

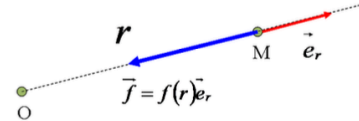
Mécanique 2 : Bloc 5 : Mouvements dans un champ de force centrale conservatif

Le **bloc 5** est motivé par ses nombreuses applications. On se limite à discuter la nature de la trajectoire sur un graphe donnant l'énergie potentielle effective et on ne poursuit l'étude dans le cas d'un champ newtonien (lois de Kepler) que dans le cas d'une trajectoire circulaire. Le caractère elliptique des trajectoires associées à un état lié est affirmé sans qu'aucune étude géométrique des ellipses ne soit prévue ; on utilise dans ce cas les constantes du mouvement (moment cinétique et énergie mécanique) pour exprimer l'énergie de la trajectoire elliptique en fonction du demi-grand axe.

Notions et contenus	Capacités exigibles
5. Mouvements dans un champ de force centrale conservatif	
Point matériel soumis à un seul champ de force centrale.	Déduire de la loi du moment cinétique la conservation du moment cinétique. Connaître les conséquences de la conservation du moment cinétique : mouvement plan, loi des aires.
Énergie potentielle effective. État lié et état de diffusion.	Exprimer la conservation de l'énergie mécanique et construire une énergie potentielle effective. Décrire qualitativement le mouvement radial à l'aide de l'énergie potentielle effective. Relier le caractère borné à la valeur de l'énergie mécanique.
Champ newtonien. Lois de Kepler.	Énoncer les lois de Kepler pour les planètes et les transposer au cas des satellites terrestres.
Cas particulier du mouvement circulaire : satellite, planète.	Montrer que le mouvement est uniforme et savoir calculer sa période. Établir la troisième loi de Kepler dans le cas particulier de la trajectoire circulaire. Exploiter sans démonstration sa généralisation au cas d'une trajectoire elliptique.
Satellite géostationnaire.	Calculer l'altitude du satellite et justifier sa localisation dans le plan équatorial.
Énergie mécanique dans le cas du mouvement circulaire puis dans le cas du mouvement elliptique.	Exprimer l'énergie mécanique pour le mouvement circulaire. Exprimer l'énergie mécanique pour le mouvement elliptique en fonction du demi-grand axe.
Vitesses cosmiques : vitesse en orbite basse et vitesse de libération.	Exprimer ces vitesses et connaître leur ordre de grandeur en dynamique terrestre.

I Propriétés des forces centrales :

1.1 Définition :



Considérons le référentiel $(\mathcal{R})$ assimilé à un référentiel galiléen. Soit O , une origine fixe de ce référentiel : On dit que

f est une **force centrale** si $\vec{f} = f(r)\vec{e}_r$ où $\vec{e}_r = \frac{\vec{OM}}{OM}$ et $[r = OM]$. La force passe constamment par un centre O . O est appelé le pôle attractif ou répulsif suivant le signe de la force.

En fait dans la pratique, les pôles d'attraction ne sont pas ponctuels. Ils ont même une certaine dimension (Cf. les planètes) mais on peut montrer en particulier dans le cas de forces en $\frac{1}{r^2}$, que tout se passe comme si la masse était concentrée dans le point O (Cf. le chapitre électrostatique)

1.2 Conservation du moment cinétique : Loi des aires :

Compétences exigées : Déduire de la loi du moment cinétique la conservation du moment cinétique.

Soit $(\mathcal{R})$ un référentiel galiléen. La masse m est soumise à une force centrale.

