion totale frustrée (d'après Mines-Ponts)

Une onde incidente décrite par le champ complexe $\vec{E}_i = E_{0i} \exp(j\omega t - jk_{1x}x - jk_{1z}z) \vec{u}_y$ arrive sous un angle i_1 sur un dioptré plan confondu avec le plan d'équation $z = 0$ et séparant deux milieux d'indices respectifs n_1 et n_2 . On suppose que $n_1 \sin i_1 > n_2$ de telle sorte que, dans le cadre de l'optique géométrique, l'onde serait totalement réfléchie. On cherche une onde réfractée et une onde réfléchie de la forme :

$$\vec{E}_r = E_{0r} \exp(j\omega t - jk_{1x}x + jk_{1z}z) \vec{u}_y \quad ; \quad \vec{E}_{tr} = E_{0tr} \exp(j\omega t - jk_{2x}x - jk_{2z}z) \vec{u}_y.$$

- Exprimer k_{1x} et k_{1z} en fonction de n_1 , i_1 , ω et c . Montrer que $k_{2x} = k_{1x}$ sachant que la composante tangentielle du champ électrique est continue en $z = 0$.
- En utilisant la relation de dispersion dans le milieu (2), en déduire l'expression de k_{2z} . Quelle est alors la nature de l'onde dans le milieu (2) ?

c) On place désormais deux prismes identiques d'indice $n = 1,5$ et dont la base est un triangle rectangle-isocèle en les décalant d'une distance e conformément à la figure 30. Un émetteur (E) envoie des ondes centimétriques planes progressives et deux capteurs (C_1) et (C_2) mesurent la moyenne temporelle de la puissance surfacique reçue. Prévoir la nullité ou la non-nullité des mesures \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 des deux capteurs d'une part, pour $e = 0$ et, d'autre part, pour $e = \infty$.

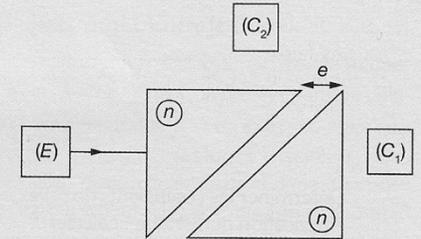


Figure 30

- La bifurcation entre les deux régimes se produit pour une distance e de l'ordre de la longueur d'onde λ . Interpréter en liaison avec la question 1.

Transmission optique (Banque PT 2013)

Les signaux optiques peuvent être utilisés pour transporter une grande quantité d'information sur d'importantes distances. Nous nous intéresserons ici à quelques caractéristiques d'une ligne de transmission optique, dont le synoptique est représenté ci-dessous (figure 1).

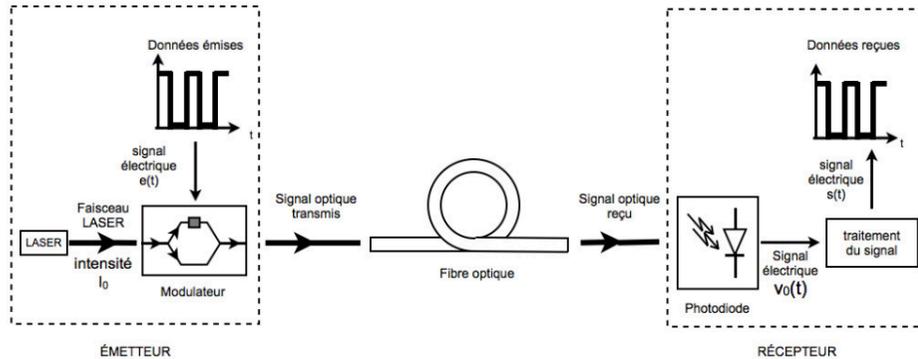


FIGURE 1 – Synoptique d'une ligne de transmission optique

Les deux premières parties traitent de la propagation guidée dans une fibre optique et des problèmes associés qui altèrent la qualité de la transmission et qui limitent le débit. Dans une troisième partie, nous nous intéresserons aux modules d'émission et de réception. Enfin, dans la quatrième partie, nous présenterons la technique de multiplexage fréquentielle qui permet de faire transiter dans une même fibre plusieurs informations simultanément.

