Sujet 02. Mines 2007. Correction

1. On applique le théorème du moment cinétique au point O pour le mobile M soumis à une force centrale :
$$\frac{d\vec{L}_o}{dt} = \underbrace{\overrightarrow{OM} \wedge \vec{f}}_{\text{vecteurs parallèles}} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{L}_o = \overrightarrow{cste}$$
Le mobile est soumis à une unique force conservative, l'**énergie mécanique du mobile se conserve**.

2. On applique la relation fondamentale de la dynamique au satellite pour un mouvement circulaire de rayon $r = R_T + h$:
$$M_S\vec{a} = -\frac{GM_T M_S}{r^2}\vec{u}_r \quad \Rightarrow \quad -\frac{v^2}{r} = -\frac{GM_T}{r^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v^2 = \frac{GM_T}{R_T + h}}$$
Pour un mouvement circulaire uniforme : $v = \dfrac{2\pi(R_T + h)}{T}$, on en déduit la troisième loi de Kepler :
$$\frac{(R_T + h)^3}{T^2} = \frac{GM_T}{4\pi^2} \text{ soit } \boxed{h = \left(\frac{GM_T T^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} - R_T}$$

3. On pose $r = R_T + h$:
$$\boxed{2E_c + E_p = 2 \times \frac{1}{2}M_s v^2 - \frac{GM_T M_s}{r} = M_s\frac{GM_T}{r} - \frac{GM_T M_s}{r} = 0}$$

4. On appelle β l'angle entre les directions OA et OQ ; dans le triangle OAQ, on a :
$$\cos(\beta) = \frac{R_T}{R_T + h} \quad \text{soit} \quad \beta = \arccos\left(\frac{R_T}{R_T + h}\right)$$
Le satellite est visible de A à B, c'est à dire pour un angle correspondant à 2β ; comme le mouvement circulaire s'effectue à vitesse constante, une simple proportion permet d'affirmer :

$$\frac{\tau}{T} = \frac{2\beta}{2\pi} \quad \text{donc } \tau = \frac{T}{\pi} \arccos\left(\frac{R_T}{R_T+h}\right)$$

Et finalement en utilisant la troisième loi de Kepler :

$$\boxed{\tau = \frac{1}{\pi}\left(\frac{4\pi^2 (R_T+h)^3}{GM_T}\right)^{1/2} \arccos\left(\frac{R_T}{R_T+h}\right) = 921 \text{ s}}$$

5. $\boxed{T/\tau \simeq 6,6}$, il faut donc disposer d'au moins **7 satellites** pour que chaque point du sol puisse « voir » un satellite à tout instant.

6. On applique la troisième loi de Kepler pour un satellite qui effectue dans le plan équatorial une révolution en une durée égale à la période de révolution de la Terre sur elle-même c'est à dire 86164 s pour obtenir :

$$\boxed{T_{geo} = 86164 \text{ s}} \text{ et } \boxed{h = 35,8 \times 10^3 \text{ km}}$$

Le satellite géostationnaire reste toujours « au-dessus » de la zone souhaitée, il n'y a donc pas de problème de visibilité ; le satellite géostationnaire étant envoyé à une altitude beaucoup plus importante, le coût est nettement augmenté ; la puissance d'émission des ondes doit être ajustée en conséquence, il faut aussi tenir compte du délai pour l'onde électromagnétique qui doit parcourir l'aller-retour, soit une distance de l'ordre de 70 000 km à la vitesse de la lumière, c'est à dire un retard de quelques dixièmes de seconde. Enfin le satellite géostationnaire n'est pas adapté pour l'observation des pôles.

7. α est le rapport d'une force sur une énergie ($M_s v^2$), une énergie étant le produit d'une force par une longueur, on en déduit :

$$\boxed{[\alpha] = L^{-1} \quad \text{l'inverse d'une longueur}}$$

Partons du théorème de l'énergie mécanique appliqué au satellite dans le référentiel géocentrique.

$$\frac{dE_M}{dt} = \frac{d(E_c+E_p)}{dt} = \vec{f_a}.\vec{v} \quad \text{donc} \quad -\frac{dE_c}{dt} = -\alpha M_s v^3$$

Dans la dernière égalité, on a utilisé le théorème du viriel, $E_c + E_p = -E_c$.

La dernière expression se réécrit, sachant que $E_c = \frac{1}{2} M_s v^2$:

$$\frac{dv^2}{dt} = 2\alpha v^3 \quad \text{donc} \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{GM_T}{R_T+h}\right) = 2\alpha\left(\frac{GM_T}{R_T+h}\right)^{3/2}$$

Et finalement : $\boxed{\frac{dh}{dt} = -2\alpha\,(GM_T)^{1/2}\,(R_T+h)^{1/2}}$

8. 1 m à chaque révolution signifie que $\frac{dh}{dt} \approx \frac{-1}{T} \approx \frac{-1}{6078}$, on peut alors estimer α :

$$\boxed{\alpha = \frac{-1}{2}\frac{dh}{dt}\frac{1}{(GM_T)^{1/2}\,(R_T+h)^{1/2}} = 1,53 \times 10^{-15} \text{ m}^{-1}}$$

L'altitude diminue de 1 m par révolution c'est à dire toutes les 6078 s, en une durée de 10 ans, la baisse est de :

$$\boxed{\Delta h = \frac{1 \times 10 \times 3,15 \times 10^7}{6078} \simeq 52 \text{ km}}$$

Pour le calcul exact, on considère l'équation différentielle :

$$\frac{dh}{(R_T+h)^{1/2}} = -2\alpha\,(GM_T)^{1/2}\,dt \quad \text{donc} \quad \left[(R_T+h)^{1/2}\right]_{h_0}^{h} = -\alpha\,(GM_T)^{1/2}\,t$$

On en déduit :

$$h(t) = \left((R_T+h_0)^{1/2} - \alpha\,(GM_T)^{1/2}\,t\right)^2 - R_T = 748,4 \text{ km}$$

Soit une baisse d'altitude de $800 - 748,4 \simeq \boxed{51,6 \text{ km}}$ et un résultat très voisin du calcul approché.

En présence de frottements c'est l'énergie mécanique qui diminue, l'énergie mécanique étant la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle, **l'énergie cinétique peut bien augmenter à condition que l'énergie potentielle diminue suffisamment** (Cf. également $v^2 = GM_T/(R_T+h)$ si h diminue v augmente).