Le moment cinétique en O point fixe de $(\mathcal{R})$ est : $L_O = OM \wedge m\vec{v}_{/R}$

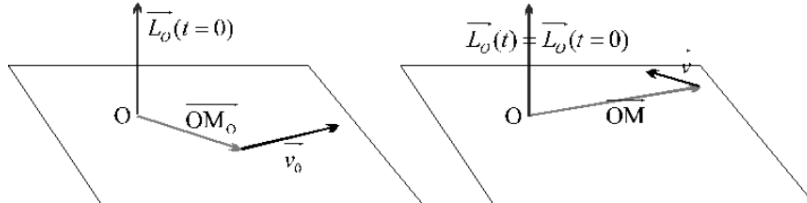
$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} / R = \vec{OM} \wedge \vec{f} = \vec{0}$$

: Le moment cinétique est **constant**. $\vec{L}_O = \vec{OM} \wedge m\vec{v}_{V/R} = m\vec{C}$. C est la **constante des aires**. En effet,

Compétences exigées : Connaître les conséquences de la conservation du moment cinétique : mouvement plan, loi des aires.

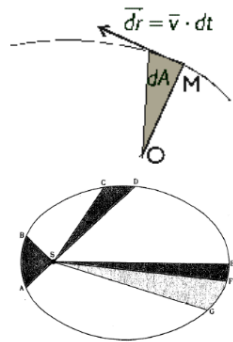
1er cas : $C = 0$ alors $\vec{OM} \wedge m\vec{v}_{V/R} = \vec{0}$: A chaque instant, les vecteurs $\vec{OM}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires : La trajectoire est une droite.

2ème cas : $C \neq 0$: $\vec{OM}_0$ et $\vec{v}_0$ forment un plan. A chaque instant, $\vec{OM}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux à $\vec{C}$ donc appartiennent au plan $(\vec{OM}_0, \vec{v}_0)$. **La trajectoire est plane.**



Remarque : Cette propriété sera encore vraie en relativité d'Einstein.

Puisque le mouvement est plan, on pourra paramétrer le problème par des coordonnées polaires (r, θ) .



$$\vec{OM} = r\vec{e}_r \text{ et } \vec{v} = \frac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_\theta \text{ alors,}$$

$$\vec{L}_O = \vec{OM} \wedge m\vec{v}_{V/R} = mr^2 \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_z = m\vec{C} = mC\vec{e}_z :$$

$$C = r^2 \frac{d\theta}{dt} : \text{C'est la loi des aires (à savoir et savoir démontrer)}$$

L'aire hachurée, $\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2 \frac{d\theta}{dt}$ est l'aire balayée par le rayon vecteur

par unité de temps. Cette aire est toujours la même : $\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{C}{2}$.

Remarque : $\frac{d\theta}{dt}$ garde un signe constant.

1.3 Conservation de l'énergie :

Compétences exigées : Exprimer la conservation de l'énergie mécanique et construire une énergie potentielle effective.



Montrons que la force centrale est une force conservative dérivant de $E_p(r) = -\int f(r)dr + K$



Montrons

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}m\frac{L^2}{r^2} + E_p(r) = m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2} + E_p(r) = \frac{1}{2}m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + E_{p(eff)}(r)$$

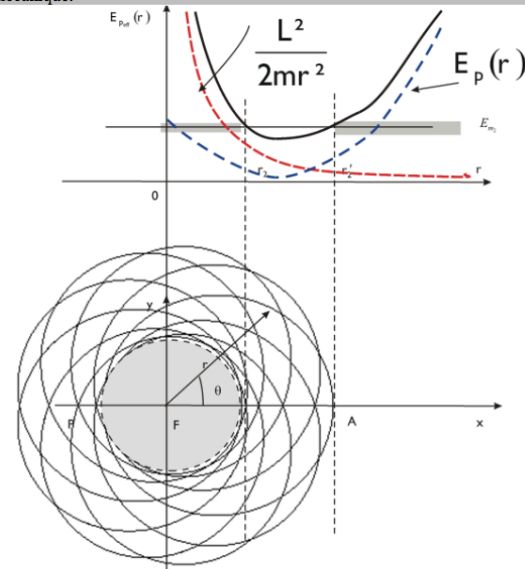
(à savoir démontrer)

