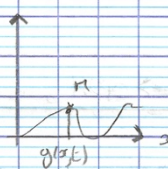
Chap 13 : Phénomènes de propagat° linéaires - Absorpt° et dispersion

I - Généralités sur la dispersion et l'absorpt° ds des milieux linéaires : Eq de propagat° linéaire

1° - Exple d'éq de propagat° linéaire

• Cas de la corde vibrante amortie



Prenons en compte un frottement fluide linéaire.

$d\vec{F} = -\alpha \vec{v}(x,t)\, dl$

↳ coeff de frottement linéique

Approx des faibles perturbations → $dl \approx dx$

$d\vec{F} = -\alpha \frac{\partial y}{\partial t} dx \vec{e}_y$

PFD appliqué à un elt de corde dl

$\lambda dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \vec{e}_y = \vec{T}(x+dx) - \vec{T}(x)$

↳ force linéique $-\alpha \frac{\partial y}{\partial t} dx \vec{e}_y$

$/\vec{e}_y$: $\lambda dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx - \alpha \frac{\partial y}{\partial t} dx$

$\Leftrightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\lambda}{T_0} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\alpha}{T_0} \frac{\partial y}{\partial t}$

$\Leftrightarrow \boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \gamma \frac{\partial y}{\partial t}}$, $\boxed{\gamma = \frac{\alpha}{T_0}}$

→ Eq diff linéaire

→ irréversible → phénomène de dissipat°

• Autres exemples :

- diff° thermique $\frac{\partial T}{\partial t} = D_{th} \Delta T$
- effet de peau : $\Delta \vec{E} = \mu_0 \gamma \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$
- Onde acoustique avec viscosité : [illegible]
$\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = -\frac{\eta}{\mu_c^2} \frac{\partial^3 p_1}{\partial x^2 \partial t}$
- Câble coaxial avec pertes
$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = (\lambda\Gamma + \mu g) \frac{\partial v}{\partial t} + \lambda g v$
- Onde électromagnétique ds le plasma :
$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

2° - Recherche de solution => OPPH généralisée => $\underline{k}$

Eq linéaire → on cherche des sol sinusoïdales ds le tps à ω, expl : excitat° d'une corde à ω, ondes thermiques

$y(x,t) = f(x) e^{j\omega t}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \gamma \frac{\partial y}{\partial t}$

$\left[\frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{\omega^2}{c^2} f\right] e^{j\omega t} = \gamma j\omega f e^{j\omega t}$

$\frac{d^2 f}{dx^2} + f\left[\frac{\omega^2}{c^2} - \gamma j\omega\right] = 0$

↳ sol selon la base de sol en $e^{\pm \underline{k} x}$ → en $e^{\pm j k x}$

$y(x,t) = e^{j(\omega t \pm kx)}$

↳ OPPH avec $\underline{k}$ sol des eq diff à coeffs cstes.

• si $\underline{k} \neq \frac{\omega}{c}$, pas d'Alembert

• les sol de d'Alembert sont incluses ds ces OPPH.

3° - Contenu physique de la relat° de dispersion

a) Obtention de la relat° de dispersion $k(\omega)$

On considère une onde qui se propage selon $(Ox)^+$.

$\underline{y}(x,t) = A e^{j(\omega t - \underline{k}x)}$

$-\underline{k}^2 \underline{y} + \frac{\omega^2}{c^2}\underline{y} = \gamma j\omega \underline{y} \Leftrightarrow \underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \gamma j\omega$

$\Leftrightarrow \boxed{\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\left(1 - \frac{\gamma c^2 j}{\omega}\right)} \in \mathbb{C}$

↳ relat° de dispersion non-linéaire

b) Absorpt° liée à la partie imaginaire de $\underline{k}$

Pr faire apparaître ⊕ simplemt la signification physique de l'absorpt°, linéarisons la relat° de dispersion.

$\underline{k} = \pm \frac{\omega}{c}\left(1 - \frac{\gamma c^2 j}{\omega}\right)^{1/2}$

DL 1ᵉʳ ordre

↳ $\underline{k} \simeq \pm \frac{\omega}{c}\left(1 - \frac{\gamma c^2 j}{2\omega}\right) \simeq \pm\left(\frac{\omega}{c} - \frac{\gamma c}{2} j\right) \simeq \pm(k_1 + k_2 j)$

→ $k_1 = \mathrm{Re}(\underline{k}) = \frac{\omega}{c}$

→ $k_2 = \mathrm{Im}(\underline{k}) = -\frac{\gamma c}{2}$

Propagat° en $e^{j(\omega t - kx)}$

$\underline{k} \simeq +(k_1 + k_2 j)$ selon $(Ox)^+$

$\underline{y}(x,t) = A e^{j(\omega t - [k_1 + k_2 j]x)} = A e^{k_2 x} e^{j(\omega t - k_1 x)}$

$\boxed{y(x,t) = \mathrm{Re}(\underline{y}(x,t)) = A e^{k_2 x} \cos(\omega t - k_1 x)}$ Partie propagative, $k_1 > 0$

Atténuat° exp de l'amplitude pilotée par k_2, partie im de $\underline{k}$ ici $k_2 < 0$

Avec $k_2 < 0$ → onde amortie sur une distance caractéristique $\delta = \frac{1}{|k_2|}$

- ici $k_2 \neq f(\omega)$, k_2 est $\neq$ ds d'autres situations, k_2 dep de ω

↳ Rappel épaisseur de peau $\delta = \sqrt{\frac{1}{\sigma \mu_0 \omega}}$, $k_2 = f(\omega)$

- $\exists\, k_2 > 0$

Amplificat° de l'onde ds milieux exple à cavité laser

- Ds un plasma, on peut avoir $k_1 = 0$ et $k_2 < 0$

Onde type $y(x,t) = A e^{k_2 x}\cos\omega t$

Il n'y a plus de propagat°. Il s'agit d'une onde stationnaire amortie → c'est l'onde évanescente

c) Dispersion liée à la partie réelle de $\underline{k}$ et au caractère non-linéaire de la relat° de dispersion.