Les 4 parties peuvent être traitées de façon largement indépendante.

I. Propagation guidée de la lumière

A. Lois de Descartes

On considère un dioptre plan séparant 2 milieux transparents et homogènes : le milieu (1) d'indice n_1 et le milieu (2) d'indice n_2 . De la lumière se propage du milieu (1) vers le milieu (2). On isole un rayon frappant le dioptre en I , et formant un angle i_1 avec (N) , normale au dioptre en I . On observe l'existence d'un rayon réfléchi dans le milieu (1) formant un angle i' avec (N) et éventuellement d'un rayon réfracté formant un angle i_2 avec (N) . Les angles sont non orientés.

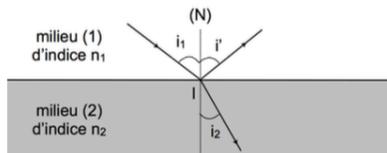


FIGURE 2 – Lois de Descartes

- I.A.1 À quelle condition peut-on considérer que la lumière est constituée de rayons lumineux indépendants ?
- I.A.2 Énoncer les lois de Descartes relatives à la réfraction et à la réflexion.
- I.A.3 Décrire le phénomène de réflexion totale : on précisera notamment la condition sur les indices et la condition sur l'angle i_1 .

B. Fibre optique à saut d'indice

Une fibre optique est un fin cylindre de verre, capable de guider la lumière sur de longues distances. Un rayon lumineux entrant à une extrémité de la fibre reste piégé à l'intérieur par réflexion totale interne.

Une fibre optique à saut d'indice est constituée d'un cœur cylindrique d'indice n_1 d'un diamètre d'environ $50 \mu\text{m}$, entouré par une gaine d'indice $n_2 < n_1$.

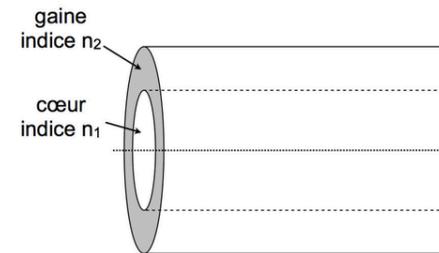


FIGURE 3 – Fibre à saut d'indice

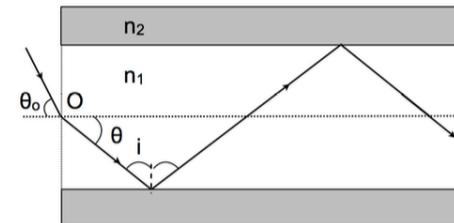


FIGURE 4 – Coupe dans le plan méridien d'une fibre à saut d'indice

- I.B.1 Montrer que tout rayon situé dans un plan contenant l'axe de la fibre et formant dans la fibre un angle θ avec l'axe peut se propager dans le cœur en restant dans ce plan si $\theta < \theta_c$, avec $\theta_c = \text{Arccos}(\frac{n_2}{n_1})$.
- I.B.2 Que risque-t-il de se passer si on courbe trop la fibre ? On pourra illustrer au moyen d'un schéma.
- I.B.3 On définit l'ouverture numérique ON de la fibre par $ON = n_1 \sin(\theta_c)$.
 - I.B.3.a Montrer que $ON = \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$.
 - I.B.3.b On pose $n_1 = n_2 + \delta n$: δn est petit. Établir une expression approchée de ON à l'ordre le plus bas non nul.
 - I.B.3.c Évaluer ON pour $n_1 = 1,53$ et $n_2 = 1,50$ avec 1 chiffre significatif.

I.B.3.d On considère que l'indice de l'air à l'extérieur de la fibre est égal à 1. Soit O le point de l'axe de la fibre situé sur le dioptre air-cœur. On note θ_0 l'angle d'incidence du rayon lumineux entrant dans la fibre en O (cf. figure 4). À quelle condition sur θ_0 le rayon se propage-t-il dans la fibre ?

C. Modes de propagation

Le but de cette partie est de montrer que, dans une fibre optique, la lumière peut se propager le long d'un nombre fini de rayons. Pour cela, nous considérerons la lumière comme une onde électromagnétique décrite par un champ électrique \vec{E} et un champ magnétique \vec{B} .

