

Partie I - limite du modèle de J.J. Thomson



Selon un modèle de "gelée" de charge positives distribuées dans le volume de l'atome, les particules α devraient être déviées uniformément, alors que l'expérience de Rutherford prouve qu'une faible partie est déviée.
 $\rightarrow$ la matière est "luminaire" pour en faire former une gelée positive.

Q.2 - $\vec{F}_{\text{elec}} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 d^2} \vec{e}_r = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 d^2} \vec{e}_r \rightarrow$ force répulsive

$\rightarrow E_p = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{d} + \text{cte}$ avec $E_p(d) = 0 \rightarrow \text{cte} = 0$
 $d \rightarrow \infty$ pas d'interaction

$E_p = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 d} = \frac{Ze^2}{2\pi\epsilon_0 d}$

$\vec{F}_{\text{elec}} = \frac{K}{d^2} \vec{e}_r$ et $E_p = \frac{K}{d}$ $K > 0$
 $K = \frac{Ze^2}{2\pi\epsilon_0}$

Il s'agit d'une force centrale de la forme $f(d) \vec{e}_r$

donc conservative $\rightarrow$ l' E_m se conserve.

$\frac{dL_0}{dt} = \vec{M}_0(\vec{F}_{\text{elec}}) = \vec{OM} \wedge f(d) \vec{e}_r = d \vec{e}_r \wedge f(d) \vec{e}_r = \vec{0}$

donc L_0 se conserve (la traj. est plane).

Q.3 - $E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2} m_x v_0^2 + E_p(d \rightarrow \infty)$

$E_m = \frac{1}{2} m_x v_0^2 = \text{cte}$

Q4 - $\vec{L}_0 = \vec{OM} \wedge m_x \vec{v} \rightarrow$ par déf.

En $M_0 \rightarrow \vec{L}_0 = \vec{OM}_0 \wedge m_x \vec{v}_0$
 $= (x \vec{e}_x + b \vec{e}_y) \wedge m_x v_0 \vec{e}_x$
 $\vec{L}_0 = -m_x v_0 b \vec{e}_z$

$\rightarrow$ la force répulsive a tendance à faire tourner la particule selon $-\vec{e}_z$.

Q5 - $\vec{L}_0 = d \vec{e}_r \wedge m_x (\dot{d} \vec{e}_r + d \dot{\theta} \vec{e}_\theta)$

$\vec{L}_0 = m_x d^2 \dot{\theta} \vec{e}_z$ avec $\dot{\theta} < 0$

donc $-v_0 b = d^2 \dot{\theta} \rightarrow$ par conservat de L_0

Q6 - Au sommet S $\vec{v}_s = dm \dot{\theta} \vec{e}_\theta$ (vitesse orthoradiale)

donc $v_s = dm |\dot{\theta}| = dm \frac{v_0 b}{dm^2} = \frac{v_0 b}{dm}$

Par conservat de l' $E_m \rightarrow E_m = \frac{1}{2} m_x v_0^2 = \frac{1}{2} m_x v_s^2 + \frac{K}{dm}$

On en déduit un polynôme du second degré qui définit dm :

$\frac{1}{2} m_x v_0^2 = \frac{1}{2} m_x \frac{v_0^2 b^2}{dm^2} + \frac{K}{dm}$

$dm^2 - \frac{2K}{m_x v_0^2} dm - b^2 = 0$

$\Delta = \left(\frac{2K}{m_x v_0^2}\right)^2 + 4b^2 > 0 \rightarrow$ solut réelles

$dm = \frac{2K}{m_x v_0^2} \pm \sqrt{\left(\frac{2K}{m_x v_0^2}\right)^2 + 4b^2}$ $\rightarrow$ on choisit la solut telle que $dm > 0$

$dm = \frac{K}{m_x v_0^2} + \sqrt{\left(\frac{K}{m_x v_0^2}\right)^2 + b^2}$

2.7 - PFD :

$$\vec{m}_\alpha \vec{a} = m_\alpha \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_{\text{Coul}} = \frac{K}{d^2} \vec{e}_r$$