- caractère non-réel de la relat° de dispersion $k(\omega)$

→ à l'ordre 1, $k_1 = \frac{\omega}{c}$

$v_\varphi = \frac{\omega}{k_1} = c$ → vit de phase indep de ω

↳ pas de dispers° avec $k(\omega)$ linéarisé

→ à l'ordre 2, $(1+\varepsilon)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}\varepsilon - \frac{1}{8}\varepsilon^2$

↳ $\underline{k} \simeq \frac{\omega}{c}\left[1 - \frac{\gamma c^2}{\gamma\omega}\right]^{1/2} \simeq \frac{\omega}{c}\left[1 - \frac{\gamma c^2}{2\omega} + \frac{1}{8}\frac{c^4}{\gamma^2\omega^2}\right]$

$k_1 = \frac{\omega}{c}\left[1 + \frac{1}{8}\frac{c^4}{\gamma^2\omega^2}\right] = \frac{\omega}{c} + \frac{1}{8}\frac{c^3}{\gamma^2\omega}$

↳ $k_1(\omega)$ relat° non-linéaire

- Conséquence sur la vitesse de phase

$y(x,t) = A e^{k_2 x}\cos(\omega t - k_1 x)$ phase ϕ

↳ vit de déplacemt de ϕ, $\phi = \omega t - k_1 x$

$\phi = \text{cte} \Rightarrow d\phi = \omega\, dt - k_1\, dx = 0$

$\Leftrightarrow \boxed{v_\varphi = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k_1} = \frac{\omega}{\mathrm{Re}(\underline{k})}}$?

D'autre part, $y(x,t) = \cos(\omega t - k_1 x)$

$y(x,t) = \cos\left(\omega\left(t - \frac{k_1}{\omega}x\right)\right)$ de $\cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{v_\varphi}\right)\right]$

Ici $v_\varphi = \frac{\omega}{k_1} = \frac{\omega}{\mathrm{Re}(\underline{k})} = \frac{c}{1 + \frac{1}{8}\frac{c^4}{\gamma^2\omega^2}}$

v_φ fct de ω, $v_\varphi \neq$ cte, il y a dispersion

↳ ≠ composantes sinusoïdales se propagent à ≠ vitesses
↳ déformat° de la perturbat°
Il y a dispersion du milieu

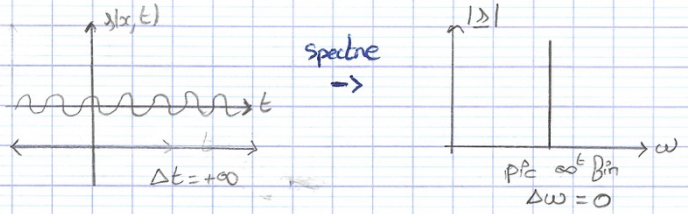
Rq : • ces ondes électromag ds milieu ≠ le verre
$v_\varphi = \frac{c}{n}$, $n \geq 1$, $(n = \sqrt{\varepsilon_r})$
Milieu dispersif v_φ dep de ω de dep de λ => $n(\lambda)$ indice optique dep de λ, le milieu est transparent de ps absorbant mais il y a dispersion.
• ⚠ propagat° guidée sur des modes -> dispers° modale (sans atténuat°)

II. Propagat° d'un paquet d'ondes ds un milieu dispersif et non absorbant

↳ codre $\underline{k} = k \in \mathbb{R}$, ps de partie imaginaire

1°- OPPH : onde monochromatique

↳ une seule pulsat° ω, un seul $\vec{k}$
A $t=0$ date initiale $\underline{s}(x,t=0) = A_0 e^{ikx}$
A $t>0$ date ultérieure $\underline{s}(x,t>0) = A_0 e^{i(\omega t - kx)} = A_0 e^{i\omega(t - \frac{x}{v_\varphi})}$
$= \beta(t - \frac{x}{v_\varphi})$
↳ transpat° du profil de l'onde sans déformat°
Mais cette onde a une extension spatiale et temporelle ∞, ni fin ni début -> ps de sens physique



Rq : v_φ peut être > c car vitesse de l'OPPH n'a ps de réalité => transporte ni énergie ni inform°

2°- 1ère approche : superposit° de 2 OPPH de freq voisines et vitesse de groupe

(propagat° selon la ≠ direct°)
$s(x,t) = s_1(x,t) + s_2(x,t) = A_0[\cos(\omega_1 t - k_1 x) + \cos(\omega_2 t - k_2 x)]$
$= 2A_0 \left(\cos\left[\frac{\omega_1+\omega_2}{2} t - \frac{k_1+k_2}{2} x\right]\right.$
$\left. \times \cos\left[\frac{\omega_1-\omega_2}{2} t - \frac{k_1-k_2}{2} x\right]\right)$

On def la pulsat° moyenne $\omega_0 = \frac{\omega_1+\omega_2}{2}$,

le vecteur d'onde moyen $k_0 = \frac{k_1+k_2}{2}$.

La diff de pulsat° $\delta\omega = \omega_1 - \omega_2 \ll \omega_0$ et la diff de k, $\delta k = k_1 - k_2$
$s(x,t) = 2A_0 \cos(\omega_0 t - k_0 x) \cos\left(\frac{\delta\omega}{2} t - \frac{\delta k_0}{2} x\right)$
$= 2A_0 \underbrace{\cos\left[\omega_0 (t - \frac{k_0}{\omega_0} x)\right]}_{\text{vibrat° moyenne rapide à } v_\varphi = \frac{\omega_0}{k_0}} \underbrace{\cos\left[\frac{\delta\omega}{2}(t - \frac{\delta k}{\delta\omega} x)\right]}_{\text{enveloppe aux voisat° lentes à } v_g}$
$= 2A_0 \cos\left[\omega_0 (t - \frac{x}{v_\varphi})\right] \cos\left[\frac{\delta\omega}{2}(t - \frac{x}{v_g})\right]$

$$v_g = \frac{\delta\omega}{\delta k}$$

-> phénomène de battem^t, max de l'enveloppes = interférences constructives
Mais cette superposit° d'OPPH n'a ni dbt ni fin
Il faut superposer un continuum d'OPPH de pulsat° proches de ω_0.
Pr déterminer l'express° de v_g il faut suivre le paq

des interf constructives de ttes ces ondes
↳ elles doivent ê ttes en phase dc leurs phases st identiques en x à t.