Données et rappels :

- ϵ_0 : permittivité diélectrique du vide ;
- μ_0 : perméabilité magnétique du vide ;
- Pour un champ de vecteur \vec{A} quelconque,

$$\text{rot}(\text{rot}(\vec{A})) = \text{grad}(\text{div}(\vec{A})) - \Delta(\vec{A})$$

I.C.1 Donner les équations de Maxwell dans le vide.

I.C.2 Établir l'équation de propagation de \vec{E} dans le vide et la mettre sous la forme

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

On exprimera c en fonction de ϵ_0 et μ_0 et on rappellera sa signification.

I.C.3 Justifier qu'il faut remplacer c par $\frac{c}{n}$ dans cette équation pour décrire la propagation dans un milieu transparent d'indice n .

On veut étudier la propagation d'un champ électrique \vec{E} dans la fibre. Pour simplifier, le "cœur" sera décrit par une couche plane d'indice n_1 , comprise entre les cotes $x = -a$ et $x = +a$. Pour $|x| > a$, le milieu a un indice n_2 (cf. figure 5). Pour chaque région ($|x| < a$ ou $|x| > a$), on cherche \vec{E} sous la forme :

$$\vec{E} = E(x) \cdot \cos(\omega t - k \cdot z) \vec{e}_y \text{ avec } \omega \text{ et } k \text{ positifs.}$$

On pose $\frac{\omega}{c} = k_0$ et $\lambda_0 = \frac{2\pi}{k_0}$.

On utilisera la représentation complexe : on pose $\vec{E} = E(x) \cdot e^{j(\omega t - k \cdot z)} \vec{e}_y$.

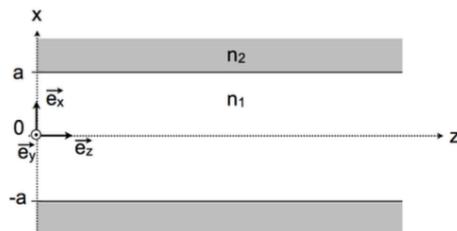


FIGURE 5 – Modélisation du cœur par une couche plane

I.C.4 On cherche \vec{B} sous la forme $\vec{B} = \vec{B}_m e^{j(\omega t - k z)}$. Exprimer \vec{B}_m en fonction de $E(x)$, k , ω , $\frac{dE(x)}{dx}$ et des vecteurs de base.

I.C.5 Justifier que $E(x)$ et $\frac{dE(x)}{dx}$ sont continues en $x = \pm a$.

I.C.6 On s'intéresse à la propagation dans la "gaine" : $|x| > a$.

I.C.6.a Écrire l'équation de propagation vérifiée par \vec{E} dans ce milieu en tenant compte de la question **I.C.3**.

I.C.6.b En déduire l'équation différentielle vérifiée par $E(x)$ pour $|x| > a$.

I.C.6.c Discuter la nature des solutions selon le signe de $n_2 \cdot k_0 - k$. En déduire la condition pour que la propagation soit guidée dans le cœur. **On considère cette condition vérifiée dans la suite.**

I.C.6.d On pose :

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{k^2 - n_2^2 k_0^2}}$$

Écrire la solution $E(x)$ sous la forme d'une combinaison linéaire de fonctions exponentielles, en fonction de δ et de constantes d'intégration qu'on ne cherchera pas à déterminer pour l'instant ; on distinguera les cas $x > a$ et $x < -a$.

I.C.7 On s'intéresse à la propagation dans le "cœur" : $|x| < a$.

I.C.7.a Écrire l'équation de propagation vérifiée par \vec{E} dans ce milieu.

I.C.7.b En déduire l'équation différentielle vérifiée par $E(x)$ pour $|x| < a$.

I.C.7.c À quelle condition sur n_1 a-t-on $E(x)$ fonction sinusoïdale de x ? **On considère cette condition vérifiée dans la suite.**

I.C.7.d On pose :

$$\eta = \sqrt{n_1^2 k_0^2 - k^2}$$

Exprimer $E(x)$ en fonction de η et de constantes d'intégration qu'on ne cherchera pas à déterminer pour l'instant.

On choisit de ne s'intéresser qu'aux solutions paires, ie telles que $E(x) = E(-x) \forall x$.

