

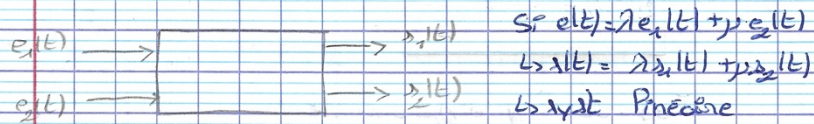
Chap 15° Stabilité des systèmes linéaires

1° Syst régis par une eq différentielle linéaire à coeff st

1° Syst Linéaire et invariant

=> Linéaire :

Conditi° suffisante : principe de superposit°, combi linéaire de sol st lgs sol



=> Invariance Linéaire :

Avec $s(t)$ Pa rep à $e(t)$

$\forall t, s(t-\tau) = s(t)$ est Pa rep à $e(t) = e(t-\tau)$

$\hookrightarrow$ ppte d'un syst permanent d't les caractéristiques ne varient ps au cours du tps

$\hookrightarrow$ fct stable d't Pa rep est reproductible ds le tps

2° Eq différentielle à coeff st

Générateur entrée/sortie

$$a_0 e + \sum_{i=1}^n a_i \frac{d^i e}{dt^i} = b_0 s + \sum_{k=1}^n b_k \frac{d^k s}{dt^k}$$

$\hookrightarrow$ Linéaire car dérivat° Linéaire

$\hookrightarrow$ stationnaire car les coeff a_i, b_k st st

On opérateur régis par une eq différentielle linéaire à coeff st

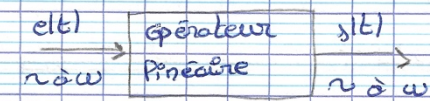
$\hookrightarrow$ Linéaire et invariant

Sol complète = sol homogène SSI + sol en régime permanent

régime transitoire
ou libre

régime forcé sinusoïdal

3° Fc de transfert en régime ~ permanent



$$e(t) = \text{Re}(\underline{e}) = \text{Re}(\underline{E} e^{j\omega t})$$

$$s(t) = \text{Re}(\underline{s}) = \text{Re}(\underline{S} e^{j\omega t})$$

$\rightarrow$ Fc de transfert :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{\underline{S}}{\underline{E}}$$

Trad de l'eq différentielle

$\hookrightarrow$ passage tps $\rightarrow$ freq

$$e \times \sum_{i=0}^n a_i (j\omega)^i = s \times \sum_{k=0}^n b_k (j\omega)^k$$

$$\underline{H} = \frac{\sum_{i=0}^n a_i (j\omega)^i}{\sum_{k=0}^n b_k (j\omega)^k}, \quad \underline{H}(p) = \frac{\sum_{i=0}^n a_i p^i}{\sum_{k=0}^n b_k p^k}$$

$$|\underline{H}(j\omega)| = \frac{S}{E} \rightarrow \text{rapport des amplitudes}$$

$$\varphi = \varphi_s - \varphi_e = \arg(\underline{H}(j\omega)) \rightarrow \text{déphasage entrée/sortie}$$

Rq° Retard par en SI

$$\underline{H}(j\omega) = \underline{H}(p) = e^{-j\omega\tau} = e^{-\tau p}$$

Représentat° en diag de Bode :

$$\left. \begin{array}{l} G = 20 \log |\underline{H}(j\omega)| \text{ en dB} \\ \varphi = \arg(\underline{H}(j\omega)) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \log \omega \\ \log f \end{array}$$

4° Rappel sur le filtrage des signaux

a) Méthode de superposition et décomposition en série de Fourier

⇒ Décomposition en série de Fourier du signal d'entrée périodique :

$$e(t) = \langle e \rangle + \sum_{k=1}^{+\infty} E_k \cos(\omega_k t + \varphi_k)$$

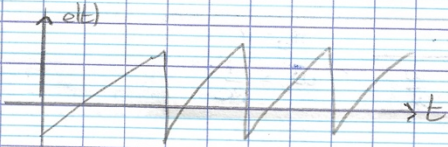
Vol moyenne fondamentale + harmoniques de rang k , $\omega_k = k\omega_0$
 $= E_0$

$$\hookrightarrow \langle e \rangle = \frac{1}{T} \int_0^{T} e(t) dt$$

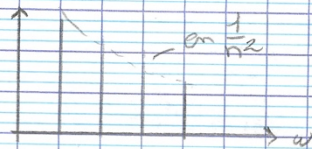
stratégie moy : $\langle e^2 \rangle = \frac{1}{T} \int_0^{T} e^2(t) dt = E_0^2 + \frac{E_k^2}{2}$

Non casig : $e(t) = E_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \cos \omega_k t + b_k \sin \omega_k t)$

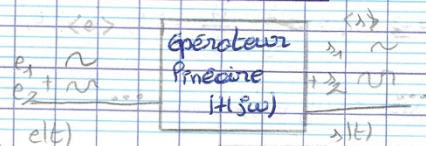
$$\begin{cases} a_k = \frac{2}{T} \int_0^{T} e(t) \cos \omega_k t dt \\ b_k = \frac{2}{T} \int_0^{T} e(t) \sin \omega_k t dt \end{cases}$$