Projection sur $\vec{e}_\theta$:

$$m_\alpha \frac{dv_\theta}{dt} = \frac{K}{d^2} \vec{e}_r \cdot \vec{e}_\theta \quad \text{avec } \vec{e}_r \cdot \vec{e}_\theta = \cos \theta$$

$$\boxed{m_\alpha \frac{dv_\theta}{dt} = \frac{K}{d^2} \cos \theta}$$

$$\text{avec } -v_\theta b = d^2 \dot{\theta} \rightarrow \frac{1}{d^2} = -\frac{\dot{\theta}}{v_\theta b}$$

$$m_\alpha \frac{dv_\theta}{dt} = -\frac{K}{v_\theta b} \dot{\theta} \cos \theta = -\frac{K}{v_\theta b} \frac{d(\sin \theta)}{dt}$$

$$m_\alpha \int_{t=0}^{t \rightarrow \infty} dv_\theta = -\frac{K}{v_\theta b} \int_{t=0}^{t \rightarrow \infty} d(\sin \theta)$$

$$m_\alpha (v_\theta(t \rightarrow \infty) - v_\theta(t=0)) = -\frac{K}{v_\theta b} (\sin \theta(t \rightarrow \infty) - \sin \theta(t=0))$$

$$m_\alpha (v_\infty \cos \varphi - v_0) = -\frac{K}{v_0 b} (\sin \varphi - 0) \quad \text{car } t=0$$

$$\text{avec } v_\infty = v_0 \quad \text{car conservat de l'énergie méca} \rightarrow \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m v_\infty^2$$

(seulement Ec pour $r \rightarrow +\infty$) $\hookrightarrow v_0 = v_\infty$

$$\hookrightarrow m_\alpha v_0 (\cos \varphi - 1) = -\frac{K}{v_0 b} \sin \varphi$$

$$2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{K}{b m_\alpha v_0^2} \quad 2 \cos \frac{\varphi}{2} \cancel{\sin \frac{\varphi}{2}}$$

$$\hookrightarrow \boxed{\tan \frac{\varphi}{2} = \frac{K}{b m_\alpha v_0^2}}$$

2.8 - Pour $\varphi \geq \frac{\pi}{2}$ il y a rebond sur la feuille d'or.

Il faut donc que

$$\boxed{\frac{K}{b m_\alpha v_0^2} \geq \tan \frac{\pi}{4} = 1}$$

b doit être suffisamment faible pour obtenir un rebond ce qui valide le modèle de J. Perrin où les charges positives ne sont pas distribuées homogènement mais localisées autour d'un noyau "solide".

Rq) Si l'Ec de la particule est grande, les particules α traversent le noyau avec une faible déviation, si leur Ec est faible $\rightarrow m_\alpha v_0^2 \ll K$ il y a rebond $\rightarrow$ elle ne peut franchir la barrière de potentiel représentée par K .

$$\begin{aligned} \text{d. 9 - } dm &= \frac{K}{m_\alpha v_0^2} \left(1 + \sqrt{1 + \left(\frac{b m_\alpha v_0^2}{K} \right)^2} \right) \\ &= \frac{K}{m_\alpha v_0^2} \left(1 + \sqrt{1 + \tan^2 \frac{\varphi}{2}} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{avec } 1 + \tan^2 \frac{\varphi}{2} &= 1 + \frac{\cos^2 \frac{\varphi}{2}}{\sin^2 \frac{\varphi}{2}} = \frac{\sin^2 \frac{\varphi}{2} + \cos^2 \frac{\varphi}{2}}{\sin^2 \frac{\varphi}{2}} \\ &= \frac{1}{\sin^2 \frac{\varphi}{2}} \end{aligned}$$

$$\sqrt{1 + \tan^2 \frac{\varphi}{2}} = \frac{1}{\sin \frac{\varphi}{2}} \quad \text{car } \sin \frac{\varphi}{2} > 0 \quad (\varphi \leq \pi)$$

$$\boxed{dm = \frac{K}{m_\alpha v_0^2} \left(1 + \frac{1}{\sin \frac{\varphi}{2}} \right)}$$