I.C.8 Pour $|x| < a$, donner l'expression de $E(x)$ en notant E_m son amplitude. Pour $|x| > a$, justifier que dans chacun des cas, le coefficient d'une des exponentielles est nécessairement nul.

I.C.9 Représenter l'allure de $E(x)$ en considérant $2a = 3 \cdot \frac{2\pi}{\eta}$ pour fixer les idées.

I.C.10 En utilisant les relations de continuité, établir la relation

$$\tan(\eta a) = \sqrt{\frac{k_0^2 \cdot ON^2}{\eta^2} - 1} \text{ avec } ON = \sqrt{n_1^2 - n_2^2}.$$

I.C.11 Expliquer comment déterminer graphiquement les solutions de cette équation d'inconnue η . Ces solutions sont appelées "modes".

I.C.12 Exprimer le nombre N total de modes en fonction de ON , λ_0 et a .

I.C.13 Évaluer N pour $\lambda_0 = 1 \mu\text{m}$, $ON = 0,3$ et $a = 25 \mu\text{m}$.

I.C.14 On admet que chaque mode correspond à un rayon d'inclinaison donnée. Exprimer la valeur maximale de a permettant d'avoir une propagation le long d'un seul rayon. L'évaluer numériquement avec 2 chiffres significatifs pour $\lambda_0 = 1 \mu\text{m}$ et $ON = 0,3$.

II. Absorption et dispersion

Le but de cette partie est de mettre en évidence les problèmes qui limitent le débit et la distance sur laquelle on peut transporter l'information.

A. Absorption

Pendant longtemps, les pertes ont été un problème majeur de la transmission le long des fibres optiques. Au début, la puissance injectée à l'entrée de la fibre était divisée par 1000 après 1 km de parcours ! Aujourd'hui, elles présentent des pertes bien moindres que les autres câbles. De plus, il est possible de placer à espace régulier le long de la fibre des amplificateurs de signal.

On définit le coefficient d'atténuation A (en dB/km) par :

$$A = 10 \cdot \log\left(\frac{\mathcal{P}_e}{\mathcal{P}'_s}\right)$$

avec :

- "log" désignant le logarithme décimal ;
- \mathcal{P}_e : puissance optique du signal en entrée de la fibre ;
- \mathcal{P}'_s : puissance optique du signal récupéré au bout de 1 km de fibre.

A dépend de la longueur d'onde λ .

II.A.1 A présente un minimum pour une longueur d'onde $\lambda_0 = 1,6 \mu\text{m}$.

II.A.1.a À quelle partie du spectre électromagnétique appartient λ_0 ?

II.A.1.b Quel phénomène est souvent responsable de l'absorption dans cette partie du spectre ?

On considère un tronçon de fibre d'axe (Oz) compris entre les cotes $z = 0$ et $z = L$. On note $\mathcal{P}(z)$ la puissance du signal récupéré en z . L'évolution de $\mathcal{P}(z)$ vérifie la loi de Beer-Lambert :

$$\frac{d\mathcal{P}}{dz} = -\alpha\mathcal{P}(z)$$

avec α une constante positive.

II.A.2 Établir l'expression de la puissance \mathcal{P}_s récupérée à la sortie de la fibre de longueur L en fonction de \mathcal{P}_e , α et L .

II.A.3 Exprimer les pertes relatives $\frac{\Delta\mathcal{P}}{\mathcal{P}} = \frac{\mathcal{P}_e - \mathcal{P}_s}{\mathcal{P}_e}$ en fonction de α et L .

II.A.4 Pour $\lambda_0 = 1,6 \mu\text{m}$, $A = 0,2 \text{ dB/km}$. Déterminer avec 2 chiffres significatifs la valeur numérique de α pour cette longueur d'onde. On donne $\ln(10) = 2,3$.

II.A.5 Exprimer $\frac{\Delta\mathcal{P}}{\mathcal{P}}$ pour $L = 10 \text{ m}$ et pour $L = 1 \text{ km}$ (on pourra faire un DL) ; commenter.

B. Dispersion intermodale

Une fibre optique multimode transporte la lumière le long de plusieurs rayons. Les rayons lumineux d'inclinaisons différentes n'ont pas le même chemin à parcourir dans la fibre, donc leur temps de parcours est variable. Il en résulte un étalement temporel du signal : ce phénomène est la dispersion intermodale.