Il y a conservation de l'énergie mécanique et la conservation de l'énergie se ramène à une étude à une dimension (même si le mouvement reste à deux dimensions)

Remarque:

Si on écrit la relation fondamentale $m\vec{a} = \vec{f}$, la 2ème relation $a_\theta = 0 = \left(2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)$ traduit la loi des aires, c'est à dire la conservation du moment cinétique : $C = r^2 \frac{d\theta}{dt} = cte$ et la première relation dérive de la conservation de l'énergie mécanique : $m\left(\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right) = f$. On peut donc utiliser d'une manière équivalente la relation fondamentale de la dynamique ou les lois de conservation de l'énergie et du moment cinétique.

Compétences exigées : Décrire qualitativement le mouvement radial à l'aide de l'énergie potentielle effective. Relier le caractère borné à la valeur de l'énergie mécanique.



1.4 Exemple : Etude d'un pendule conique :

Compétences exigées : Décrire qualitativement le mouvement radial à l'aide de l'énergie potentielle effective. Relier le caractère borné à la valeur de l'énergie mécanique.

Considérons le cas d'une masse m fixée à un fil de longueur l . Le mobile se trouve en $\vec{r}_0$ et sa vitesse vaut $\vec{v}_0$. Pour fixer les idées, supposons que $\vec{v}_0$ soit orthogonal à $\vec{r}_0$.

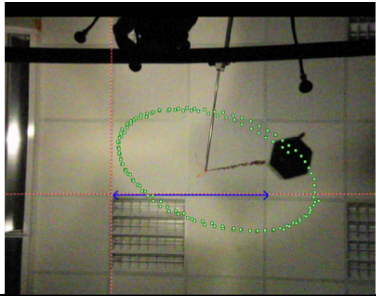
Nature du mouvement

Montrer que dans la mesure où $x, y \ll l$, le mouvement dans le plan est un mouvement à force centrale. Le mouvement est donc plan. Le plan de la trajectoire est le plan $(\vec{r}_0, \vec{v}_0)$ (car ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires).

En déduire les lois horaires $x(t)$ et $y(t)$

Montrer que la trajectoire est une ellipse de centre O. Avec les conditions de lancement explicitées plus

haut, la valeurs extrémales de la distance au centre de force O sont $r_{01} = r_0$ et $r_{02} = \frac{|\vec{v}_0|^2}{g}$ avec $w_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$.



Conservation du moment cinétique suivant Oz

En appliquant le théorème du moment cinétique :

$$\frac{dL_z}{dt} = \vec{OM} \wedge \vec{mg} + \vec{OM} \wedge \vec{v}_0 = 0$$

$$L_z(t=0) = (\vec{r}_0 \wedge m\vec{v}_0)_z = m r_0 v_0$$

Approche via l'énergie potentielle effective (ou efficace)

Retrouvons ces deux grandeurs via une analyse énergétique. L'énergie potentielle de pesanteur vaut

$$E_{pp}(r) = -mg(z) = -mg(\sqrt{l^2 - r^2})$$

$$\text{Comme } r \ll l, \sqrt{l^2 - r^2} \approx \left(1 - \frac{r^2}{2l^2}\right) \approx \left(1 - \frac{1}{2} \frac{r^2}{l^2}\right)$$

$$E_{pp}(r) = -mg\left(\sqrt{l^2 - r^2}\right) = -mg\left(1 - \frac{r^2}{2l^2}\right) = \frac{1}{2} \frac{mg}{l} r^2$$

Vu les conditions initiales, l'énergie mécanique du mobile vaut

$$E_m = \frac{1}{2} m \frac{g}{l} r_0^2 + \frac{1}{2} m v_0^2, \text{ qui est égale à}$$

$$E_m = \frac{1}{2} \frac{mg}{l} r^2 + \frac{1}{2} m \left[\frac{dr}{dt}\right]^2 + \frac{1}{2} m r^2 \left[\frac{d\theta}{dt}\right]^2$$