Q-10 - d_m est minimal pour $\varphi = \varphi_m = \pi$ "rebond" b + efficace

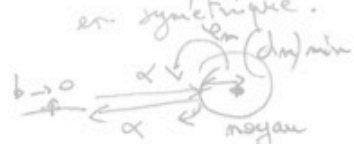
$$\sin \frac{\varphi}{2} = 1 \rightarrow$$

$$(d_m)_{\min} = \frac{2K}{m\alpha v_0^2}$$

Q-11 - Pour $\varphi \rightarrow \varphi_m$ alors $\tan \frac{\varphi}{2} = \frac{K}{b m \alpha v_0^2}$ $\varphi \rightarrow \pi$ $m \rightarrow +\infty$

soit $b \rightarrow 0$

Traj. rectiligne dirigée vers le centre du noyau puis rebond en symétrique.



donc le noyau est un peu plus loin que $(d_m)_{\min}$ qui coture une boue supérieure de son rayon.

AN : $(d_m)_{\min} = \frac{2K}{m\alpha v_0^2}$

$$(d_m)_{\min} = \frac{K}{E_c} = \frac{Ze^2}{2\pi\epsilon_0 E_c} \approx \boxed{5 \cdot 10^{-14} \text{ m}}$$

comparaison E_p versus E_c $\hookrightarrow$ noyau de l'ordre de 10^{-15}

Q-12 - Il faudrait $\downarrow (d_m)_{\min}$ pour sonder le noyau donc $\uparrow E_c$.

Partie II - Limite du modèle planétaire

Q13.

On applique le PFD à l'électron, soumis uniquement à la force électrostatique et on le projette dans la base cylindrique (avec $r = \text{cste}$) :

$$m_e \frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$$

$$\begin{cases} -m_e r \dot{\theta}^2 = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \\ m_e r \ddot{\theta} = 0 \end{cases}$$

On en déduit que la norme de la vitesse est constante et que finalement $\vec{v} = r\dot{\theta}\vec{e}_\theta = \frac{e}{\sqrt{4\pi\epsilon_0 m_e r}} \vec{e}_\theta$

Q14. L'énergie mécanique s'écrit : $E_M = \frac{1}{2} m_e v^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r}$ en remplaçant par l'expression de v . On a donc $A = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0}$

et $f(r) = \frac{1}{r}$

Q15. $\omega = \dot{\theta} = \frac{e}{\sqrt{4\pi\epsilon_0 m_e r^3}}$ donc en remplaçant dans l'expression de $P(r)$, on obtient :

$$P(r) = \frac{P_0}{r^4} \text{ avec } P_0 = \frac{e^6}{192\pi^3 c^3 \epsilon_0^3 m_e^2}$$

Si $P(r)$ est une puissance (fallait-il le redémontrer?), P_0 s'exprime en W.m^4 . $P(r)$ représente l'énergie perdue par rayonnement par unité de temps, donc l'énergie mécanique de l'électron diminue. Comme $A < 0$ et $f(r)$ est décroissante, le rayon diminue aussi.

Q16. On applique le théorème de la puissance mécanique (ie un bilan d'énergie mécanique) à l'électron, sachant que $P(r)$ est la puissance perdue. On a donc :

$$\frac{dE_M}{dt} = -P(r) \Rightarrow -\frac{A}{r^2} \frac{dr}{dt} = -\frac{P_0}{r^4}$$

$$r^2 \frac{dr}{dt} = \frac{P_0}{A}$$

Comme $A < 0$, le rayon diminue bien.

Q17. On sépare les variables avant d'intégrer :

$$\int_R^0 r^2 dr = \int_0^{t_f} \frac{P_0}{A} dt \Rightarrow t_f = -\frac{AR^3}{3P_0}$$

Application numérique : $\frac{-A}{P_0} = \frac{24\pi^2 c^3 \epsilon_0^3 m_e^2}{e^4} \approx 6,4 \cdot 10^{20} \text{ s.m}^{-3}$ donc $t_f \approx 2,1 \cdot 10^{-10} \text{ s}$. L'atome ne serait stable que pendant un temps infiniment court, c'est impossible.