II.B.1 Soit Δt_m la différence de temps de parcours entre deux rayons lumineux se propageant dans une fibre optique (cœur d'indice n_1 , gaine d'indice n_2) de longueur L , l'un sur l'axe de la fibre et l'autre incliné de $\theta_c = \text{Arccos}\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$ par rapport à celui-ci (cf. figure 4). Exprimer la longueur parcourue par le rayon non parallèle à l'axe en fonction de L et θ_c . En déduire Δt_m en fonction de n_1 , n_2 , L et c .

Une série d'impulsions lumineuses ultra-courtes est envoyée dans la fibre. On note T l'intervalle de temps séparant 2 impulsions successives.

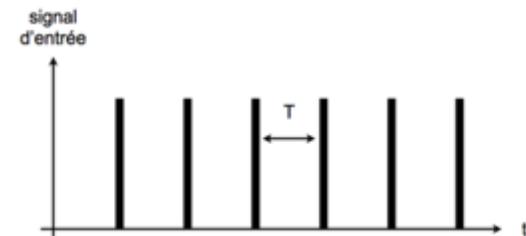


FIGURE 6 – Signal d'entrée

II.B.2 Représenter l'allure du signal récupéré à la sortie de la fibre dans le cas où $\Delta t_m < T$ et dans le cas où $\Delta t_m > T$. Commenter.

II.B.3 On note BP_m la bande-passante de la fibre associée à la dispersion intermodale : BP_m représente la fréquence maximale des signaux pouvant transiter dans la fibre. Exprimer BP_m en fonction de n_1 , n_2 , L , et c .

II.B.4 On considère $n_1 = 1,53$ et $n_2 = 1,50$. Évaluer numériquement BP_m avec 1 chiffre significatif pour $L = 10 \text{ m}$ et pour $L = 1 \text{ km}$ (on prendra $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$). Commenter. Proposer une solution s'inspirant de la question I.C.14.

II.B.5 Pour limiter la dispersion intermodale, on peut aussi utiliser une fibre à *gradient d'indice* : c'est une fibre dont l'indice n_1 du cœur dépend de la distance r à l'axe. Quel doit être le sens de variation de $n_1(r)$? Représenter qualitativement la trajectoire d'un rayon arrivant dans la fibre en formant un angle θ avec l'axe.

C. Dispersion chromatique

II.C.1 La lumière utilisée, même si elle est issue d'un L.A.S.E.R., n'est pas parfaitement monochromatique. Or l'indice n_1 du cœur dépend de la longueur d'onde. Expliquer en quoi cela limite le débit d'informations transitant dans la fibre.

II.C.2 Considérons dans un premier temps que le signal contient 2 longueurs d'onde. On s'intéresse à la superposition de 2 ondes planes progressives harmoniques (OPPH), de même amplitude S_0 , de pulsations ω et $\omega + \delta\omega$:

$$s_1(z, t) = S_0 \cos(\omega t - k \cdot z) \text{ et } s_2(z, t) = S_0 \cos((\omega + \delta\omega)t - (k + \delta k)z)$$

k (respectivement $k + \delta k$) étant lié à ω (respectivement $\omega + \delta\omega$) par une relation qu'on ne cherchera pas à établir ici. On suppose $\delta\omega$ et δk positifs et on considère $\delta\omega \ll \omega$ et $\delta k \ll k$.

II.C.2.a Établir l'expression de l'onde résultante $s(z, t) = s_1(z, t) + s_2(z, t)$. On la mettra sous la forme d'un produit.

II.C.2.b Commenter l'expression de $s(z, t)$: on justifiera que $s(z, t)$ est le produit d'une fonction aux variations spatiales et temporelles lentes, l'*enveloppe*, avec une fonction aux variations spatiales et temporelles rapides.

II.C.2.c Représenter l'allure de $s(z, t = 0)$ en fonction de z .

II.C.2.d On admet que l'information est transportée par l'enveloppe. Quel est le temps τ_g mis par l'information pour parcourir l'unité de longueur ?