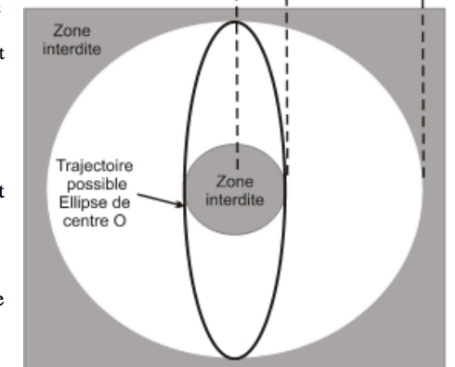
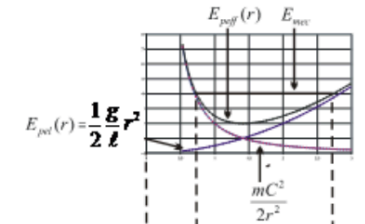
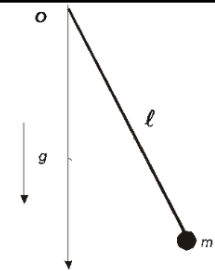
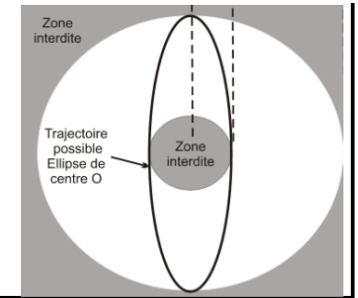
La partie ortho radiale de l'énergie cinétique fait apparaître le terme additionnel $\frac{mC^2}{2r^2}$ avec $C = r_0 v_0$ car $\vec{v}_0$

est supposé orthogonal à $\vec{OM}_0$.

On en déduit l'expression de l'énergie potentielle effective :

$$E_{peff}(r) = \frac{mg}{2} r^2 + \frac{mC^2}{2r^2} = \frac{mg}{2} r^2 + \frac{m r_0^2 v_0^2}{2r^2}$$

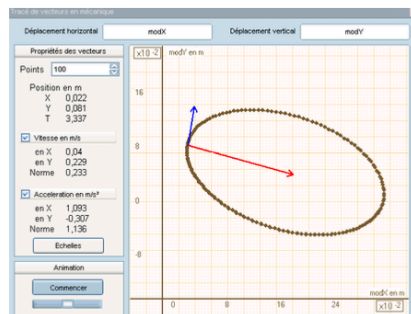
Le graphe dessus fait apparaître deux barrières de potentiel effectif pour $r = r_{\min}$ et $r = r_{\max}$.



La trajectoire est une ellipse de centre O qui s'inscrit entre deux zones interdites.

La position de l'ellipse dans le plan de la trajectoire est arbitraire. La figure correspond à une origine angulaire située au point de la trajectoire le plus proche du centre de force. On peut noter que l'on a bien $E_{p\text{eff}}(r) = E_m$ pour

$$r = r_0 \text{ et pour } r_0 = \left\| \frac{\mathbf{L}^2}{2mE_m} \right\| / w_0.$$



II Etude des forces en $1/r^2$:

Cela regroupe les cas où l'interaction est newtonienne ou coulombienne.

2.1. Expression de l'énergie potentielle :

$$\mathbf{f} = \frac{k}{r^3} \mathbf{r} = \frac{k}{r^2} \mathbf{e}_r \text{ dérive donc d'une énergie potentielle } E_p(r) = \frac{k}{r}.$$

Démonstration

(à savoir et savoir démontrer)

Dans le cas gravitationnel, $k = -Gm_1m_2 < 0$: C'est le cas des forces attractives.

Dans le cas coulombien, $k = \frac{q_1q_2}{4\pi\epsilon_0} > 0$ ou < 0 suivant le signe des charges.

Les forces sont, soit attractives, soit répulsives.