$\phi(x,t,\omega) = \omega t - kx + \varphi(\omega) = cste$

$\varphi(\omega)$ est la phase à l'origine des OPPH ps forcém^{t} $=0$

$$\left(\frac{d\phi}{d\omega}\right)_{\omega_0} = 0 = t - \left(\frac{dk}{d\omega}\right)_{\omega_0} x + \left(\frac{d\varphi}{d\omega}\right)_{\omega_0}$$

$$\Leftrightarrow \quad x\left(\frac{dk}{d\omega}\right)_{\omega_0} = t + \left(\frac{d\varphi}{d\omega}\right)_{\omega_0}$$

$$dx\left(\frac{dk}{d\omega}\right)_{\omega_0} = dt + 0$$

$$v_g = \frac{dx}{dt} = \left(\frac{d\omega}{dk}\right)_{\omega_0} \Rightarrow \boxed{v_g = \frac{d\omega}{dk}}$$ ♡

3°- Def du paquet d'ondes

Un paquet d'ondes est une superposit° d'OPPH (se propageant ds la m̂ direct°) de pulsat° proche de ω_0, càd d'extension spectrale $\Delta\omega \ll \omega_0$

Ceci implique une extens° tporelle (et spatiale) finie.

Bs à connaître par ♡ :

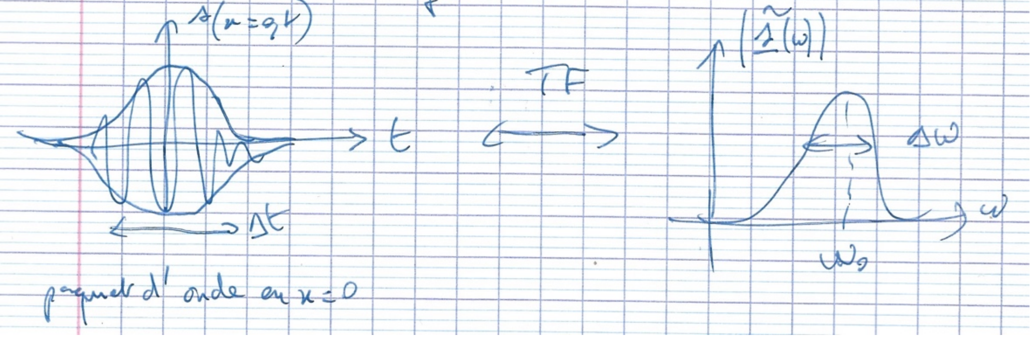
$$s(x,t) = \sum_{\omega} dA(\omega) \cos(\omega t - kx + \varphi)$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{s}(\omega)\cos(\omega t - kx + \varphi)\, d\omega$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} \hat{s}(\omega)\cos(\omega t - kx + \varphi)\, d\omega$$
pulsat° positive
$$\simeq \frac{1}{\pi}\int_{\Delta\omega} \hat{s}(\omega)\cos(\omega t - kx + \varphi)\, d\omega$$

$$\underline{s}(x,t) \simeq \frac{1}{\pi}\int_{\Delta\omega} \underline{\hat{s}}(\omega)\, e^{j(\omega t - kx)}\, d\omega$$

$\underline{\hat{s}}$ transformée de Fourier tporelle de $s(x=0,t)$ et correspond à la densité spectrale

$$\underline{\hat{s}}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{s(x=0,t)}_{B(t)\,\to\,\text{le signal}}\, e^{j\omega t}\, dt$$

$$\tilde{s}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{s(x=0,t)}_{\text{f° de } t\,!}\, e^{-j\omega t}\, dt$$



Relat° tps/freq, extens° tporelle versus extens° spectrale :

$\Delta t \Delta\omega \simeq 1$

↳ extens° spatiale $\Delta x = c\,\Delta t$ (vitesse de l'onde) $(\Delta x \Delta k \simeq 1)$

4°- Propagat° du paquet d'ondes

Considérons un paquet d'ondes (avec $\Delta\omega \ll \omega_0$ "étroit"). L'instant $t=0$ est choisi par la date de passage du max de l'enveloppe soit à $x=0$.

$$\underline{s}(0,t) = \frac{1}{\pi}\int_{\Delta\omega} \underline{\hat{s}}(\omega) e^{-j\omega t}\, d\omega$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{\Delta\omega} \underline{\hat{s}}(\omega) e^{j(\omega t - kx)}\, d\omega$$

Utilisons un DL de $k(\omega)$ au voisinage de ω_0 :

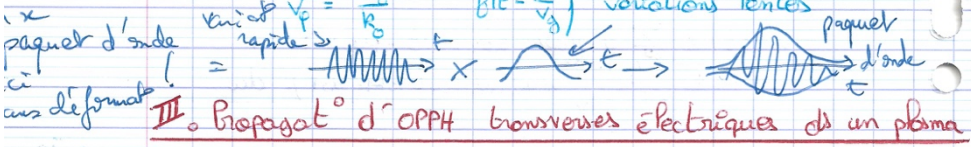
$$k(\omega) = k(\omega_0) + \left(\frac{dk}{d\omega}\right)_{\omega_0} d\omega = k_0 + \left(\frac{dk}{d\omega}\right)_{\omega_0} (\omega - \omega_0)$$

$$\underline{s}(x,t) = \frac{1}{\pi}\int_{\Delta\omega} \underline{\hat{s}}(\omega) e^{j\left[(\omega_0 t - \omega_0 t + \omega t) + k_0 x - \frac{dk}{d\omega} d\omega\, x\right]} d\omega$$

$$= \frac{1}{\pi} e^{j(\omega_0 t - k_0 x)} \int_{\Delta\omega} \underline{\hat{s}}(\omega) e^{j(\omega-\omega_0)t - \left(\frac{dk}{d\omega}\right)(\omega-\omega_0)x}\, d\omega$$

$$\underline{s}(x,t) = \underbrace{\text{OPPH de célérité } v_\varphi = \frac{\omega_0}{k_0}}_{\text{variat° rapide}} \times \underbrace{\text{enveloppe } f\left((\omega-\omega_0)\left[t - \frac{x}{\left(\frac{d\omega}{dk}\right)}\right]\right)}_{\text{variations lentes}}$$

$\beta(t - \frac{x}{v_g})$



III. Propagat° d'OPPH transverses électriques ds un plasma

1°- Def d'un plasma et modèle du plasma étudié

Plasma = gaz ionisé → e^- libres + cations

↳ Apport énergétique >> Enlaison des e^- de valence

→ cœur des étoiles → apport thermique

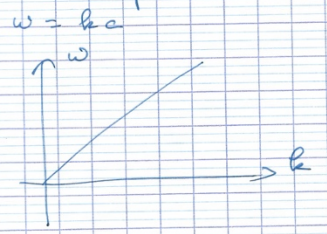
⇒ $kT \gg$ Enlaison ($T > 10^4$ K)

→ ionosphère → rayonnemt UV solaires → le plasma

Ds un milieu dispersif $v_g \neq v_\varphi$!