⇒ Spectre



⇒ Principe de superposition :



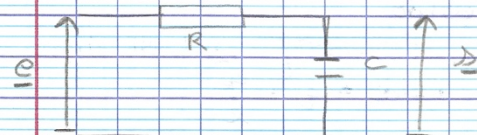
$$e(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} E_k \cos(\omega_k t + \varphi_k)$$

$$s(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} S_k \cos(\omega_k t + \varphi_k)$$

$$\begin{aligned} S_k &= |1 + j\omega_k R| \times E_k \\ \varphi_k &= \varphi_k = \arg(1 + j\omega_k R) \end{aligned}$$

b) Exemples de filtres linéaires

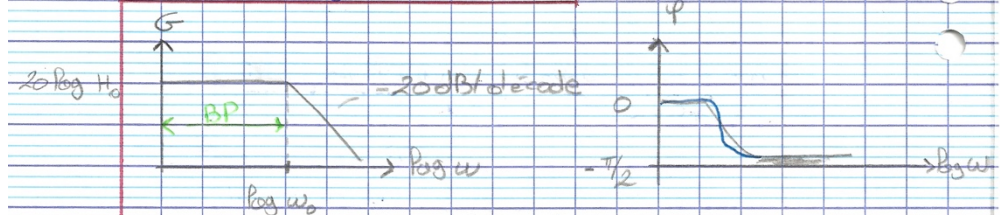
⇒ Filtre Passe-Bas 1^{er} ordre :



Div de tension : $H = \frac{U}{U_0} = \frac{Z_C}{R + Z_C}$

$$H = \frac{j\omega RC}{R + j\omega RC} = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

$$H = \frac{H_0}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}}, \quad H_0 = 1, \quad \omega_0 = \frac{1}{RC}$$

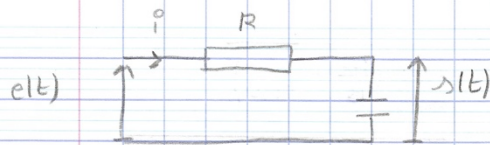


Passage freq → tps : $\frac{U}{U_0} = \frac{1}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}}$

$$\frac{1}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}} = \frac{1}{U_0} \frac{ds}{dt} \rightarrow s(t) = e(t)$$

$$\Leftrightarrow \frac{ds}{dt} + \omega_0 s(t) = \omega_0 e(t)$$

②



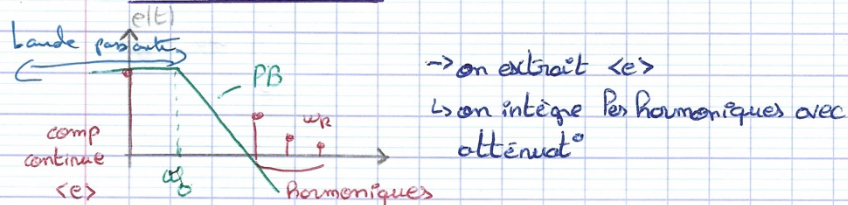
Par de Bct

$$\underline{L} \underline{DH} : e(t) = s(t) + R i(t) \text{ , avec } \underline{L} \underline{DF} : C \frac{ds}{dt}$$

$$e(t) = s(t) + RC \frac{ds}{dt}$$

$$\hookrightarrow \frac{ds}{dt} + \frac{1}{RC} s(t) = \frac{1}{RC} e(t)$$

$\Rightarrow$ Act° du filpne°



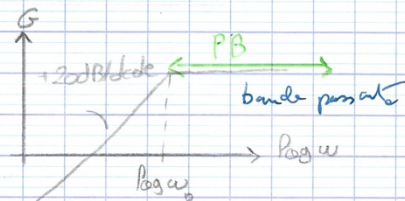
Pseudo-intégrateur° $\omega_p \gg \omega_0 \rightarrow$ pente -20 dB/déc

$$H \approx \frac{1}{j \omega \omega_0} = \frac{1}{\omega} \text{ , } \frac{1}{\omega} \times j \omega \omega_0 \approx e$$

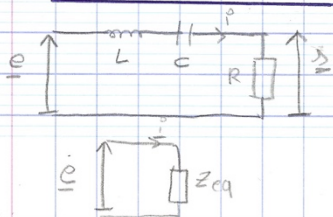
$$\Leftrightarrow \frac{1}{\omega_0} \frac{ds}{dt} \approx e(t) \rightarrow s(t) = \omega_0 \int e(t) dt \text{ , pseudo-intégrat°}$$