2.2 Mouvements planétaires :

Compétences exigées : Décrire qualitativement le mouvement radial à l'aide de l'énergie potentielle effective. Relier le caractère borné à la valeur de l'énergie mécanique.

Dans le cas du mouvement planétaire, la constante k vaut : $k = -GMm$.

La conservation de l'énergie et du moment cinétique se traduit dans $(\mathcal{R})$ par : $L = mr^2 \frac{d\theta}{dt} = mC$.

$$E_m = \frac{1}{2}m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GmM}{r} = \frac{1}{2}m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{mC^2}{2r^2} - \frac{GmM}{r} \quad E_m = \frac{1}{2}m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + E_{p\text{eff}}(r).$$

La masse m se déplace dans un potentiel effectif : $E_{p\text{eff}}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GmM}{r} = \frac{mC^2}{2r^2} - \frac{GmM}{r}$.

L'énergie potentielle effective est la somme de l'énergie potentielle de gravitation et de l'énergie potentielle centrifuge. Ce dernier terme empêche la Lune de tomber sur la terre. Pour que le mouvement ait lieu, il faut

que: $\frac{1}{2}m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = E_m - \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{GmM}{r} = E_m - E_{p\text{eff}}(r) > 0$. Cela détermine la zone de mouvement de la masse m .

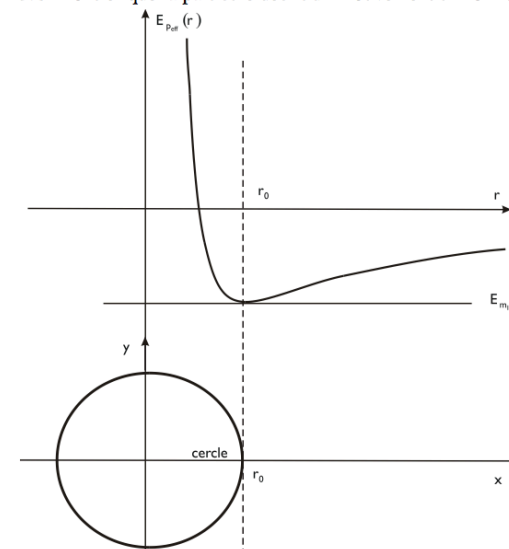
Nous pouvons faire une étude graphique en fonction de r . $E_{p\text{eff}}$ présente un minimum pour $\frac{dE_{p\text{eff}}}{dr} = 0$ soit

$$r = r_0 = \frac{L^2}{m^2MG}. \text{ L'énergie vaut alors } E_{p\text{eff}}(r_0) = -\frac{GmM}{2r_0}. \text{ Il y a plusieurs cas possibles de trajectoires.}$$

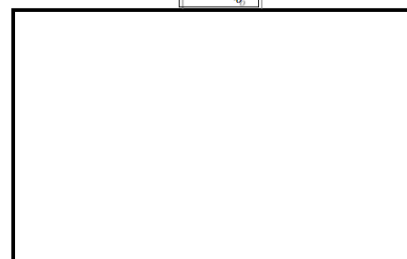
1er cas: $E_m = E_{m1} = E_{p\text{eff}}(r_0)$: La trajectoire est un cercle de rayon, $r = r_0$:

Compétences exigibles : Montrer que le mouvement est uniforme. Etablir expression de la vitesse.

Montrer que la particule décrit un mouvement uniforme.