Relat° de dispers° linéaire

$\omega = kc$

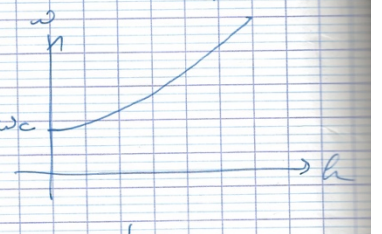


v_φ indpdt de ω et $v_\varphi = v_g$

v_g est la pente

Pas de dispers°

Relat° de dispers° non linéaire



$v_\varphi = \frac{\omega}{k} \neq v\frac{d\omega}{dk} = v_g$

Dispers°

Pour un paquet d'ondes ⊛ étroit ds un milieu dispersif il faut prdre en compte les termes d'ordre supérieur ds le développement limité de la relat° de dispers°.

Ds le milieu dispersif

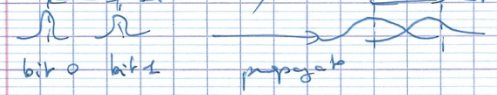
→ $v_\varphi = f(\omega)$ ou $\frac{dv_\varphi}{d\omega} \neq 0$

Les composantes spectrales se propagent à des vitesses ≠ : étalement du paquet d'onde de l'enveloppe

→ la déformat° est d'autant + rapide que v_g varie fortement avec ω ($\frac{dv_g}{d\omega}$ important)

Rqs) ↓ de l'amplitude car conservat° de l'énergie (étalement temporel)

→ limitat° du débit d'informat° (ds les télécom par fibre optique) dans un milieu dispersif



malgré des bits consécutifs, brouillage de l'information par recouvrement des paquets d'onde.

chap 13
③

→ focalisat° d'un laser (→ chp disruptif), projet ITER
On étudie un plasma classique (nn relativiste, dilué et chaud) à l'équilibre thermodynamique
Plasma d'hydrogène
↳ H^+ ions charges e^+
e^- charges e^-

Au repos, $n_i = n_0$ et $n_e = n_0$, globalem^t de charge nulle avec $\rho = \underbrace{n_0 e}_{\text{ions}} - \underbrace{n_0 e}_{\text{électrons}} = 0$, avec ρ la densité volq de charges.

Ap passage onde : $n_i = n_0 + \delta n_i(M,t)$, $n_e = n_0 + \delta n_e(M,t)$ avec δn_i et δn_e perturbat° d'ordre 1.

Hypothèse de dilut° de plasma :

On néglige les interactions binaires ⇒ collisions coulombiennes → déviat° à courte portée
$\vec{E} = \vec{E}_{\text{mésoscopique}}$ → créé par charges et courants

2° - Modélisat° microscopique : vitesse des e^- et vecteur densité de courant

La vit des e^- est la vit moy d'un e^- à l'échelle mésoscopique qui "fait disparaître" le terme d'agitat° thermique ($v_e \gg v_{th}$)

$$\frac{D\vec{v_e}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v_e}}{\partial t} + \underbrace{(\vec{v_e} \cdot \vec{\text{grad}})\vec{v_e}}$$

terme d'ordre 2 en v_e, nn linéaire
→ a déplacem^t d'un e^- ≪ λ

Force de Lorentz : $\vec{F}_{Lorentz} = -e\vec{E} - e\vec{v_e} \wedge \vec{B}$

Cas de l'OPPH ds le vide :

$$\left|\frac{F_{mag}}{F_{elec}}\right| \propto \left|\frac{q v_e B}{q E}\right| = v_e \left|\frac{B}{E}\right| = \frac{v_e}{c}$$

Cas de l'OPPH ds le milieu :

$$\vec{\text{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Leftrightarrow -j\vec{k} \wedge \vec{E} = j\omega \vec{B}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}}$$

$$\boxed{\left|\frac{B}{E}\right|} \propto \frac{k}{\omega} = \boxed{\frac{1}{v_\varphi}}$$

$$\boxed{\left|\frac{F_{mag}}{F_{elec}}\right| = \frac{v_e}{v_\varphi}} \ll 1$$ car $v_e \ll c < v_\varphi$ nn relativiste

"PFD" :

$$m_e \frac{\partial \vec{v_e}}{\partial t} = -e\vec{E}$$

Ici, $\vec{E} = E_0 \vec{u_y} e^{j(\omega t - kx)}$ prop selon $(Ox)^+$

$$m_e j\omega \vec{v_e} = -e\vec{E}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\vec{v_e} = -\frac{e}{m_e j\omega}\vec{E}}$$

v_e % à $\vec{E}$, les e^- oscillent selon $\vec{E}$

↳ Pr les cations H^+ : ions

$$\boxed{\vec{v_i} = \frac{e}{m_i j\omega}\vec{E}}$$

$$\left|\frac{\vec{v_i}}{\vec{v_e}}\right| \propto \frac{m_e}{m_i} = \frac{m_e}{m_{i\,\text{protons}}} \simeq \frac{1}{1800}$$
↳ H^+

Les ions st considérés ĉ immobiles (effet de leur inertie).

Vecteur densité de courant :

$$\vec{j} = \rho_e \vec{v_e} = -e n_e \vec{v_e} = -e(n_0 + \delta n_e)\vec{v_e}$$ au 1er ordre

$$\boxed{\vec{j} = -e n_0 \vec{v_e}}$$

3° - Conductivité électrique complexe du plasma et interprétat° énergétique

$\vec{j} = \frac{n_e e^2}{m_e j\omega}\vec{E} \Rightarrow \boxed{\vec{j} = \gamma \vec{E}}$

$\gamma = \frac{n_e e^2}{m_e j\omega} \Rightarrow \gamma \in \mathbb{C}$ imaginaire pur

- Interprétat° énergétique :
  $\vec{j}$ et $\vec{E}$ st en quadrature
  $\langle P_v \rangle = \langle \vec{j} \cdot \vec{E} \rangle = 0$
  ↳ pas de dissipat° d'énergie en moyenne

- Neutralité locale : densité locale de charges
  $\rho = e[n_0 + \delta n_i(r,t)] - e[n_0 + \delta n_e(r,t)]$
  $= e[\delta n_i - \delta n_e] = 0$?