$\Rightarrow$ Passe-Haut d'ordre 1°

$$H(j\omega) = \frac{j\omega\omega_0}{1+j\omega\omega_0} = \frac{jx}{1+jx}$$



$\Rightarrow$ Passe-Bande d'ordre 2°



$$s = R i = R \frac{e}{Z_{eq}}$$

$$H = \frac{s}{e} = \frac{R}{Z_{eq}}$$

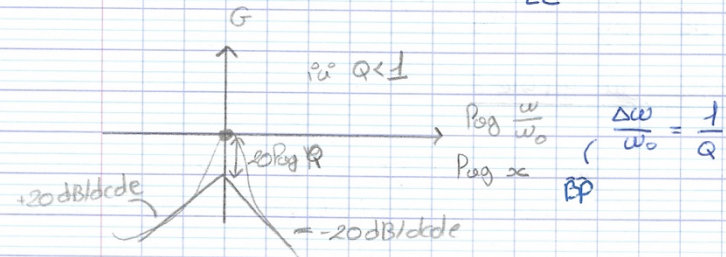
$$H = \frac{R}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + j\left(\frac{\omega L}{R} - \frac{1}{R\omega C}\right)}$$

$$= \frac{1}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)} = \frac{1}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)} = H$$

$$Q = \frac{1}{R\omega_0 C} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \rightarrow \text{RLC série}$$

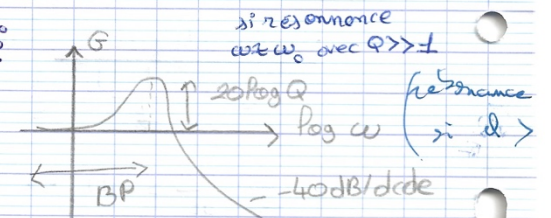
$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

Il manque le passage fréq $\rightarrow$



$\Rightarrow$ Passe-Bas d'ordre 2°

$$H = \frac{H_0}{1 - x^2 + \frac{jx}{Q}}$$



II. Stabilité des systèmes

1° Critère de stabilité

Stable $\gg$ sol eq homogène SSM $\rightarrow 0$ qd $t \rightarrow \infty$

La contribution du régime libre ne diverge pas $\rightarrow$ bornée

Rq° Syst passifs tjs stables.

Pr éviter des oscillations on mettra à profit l'instabilité des syst actifs.

2^o Syst du 1^{er} ordre : eq homogène SSM

$$\frac{d\lambda}{dt} + \frac{\lambda}{\tau} = 0 \Leftrightarrow \tau \frac{d\lambda}{dt} + \lambda(t) = 0$$

Sol: $\lambda(t) = A e^{-t/\tau}$

Diverge si $\tau > 0$, stable si $\tau < 0$

3^o Syst du 2^e ordre

↳ les coeff. de l'eq. diff
sr du m^e signe

$$\frac{d^2\lambda}{dt^2} + b \frac{d\lambda}{dt} + c \lambda(t) = 0$$

↳ eq caractéristique avec $\lambda(t) = e^{rt}$

$$\begin{cases} r^2 + br + c = 0 \\ r_1 r_2 = c \end{cases}$$

→ $c \leq 0$: $\Delta = b^2 - 4c > 0$, il y a 2 racines de signes opposés
↳ $e^{r_1 t} + e^{r_2 t}$ diverge

Si diff de signe entre les termes d'ordre 1 et 2 : DV

→ $c > 0$: $\Delta = b^2 - 4c$

$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
Régime périodique $(A \cos \lambda t + B \sin \lambda t) e^{-\frac{bt}{2}}$	Régime ap. critique $(A\lambda + B) e^{-\frac{bt}{2}}$	Régime pseudo-périodique $(A \cos \lambda t + B \sin \lambda t) e^{-\frac{bt}{2}}$

Si $b < 0$: syst instable de diff de signe entre terme d'ordre 1 et 2
↳ DV

En résumé : stable uniquement si les 3 coeff. st du m^e signe

Interprétation énergétique :

car $c > 0$, on pose $c = \omega_0^2$

$$\frac{d^2\lambda}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{d\lambda}{dt} + \omega_0^2 \lambda = 0$$

$$\otimes \frac{d\lambda}{dt} \frac{d\lambda}{dt} \frac{d^2\lambda}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \left(\frac{d\lambda}{dt} \right)^2 + \omega_0^2 \left(\frac{d\lambda}{dt} \right)^2 \lambda = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\lambda}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} \omega_0^2 \lambda^2 \right) = - \frac{\omega_0}{Q} \left(\frac{d\lambda}{dt} \right)^2$$

↳ équivaut
d' $E_c + E_p$
↳ $\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2$

$$\frac{dE}{dt} = - \frac{\omega_0}{Q} \left(\frac{d\lambda}{dt} \right)^2 \quad \text{von l'énergie de l'énergie}$$

→ si $Q > 0$, E ↓ au cours du tps
syst stable

→ car limite $Q = 0$

$E(t)$ est stationnaire, oscillateur harmonique

Lien avec la SI :

$$H(p) = \frac{1}{(j\omega)^2 + \frac{\omega_0}{Q}(j\omega) + \omega_0^2} = \frac{1}{p^2 + \frac{\omega_0}{Q}p + \omega_0^2}$$

Chercher les sol de l'eq caractéristique en $Q =$ chercher les pôles en SI
En SI : stable si les pôles négatifs ou partie réelle négative
⇒ du m^e signe ~~est~~.