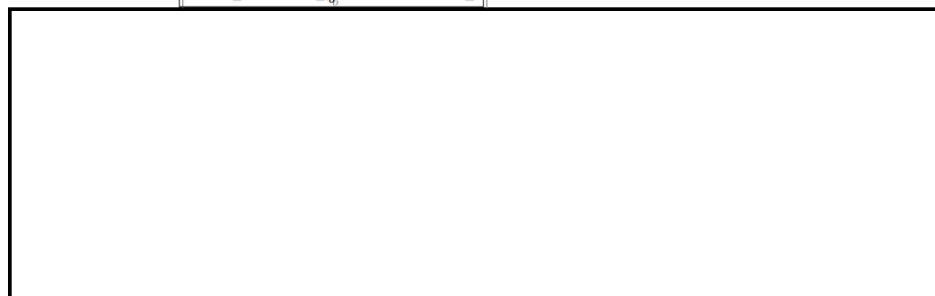


Montrer que $v^2 = \frac{MG}{r_0}$ (1).



Compétences exigibles : Exprimer l'énergie mécanique pour le mouvement circulaire.

Montrer que $E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{GmM}{2r_0} = -E_{p1} = -\frac{E_{p1}}{2}$



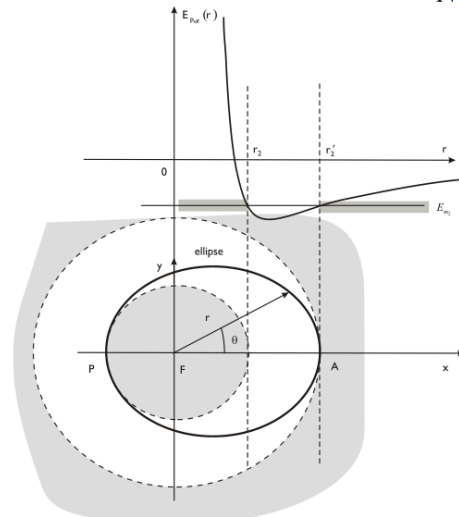
Compétences exigibles : Savoir calculer sa période.

Montrer que la période vérifie $\frac{T^2}{r_0^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$

(à savoir et savoir démontrer)

2^{ème} cas : $E_m = E_{m2}$: La trajectoire est limitée entre 2 cercles de rayons r_2 et r'_2 : La particule décrit alors une

ellipse dont l'origine est le foyer et d'équation $r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$. La particule est dans un état lié.



$r_2 = r_{\min} = \frac{p}{1+e}$ est la distance minimale : Le point P est le **périastre**. Dans le cas du mouvement de la Terre autour du Soleil, c'est le **périhélie** et d'un satellite autour de la terre est le **périgée**.

$r'_2 = r_{\max} = \frac{p}{1-e}$ est la distance maximale : Le point A est l'**apoastre**. Dans le cas du mouvement de la Terre autour du soleil, c'est l'**aphélie** et d'un satellite autour de la terre est l'**apogée**.

On a : $C = cte = v_A r'_2 = v_P r_2$

Alors, $r_{\min} + r_{\max} = 2a = \frac{p}{1+e} + \frac{p}{1-e} = \frac{2p}{1-e^2}$:

$$p = a(1-e^2)$$

Alors $r_2 = r_{\min} = a(1-e)$ et $r'_2 = r_{\max} = a(1+e)$

Compétences exigibles : Exprimer l'énergie mécanique pour le mouvement elliptique en fonction du demi-grand axe. Exploiter sans démonstration sa généralisation au cas d'une trajectoire elliptique.

L'énergie mécanique vaut $E_{m1} = -\frac{Gm_1 M}{2a}$ et la période vaut : $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$.

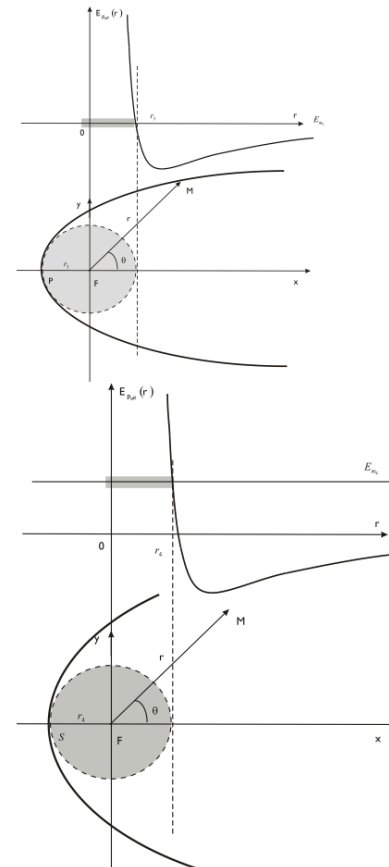
Remarque : En A et P, la vitesse radiale s'annule donc r est solution de $E_m = -\frac{Gm}{r} + \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2}$ soit une équation