Eq de conservat° de la charge : $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0$
avec $\vec{j} = \gamma \vec{E}$
$\operatorname{div} \vec{j} = \operatorname{div}(\gamma \vec{E}) = \gamma \operatorname{div} \vec{E} = \gamma \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ MG

$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\gamma}{\varepsilon_0}\rho = 0 \Leftrightarrow \left[j\omega + \frac{\gamma}{\varepsilon_0}\right]\rho = 0$

$\Leftrightarrow \left[j\omega + \frac{n_e e^2}{\varepsilon_0 m_e j\omega}\right]\rho = 0 \Leftrightarrow j\omega\left[1 - \frac{n_e e^2}{\varepsilon_0 m_e \omega^2}\right]\rho = 0$ (ω_p^2)

$\Leftrightarrow j\omega\rho\left[1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2\right] = 0$, $\omega_p^2 = \frac{n_e e^2}{m_e \varepsilon_0}$

→ si $\omega \neq \omega_p$: $\rho = 0$, le plasma demeure neutre
$\operatorname{div} \vec{E} = -j\vec{k} \cdot \vec{E} = 0$
$\vec{k} \cdot \vec{E} = 0$ → ondes électriques transverses uniquement
→ si $\omega = \omega_p$; $\rho \neq 0$
Il existe des ondes longitudinales ~~Elec~~ HP

- Expression de γ : $\boxed{\gamma = \frac{\varepsilon_0 \omega_p^2}{j\omega}}$

4° - Equat° de propagat° et relat° de dispersion

Avec la relat° constitutive du milieu $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ on peut résoudre les eq de Maxwell ds les milieux.

$\operatorname{div} \vec{E} = 0$ $\qquad$ $\operatorname{div} \vec{B} = 0$

$\overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ $\qquad$ $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{B} = \mu_0 j + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

$= \mu_0 \gamma \vec{E} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

$-1/c^2$

$\Rightarrow$ 1ère méthode :

$\overrightarrow{\operatorname{rot}}(\overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{E}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{E}) - \Delta \vec{E} = -\Delta \vec{E}$

$\Leftrightarrow \Delta \vec{E} = \frac{\partial(\overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{B})}{\partial t} = \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$

$\Leftrightarrow \Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

$\Leftrightarrow \boxed{\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \gamma j\omega \vec{E}}$

↳ eq diff linéaire
↳ réversible (qd remplace par $-t$) → sans dissipat°

~~2ème méthode :~~
~~$\operatorname{div} \vec{E} = 0 \rightarrow \vec{k} \cdot \vec{E} = 0$~~
~~$\overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{E} = -$~~

$\Rightarrow$ Relat° de dispersion :
$\vec{E} = E_0 \vec{u_y}\, e^{j(\omega t - kx)}$

op 13

5

$$\left[-\underline{k}^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right]\underline{\vec{E}} = \mu_0 \underline{\gamma}\, j\omega \vec{E}$$

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \mu_0 \gamma j\omega = \frac{\omega^2}{c^2} - \mu_0 \frac{\varepsilon_0 \omega_p^2}{j\omega} j\omega$$

$$\boxed{\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega_p^2}{c^2}}$$

=> 2ème méthode :

$\mathrm{div}\,\underline{\vec{E}} = 0 \quad \Rightarrow \underline{\vec{k}} \cdot \underline{\vec{E}} = 0$

$\vec{\mathrm{rot}}\,\underline{\vec{E}} = -\frac{\partial \underline{\vec{B}}}{\partial t} \quad \Rightarrow j\underline{\vec{k}} \wedge \underline{\vec{E}} = j\omega \underline{\vec{B}}$

$\underline{\vec{k}} \wedge \underline{\vec{E}} = \omega \underline{\vec{B}} \quad \Rightarrow (\vec{k}, \vec{E}, \vec{B})$ trièdre direct

$\vec{\mathrm{rot}}\,\underline{\vec{B}} = \mu_0 \underline{\gamma}\, \underline{\vec{E}} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

$j\underline{\vec{k}} \wedge \underline{\vec{B}} = \left[\mu_0 \underline{\gamma} + \frac{j\omega}{c^2}\right]\underline{\vec{E}}$

$\underline{\vec{k}} \wedge \underline{\vec{B}} = \left[\mu_0 \cancel{j} \frac{\varepsilon_0 \omega_p^2}{\cancel{j}\omega} - \frac{\omega}{c^2}\right]\underline{\vec{E}} = \frac{\omega}{c^2}\left[\frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1\right]\vec{E}$

$\rightarrow \vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$

$\underline{\vec{k}} \wedge (\underline{\vec{k}} \wedge \vec{E}) = -k^2 \underline{\vec{E}} = \underline{\vec{k}} \wedge \omega \underline{\vec{B}} = \frac{\omega^2}{c^2}\left[\frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1\right]\vec{E}$

$$\boxed{\underline{k}^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}}$$

5° - Cas des ondes progressives

$\omega > \omega_p$ domaine de transparence

∘ Vecteur d'onde

$\omega > \omega_p \rightarrow \underline{k}^2 > 0$ dc $k \in \mathbb{R} \rightarrow \mathrm{Im}(k) = 0$, ps d'atténuat° mais ⚠ dispersion

$$k = \pm \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{c} \Rightarrow k(\omega)$$

∘ Chps $\vec{E}$ et $\vec{B}$

$\underline{\vec{E}} = E_0 \vec{u_y} e^{j(\omega t - kx)} \rightarrow \vec{E} = E_0 \vec{u_y} \cos(\omega t - kx)$

$\vec{B} = \frac{k E_0}{\omega} \cos(\omega t - kx)\, \vec{u_z}$ $\quad \frac{E_0}{v_p}$ il y a propagat°

$\vec{E}$ et $\vec{B}$ st en phase

∘ Vitesse de phase :

$$v_p = \frac{\omega}{k} = \frac{c\omega}{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2}} > c$$

$v_p = f(\omega) \rightarrow$ milieu dispersif

∘ Pr $\omega \gg \omega_p$, $v_p \rightarrow c$, on retrouve le comportem^t du vide. Les e^- oscillent avec une ampl très faible pr $\omega \gg \omega_p$ = pulsat° naturelle, les courants associés st faibles.