Dans le cas où le spectre contient une infinité de longueurs d'onde, on caractérise la dépendance du temps de propagation de l'information τ_g par unité de longueur par rapport à la longueur d'onde par la *dispersion* $D(\lambda)$ définie par $D(\lambda) = \frac{d\tau_g}{d\lambda}$.

II.C.3 On se place à $\lambda_m = 1,5 \mu\text{m}$. Pour cette longueur d'onde, D est de l'ordre de $10 \text{ ps} \cdot \text{nm}^{-1} \cdot \text{km}^{-1}$. On note Δt_c la différence maximale de temps de parcours entre les différents composantes monochromatiques. Sachant qu'on arrive à réduire la largeur spectrale $\Delta\lambda$ en sortie du L.A.S.E.R. de façon à avoir $\Delta\lambda = 1 \text{ nm}$, donner l'ordre de grandeur de Δt_c pour $L = 1 \text{ km}$. En déduire l'ordre de grandeur de la bande passante BP_c de la fibre associée à la dispersion chromatique pour $L = 1 \text{ km}$. Commenter.

Remarques pour la suite :

— **Question III.A.1** : ne pas traiter la question (hors programme PSI et inutile pour la suite) ;

— **Question III.A.2** : pour une onde se propageant dans un milieu d'indice n , le vecteur d'onde vaut : $k = n \frac{2\pi}{\lambda}$.

Pour le calcul du déphasage Φ entre les deux ondes, il faut considérer que lorsque l'onde de la voie 2 parcourt la distance d dans le milieu d'indice n , l'onde de la voie 1 parcourt la même distance dans le milieu d'indice n_1 .

III. Émission / Réception

A. Émission

Pour transporter l'information, on utilise comme support la lumière issue d'un L.A.S.E.R. que l'on fait passer dans un modulateur : l'intensité lumineuse en sortie du modulateur varie au cours du temps en fonction du signal à transmettre.

Le modulateur étudié ici est un interféromètre de Mach-Zehnder.

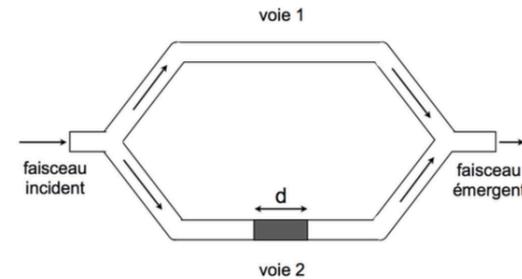


FIGURE 7 – Modulateur : interféromètre de Mach-Zehnder

On considère que le L.A.S.E.R. délivre une onde plane monochromatique de pulsation ω , de longueur d'onde dans le vide λ . Le faisceau incident est séparé en 2 faisceaux de même intensité : l'un se propage dans une fibre homogène d'indice n_1 (voie 1), l'autre se propage dans une fibre identique mais on intercale sur son trajet un milieu de longueur d dont on peut faire varier l'indice n au moyen d'une tension électrique, image du signal à transmettre (voie 2). Les 2 voies ont la même longueur totale.

En sortie, le signal optique récupéré en sortie de la voie 1 s'écrit $f_1(t) = g_0 \cdot \cos(\omega \cdot t)$ et celui récupéré en sortie de la voie 2 s'écrit $f_2(t) = g_0 \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi)$, g_0 étant une constante.

III.A.1 Rappeler le théorème de Malus.

III.A.2 Exprimer ϕ en fonction de n , n_1 , d et λ .

III.A.3 On définit l'intensité \mathcal{I} en sortie du modulateur par $\mathcal{I} = \langle (f_1(t) + f_2(t))^2 \rangle$. Établir l'expression de \mathcal{I} en fonction de ϕ et de $\mathcal{I}_0 = g_0^2$.

III.A.4 On souhaite transmettre des données numériques : l'information est alors codée sous la forme d'une succession d'impulsions. Pour cela, on doit être en mesure de réaliser $\mathcal{I} = 0$ et $\mathcal{I} = 2\mathcal{I}_0$.

III.A.4.a Exprimer en fonction de λ et d la plus petite différence Δn entre les 2 valeurs de l'indice n permettant de transmettre ce signal.

III.A.4.b Calculer Δn avec 2 chiffres significatifs pour $\lambda = 1,5 \mu\text{m}$ et pour $d = 5 \text{ cm}$.