∘ Pr $\omega \rightarrow \omega_p$, $v_p \rightarrow +\infty$, interact° importante onde/e^-

∘ Vitesse de groupe

$v_g = \frac{d\omega}{dk}$, $c^2k^2 = \omega^2 - \omega_p^2$ différentiel

$2k\,dk\,c^2 = 2\omega\, d\omega \iff \frac{d\omega}{dk} \times \frac{\omega}{k} = c^2$

$v_g v_p = c^2 \iff v_g = \frac{c^2}{v_p} \iff \boxed{v_g = c\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^p}} < c$!

Pr $\omega \gg \omega_p$, $v_g \simeq v_p = c$ plus de dispersion

∘ Vect de Poynting et vit de propagat° de l'énergie

$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$, $\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2}\frac{E_0^2}{\mu_0 v_p} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2 \frac{c^2}{v_p}\vec{u_x}$

avec $v_g v_p = c^2$

5)

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_0^2 v_g \vec{u_x}$$

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \langle u \rangle \times v_g \vec{u_x}$$

Densité d'énergie — vitesse de transport de l'énergie

Précision sur $\langle u \rangle$: ici $\langle u \rangle = \langle u_{em} \rangle + \langle e_c \rangle$

$e_c = \frac{1}{2} n_0 m_e v_e^2$ → e cinétique volq

→ Bilan d'énergie :

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle u \rangle + \operatorname{div} \vec{\Pi} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle u_{em} + e_c \rangle + \operatorname{div} \vec{\Pi} = 0$$

eqv $\frac{\partial \langle u_{em} \rangle}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{\Pi} = -\vec{j} \cdot \vec{E}$, $\frac{\partial \langle e_c \rangle}{\partial t} = \vec{j} \cdot \vec{E}$ tR énergie cinétique

(pas d'ep pour $\vec{F} = q\vec{E}$ car $\langle P \rangle = \langle \vec{v} \cdot \vec{E} \rangle$ $\vec{v}$ et $\vec{E}$ en quadra. $\Rightarrow = 0$)

→ Retour sur les approx :

$v \ll c < v_\varphi$ de $\frac{F_{mag}}{F_{elec}} \ll 1$.

6° Cas $\omega < \omega_p$: ondes évanescentes, milieu réactif

○ Vecteur d'onde

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$$, $\omega < \omega_p \Rightarrow \underline{k}^2 < 0$, k imaginaire pur

$\operatorname{Re}(k) = 0$ → pas de propagat°

$\underline{k} = \pm j/\delta$, δ épaisseur caractéristique

$$\delta = \frac{1}{|k|}$$

Pr un demi-espace de $x = 0$ à $x = +\infty$,

$\underline{k} = -j/\delta$

$\vec{E} = E_0 \vec{u_y} e^{j(\omega t + \frac{j}{\delta} x)} = E_0 \vec{u_y} e^{-x/\delta} e^{j\omega t}$

= évanescente

$\vec{E} = E_0 \vec{u_y} e^{-x/\delta} \cos \omega t$, onde stationnaire amortie → pas de propagat°

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} = \frac{-\frac{j}{\delta} \vec{u_x} \wedge E_0 \vec{u_y} e^{-x/\delta} e^{j\omega t}}{\omega}$$

$$= \frac{E_0}{\delta \omega} \vec{u_z} e^{-x/\delta} e^{j(\omega t - \pi/2)}$$

$$\vec{B} = \frac{E_0}{\delta \omega} \vec{u_z} e^{-x/\delta} \sin(\omega t)$$

$\vec{E}$ et $\vec{B}$ st en quadrature

○ Vecteur de Poynting

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \left\langle \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \right\rangle = \vec{0}$$

ca $\langle \vec{E} \wedge \vec{B} \rangle \propto \langle \sin \omega t \cos \omega t \rangle$, en quadrature

Pb de propagat° de l'énergie en moyenne

○ Densité d'énergie électromagnétique

$$\langle u_{em} \rangle = \left\langle \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} \right\rangle$$

$$= \frac{E_0^2}{4} e^{-\frac{2x}{\delta}} \left(\varepsilon_0 + \frac{1}{\mu_0 \delta^2 \omega^2} \right)$$

$$= \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{4} e^{-\frac{2x}{\delta}} \left(1 + \left(\frac{c}{\delta \omega} \right)^2 \right)$$

$$\frac{c^2}{\delta^2 \omega^2} = \frac{k^2 c^2}{\omega^2} = \frac{(\omega_p^2 - \omega^2) c^2}{\omega^2 c^2} = \left(\frac{\omega_p}{\omega} \right)^2 - 1$$

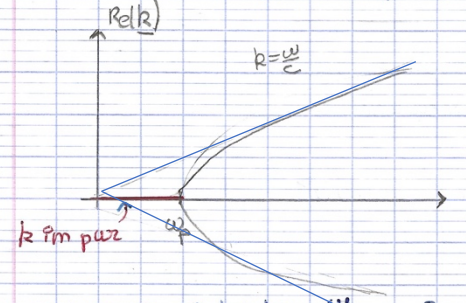
$$\hookrightarrow \langle u_{em} \rangle = \frac{1}{4} \varepsilon_0 E_0^2 \left(\frac{\omega_p}{\omega} \right)^2 e^{-\frac{2x}{\delta}}$$

Qd $x \to$, l'onde pénètre ds le milieu $\langle u_{em} \rangle \to 0$.

Absence de propagat°, sans atténuat° (milieu non absorbant)

7°- Résumé du comportemt du plasma et applicat° à l'ionosphère

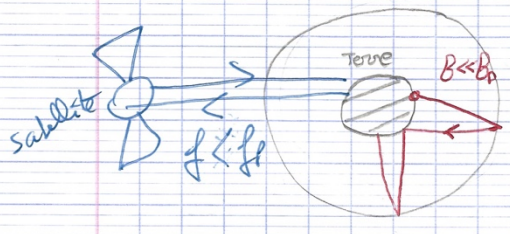
Il faut $\omega > \omega_p$ pr qu'il y ait propagat°
↳ comportemt filtre passe-haut



- Si $\omega < \omega_p$: $\mathrm{Re}(\underline{k}) = 0$
  ↳ onde evanescente
- $\omega > \omega_p$: $\mathrm{Re}(\underline{k}) = \pm \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{c}$ $(\mathrm{Im}(\underline{k}) = 0)$
  ↳ milieu dispersif

- $\omega \gg \omega_p$: $\mathrm{Re}(\underline{k}) \simeq \frac{\omega}{c}$ plasma ≃ vide

- Cas de l'ionosphère : 60 - 800 km d'altitude
  Densité moy électronique : $n_0 \simeq 10^{11}\ m^{-3}$
  $f_p = \frac{\omega_p}{2\pi} = \frac{e}{2\pi}\sqrt{\frac{n_0}{m\varepsilon_0}} \simeq 3\,MHz$ ♡ fréq plasma



Réflex° ionosphérique (ondes radio 100 kHz - 1 MHz)

III. Propagat° d'ondes électromagnétiques ds un conducteur

1°- Modèle microscopique et conductivité électrique : du métal au plasma

métal = gaz d'é de densité n_0 + ions fixes périodiquemt arrangés

Mais ici $n_0 \simeq 10^{23}$ / $10^{29}\ m^{-3}$
↳ peut plus négliger les collisions ent les e⁻ et les défauts du réseau cristallin.
Ds le modèle de Drude, on prend en compte ces collisions par une force $\boxed{-\frac{m}{\tau_c}\vec{v}}$, τ_c le tps moy ent 2 collisions
$\tau_c \simeq 10^{-14}\,s$

$\vec{v}$ la vitesse moyenne mésoscopique (la même pr tous les e⁻), pas une vit individuelle → fait disparaître v_{th} (agitat°)

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}})\vec{v}$$
$(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}})\vec{v}$ nn linéaire (en v^2) négligée
↳ déplacemt ≪ des e⁻ ≪ λ ⇔ $v \ll v_\varphi$.

$\left|\frac{F_m}{F_e}\right| \ll 1$ aussi si $v \ll v_\varphi$

$$m\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -e\vec{E} - \frac{m}{\tau_c}\vec{v}$$

$$\Leftrightarrow m\left[j\omega + \frac{1}{\tau_c}\right]\vec{v} = -e\vec{E} \Leftrightarrow \boxed{\vec{v} = -\frac{e}{m\left(j\omega + \frac{1}{\tau_c}\right)}\vec{E}}$$

$$\vec{j} = \rho\vec{v} = -n_0 e\vec{v} = \frac{n_0 e^2}{m\left(j\omega + \frac{1}{\tau_c}\right)}\vec{E}, \quad \boxed{\gamma = \frac{n_0 e^2}{m\left(j\omega + \frac{1}{\tau_c}\right)}}$$ conductivité du métal

- Si $\omega \simeq \beta \ll \frac{1}{\tau_c} = 10^{14}\,Hz$ ⇔ $\beta \ll$ Infrarouges :

$\gamma = \frac{n_0 e^2 \tau_c}{m}$, la conductivité est réelle
$\simeq 10^7\ \Omega^{-1}\cdot m^{-1}$ le chp électromag cède de l'éj au milieu par effet Joule $\langle \vec{j}\cdot\vec{E}\rangle \neq 0$
↳ milieu absorbant

$\Omega^{-1}\cdot m^{-1}$

p 13
(8)

or $\omega \simeq f \gg \frac{1}{\tau_c} = 10^{14}$ Hz → visible, UV :

$$\gamma = \frac{n_0 e^2}{m j\omega} = \frac{\varepsilon_0 \omega_p^2}{j\omega}$$

On néglige les collisions. Conductivité = im pur, $\langle \vec{j}.\vec{E} \rangle = 0$, milieu absorbant eqv plasma

$$f_p = \frac{e}{2\pi}\sqrt{\frac{n_0}{m\varepsilon_0}} = 2.10^{15} \text{ Hz} \quad (\text{cuivre})$$

visible, $f < f_p$: onde evanescente
UV $f > f_p$: transparence ultraviolette des métaux
Ds ce cours, on ne s'intéresse qu'au cas $f \ll 10^{14}$ Hz
↳ infrarouges.

2° Approx usuelles pr le comportem^t du conducteur (jusqu'aux IR)

a) Le milieu neutre au repos le demeure-t-il localem^t au passage de l'onde ?

M_0 A un instant t, considérons un excès de charge en M_0.

$\rho_0(M, t)$

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial t} + \text{div}\,\vec{j} = 0, \quad \text{avec } \vec{j} = \gamma \vec{E}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial \rho_0}{\partial t} + \text{div}(\gamma \vec{E}) = 0 = \frac{\partial \rho_0}{\partial t} + \frac{\gamma}{\varepsilon_0}\rho \qquad \text{div}\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{\partial \rho_0}{\partial t} + \frac{\rho}{\tau} = 0, \quad \tau = \frac{\varepsilon_0}{\gamma}}$$

$\rho_0(M_0, t) = \rho_0(M_0; t_0)e^{-t/\tau}$
Pr $t \gg \tau$, $\rho_0 = 0$, l'excès de charge local disparaît.
Jusqu'aux IR, $f \ll 10^{14}$ Hz $\Leftrightarrow T \gg 10^{-14}$ s
et ici $\tau = \frac{10^{-12}}{10^{7}} \simeq 10^{-19}$ s

A l'échelle de variat° des chps, $T \gg \tau$ → charge nulle.
$\rho_0 = 0$ ⇒ ondes transverses, milieu demeure localem^t neutre

b) Courant de déplacem^t négligeable

$$\left|\frac{\vec{j}_D}{\vec{j}}\right| = \left|\frac{\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}{\gamma \vec{E}}\right| = \frac{\varepsilon_0}{\gamma T} = \frac{\varepsilon_0 \omega}{\gamma}$$

$$\left|\frac{\vec{j}_D}{\vec{j}}\right| = \frac{\tau}{T} = \omega\tau$$

Ici $= \frac{10^{-19}}{10^{-14}} = 10^{-5} \ll 1$

Le courant de déplacem^t est négligeable j→ IR.