B. Réception

Au bout du canal de transmission, l'intensité lumineuse est une image altérée du signal électrique à transmettre $e(t)$. Il faut donc transformer le signal optique de longueur d'onde λ en un signal électrique puis le mettre en forme pour reconstituer le signal initial. On propose ici une étude simplifiée du système de réception.

III.B.1 La lumière est détectée par une photodiode : c'est un dipôle dont le rôle est de convertir la puissance optique reçue \mathcal{P}_s en courant électrique de photodétection i_0 .

III.B.1.a Le rendement quantique r est défini par $r = \frac{\text{nombre d'électrons collectés}}{\text{nombre de photons incidents}}$. Sachant que l'énergie transportée par un photon vaut $\frac{h.c}{\lambda}$, avec h la constante de Planck, exprimer le courant de photodétection i_0 en fonction de la charge élémentaire e et de r , \mathcal{P}_s , λ , h et c .

III.B.1.b Évaluer i_0 avec 1 chiffre significatif pour $\mathcal{P}_s = 10$ mW, $r = 0,8$ et $\lambda = 1,5 \mu\text{m}$. On prendra $h = \frac{20}{3} \cdot 10^{-34}$ J.s, $e = \frac{5}{3} \cdot 10^{-19}$ C et $c = 3 \cdot 10^8$ m.s⁻¹.

On assimile la photodiode à une source idéale de courant délivrant i_0 . Pour convertir i_0 en tension, on utilise le montage représenté sur la figure 8.a, constitué d'un amplificateur opérationnel idéal et d'un conducteur ohmique de résistance R_f . Le montage obtenu est un montage transimpédance.

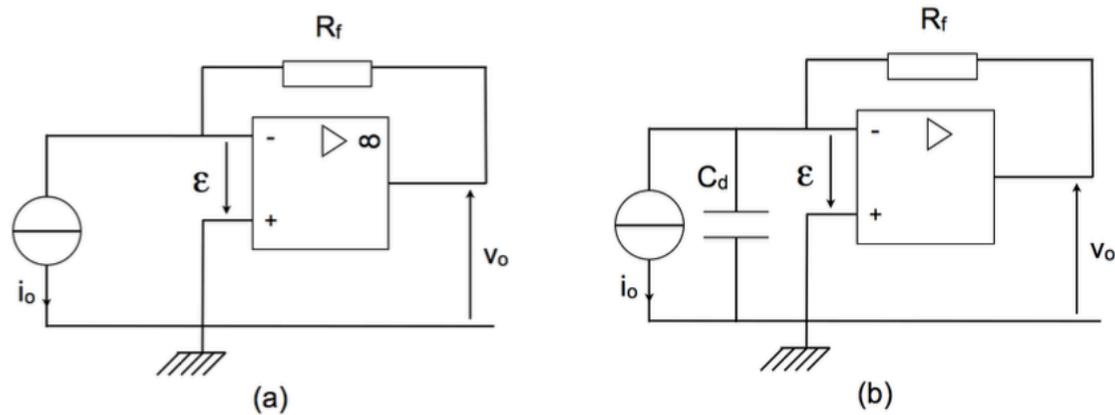


FIGURE 8 – Montage transimpédance

III.B.2 Établir la relation entre la tension de sortie V_0 et i_0 .

En réalité, la photodiode est assimilable à une source idéale de courant en parallèle avec un condensateur de capacité C_d (cf. figure 8.b). Par ailleurs, on tient compte du gain G limité de l'AO : $V_0 = G \cdot \epsilon$. On se place en régime sinusoïdal forcé à la pulsation Ω et considère $G \gg 1$.

III.B.3 Exprimer $\frac{v_0}{i_0}$ en fonction de R_f , G , C_d et Ω .

III.B.4 Quelle est la pulsation de coupure Ω_c du montage ?

III.B.5 $G = 10^5$ et $C_d = 10$ pF ; la tension de saturation V_{sat} de l'amplificateur opérationnel vaut 15 V et la valeur maximale de i_0 est 0,01 A. On souhaite être en mesure de récupérer des signaux de fréquence allant jusqu'à 100 MHz. Proposer une valeur pertinente pour R_f .