Rq : Au-delà des IR
$\gamma = \frac{\varepsilon_0 \omega_p^2}{j\omega}$, $\left|\frac{\vec{j}_D}{\vec{j}}\right| = \frac{\varepsilon_0\omega}{\frac{\varepsilon_0\omega_p^2}{\omega}} = \left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^2$

comportem^t plasma

Pour le visible négliger le courant de déplacement n'est plus valide

3° Eq de propagat° $\vec{E}$, $\vec{B}$

$\text{div}\,\vec{E} = 0$ $\qquad$ $\text{div}\,\vec{B} = 0$
$\vec{\text{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ $\qquad$ $\vec{\text{rot}}\,\vec{B} = \mu_0 \gamma \vec{E}$

↳ $\boxed{\Delta \vec{E} = \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}$ Eq de Kelvin
m̂ eq pr $\vec{B}$
↳ linéaire
↳ irréversible (milieu absorbant)

4° Relat° de dispersion

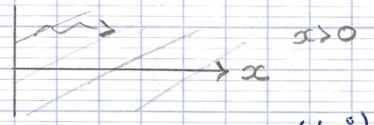
$$-\underline{k}^2 \underline{\vec{E}} = \mu_0 \gamma j\omega \underline{\vec{E}} \Leftrightarrow \underline{k}^2 = -\mu_0 \omega j \gamma = \mu_0 \omega \gamma e^{-j\pi/2}$$

$$\underline{k} = \pm \sqrt{\mu_0 \gamma \omega}\, e^{-j\pi/4} = \pm \sqrt{\frac{\mu_0 \gamma \omega}{2}}\,(1-j)$$

$$\boxed{\underline{k} = \pm \frac{(1-j)}{\delta}} \quad , \quad \boxed{\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}}$$ épaisseur de peau

ici, $Im(\underline{k}) \neq 0$ et $Re(\underline{k}) \neq 0$

Considérons une propagat° ds un milieu



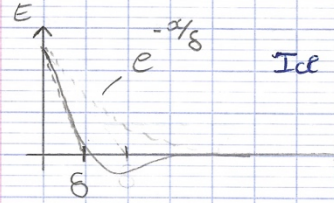
On choisit $\underline{k} = + \frac{(1-j)}{\delta}$

5° - Propagat° amortie => $Im(\underline{k}) \neq 0$, $Re(\underline{k}) \neq 0$

$$\underline{\vec{E}} = E_0 \vec{u_y} e^{j(\omega t - \underline{k} x)} = E_0 \vec{u_y} e^{-x/\delta} e^{j(\omega t - x/\delta)}$$

$$\vec{E} = E_0 \vec{u_y} \underbrace{e^{-x/\delta}}_{\text{atténuat° expo en } e^{-x\,Im(\underline{k})}} \underbrace{\cos(\omega t - \frac{x}{\delta})}_{\text{Propagat° avec } Re(\underline{k}) = \frac{1}{\delta}}$$

Ici $Im(\underline{k}) = Re(\underline{k})$



Ici atténuat° sur une distance δ et $Re(\underline{k}) = \frac{1}{\delta} = \frac{2\pi}{\lambda}$

$\lambda = 2\pi\delta$ -> peu d'oscillations

=> Ordre grandeur δ :

- $f = 50\,Hz$, $\delta \simeq cm$ ☺
- $f = 500\,kHz$, $\delta = 0{,}1\,mm$
- $f = 1\,GHz$, $\delta \simeq 2\,\mu m$

Inutile d'utiliser des conducteurs pleins de grande sect° pr transporter les ondes à haute fréq.

- Résistance d'un conducteur :

$$R = \frac{L}{\gamma S}$$

conducteur plein

Sect° S ↓ de R ↗, effet de peau → résistance d'un conducteur (cylindrique) augmente

$$\underline{\vec{B}} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$$

$$\underline{k} = \frac{1-j}{\delta} = \frac{\sqrt{2}\, e^{-j\pi/4}}{\delta}$$

$$\underline{\vec{B}} = \frac{\sqrt{2}\, e^{-j\pi/4} E_0}{\delta\omega} e^{-x/\delta} e^{j(\omega t - \frac{x}{\delta})} \vec{u_z}$$

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\sqrt{2} E_0}{\delta\omega} e^{-x/\delta} \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta} - \frac{\pi}{4}\right) \vec{u_z}}$$

6° - Aspect énergétique

$$\langle P_j \rangle \propto \langle \vec{j} \cdot \vec{E} \rangle = \langle \gamma E^2 \rangle \propto e^{-\frac{2x}{\delta}}$$

Il y a dissipat° de l'énergie sur une profondeur typique δ de l'ordre de l'épaisseur de peau. Le milieu est absorbant.

↳ Conversion en énergie thermique par effet Joule

7° - Vitesse de phase, vitesse de groupe

- Vitesse de phase

$$v_\varphi = \frac{\omega}{Re(\underline{k})} = \omega\delta = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu_0\gamma}}$$

- **Vitesse de groupe**

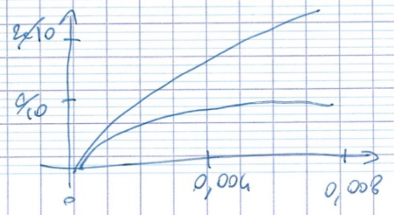
Différencions l'éq. de dispers°

$$Re(k) = \sqrt{\frac{\mu_0 \gamma \omega}{2}} \Rightarrow d\,Re(k) = \sqrt{\frac{\mu_0 \gamma}{8\omega}}\, d\omega$$

$$\boxed{v_g = \frac{d\omega}{d\,Re(k)} = 2\, v_\varphi}$$

$$v_g = \sqrt{\frac{8\omega}{\mu_0 \gamma}} = \sqrt{\frac{8\,\varepsilon_0\,\omega}{\mu_0 \varepsilon_0 \gamma}} = c\sqrt{8\omega\tau}$$

mais $v_g < c$! car ⚠ $\omega\tau \ll 1$! pour valider le comportement



- **Retour sur les hypothèse de départ**

$a \ll 1$
$v \ll v_\varphi$

$$v \ll v_\varphi = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu_0 \gamma}} = \sqrt{\frac{4\pi f}{\mu_0 \gamma}} = 0{,}41\sqrt{f}$$

avec aux basse fréq. $v \simeq$ mm.s^{-1} $\rightarrow v \ll v_\varphi$
aux fréq. + hautes v_φ augmente considérablement $\rightarrow v \ll v_\varphi$

8° Modèle du conducteur parfait

$\gamma_{\text{bon conducteur}} = 10^7\ \Omega^{-1}.m^{-1}$

conducteur parfait $\gamma \rightarrow +\infty$

↳ épaisseur de peau $\delta \rightarrow 0$

$\vec{E} \propto e^{-x/\delta} \longrightarrow 0$, $\vec{B} \rightarrow 0$, $\vec{j} = \gamma\vec{E} \longrightarrow \vec{0}$

Ds le conducteur parfait, $\vec{E}$ et $\vec{B} \longrightarrow \vec{0}$, $\vec{j}$, ∄ de courants.
Par contre, il peut exister des charges et des courants surfaciques.
Il n'y a plus de dissipat° ds le conducteur parfait ($P_v = \vec{j}\cdot\vec{E} = 0$)