du second degré donc $r^2 + \frac{GmM}{E_m}r - \frac{1}{2}\frac{mC^2}{E_m} = 0$ dont r_A et r_P sont solutions.

La somme des racines est $-\frac{Gm_{com} m_{cos}}{E_m} = r_A + r_P$ soit $E_{m1} = -\frac{GmM}{2a}$

Remarque: Pour retenir ces relations, il suffit de se souvenir du mouvement circulaire et remplacer r_0 par a.

Montrer que $v^2 = 2MG\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2a}\right)$ (à savoir démontrer)



2.3 Lois de Képler et limites :

2.3.1 Lois de Képler :

En astronomie, les **lois de Kepler** décrivent les propriétés principales du mouvement des planètes autour du Soleil, sans les expliquer. Elles ont été découvertes par Johannes Kepler à partir des observations et mesures de la position des planètes faites par Tycho Brahé, mesures qui étaient très précises pour l'époque.

Copernic avait soutenu en 1543 que les planètes tournaient autour du Soleil, mais il les laissait sur les trajectoires circulaires du vieux système de Ptolémée hérité de l'antiquité grecque. Les orbites elliptiques, telles qu'énoncées dans ses deux premières lois, permettent d'expliquer la complexité du mouvement apparent des planètes dans le ciel sans recourir aux épicycles du modèle ptoléméen.

Peu après, Isaac Newton découvrit en 1687 la loi de l'attraction gravitationnelle (ou gravitation), induisant celle-ci, par le calcul, les trois lois de Kepler.

Képler définit 3 lois qui portent son nom :

La 1^{ère} loi : Les planètes se déplacent sur des trajectoires elliptiques dont le soleil occupe un des foyers.

C'est une loi empirique mais qui ne justifie pas où se situe la planète à un instant donné et pourquoi les trajectoires sont elliptiques.

La 2^{ème} loi : Pendant un intervalle de temps donné, le rayon vecteur qui relie la planète au foyer balaie la même aire le long de la trajectoire elliptique.

3^{ème} cas : $E_m = E_{m3} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GmM}{r} = 0$ alors

$v_{\text{parabole}}^2 = \frac{2MG}{r}$. La particule décrit alors une parabole dont

l'origine est le foyer et d'équation $r = \frac{p}{1 + \cos \theta}$.

L'excentricité vaut $e = 1$: C'est le cas d'une ellipse où le 2^{ème} foyer tend vers l'infini. Le seul paramètre est $r_3 = r_{\min} = \frac{p}{2}$.

Comme tout cas limite, le cas des trajectoires paraboliques n'est jamais réellement réalisé, mais de nombreuses comètes vérifient un faible écart de e par rapport à 1, trop petit pour être mesuré.

4^{ème} cas : $E_m = E_{m4} > 0$: L'excentricité est $e > 1$: La

particule se déplace entre un cercle de rayon $R_{\min}$ et l'infini. La trajectoire est une hyperbole d'équation $r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$ qui

contourne le foyer qui est en O, le centre de force. Pour une hyperbole, $E_m = \frac{GmM}{2a}$ où a est la distance OS :

Exemple : La comète Morehouse (désignation moderne : C/1908 R1) était une comète non-périodique ($e=1.00073$) brillante découverte par l'astronome américain *Daniel Walter Morehouse* le 01/09/1908.

Cette loi permettait de faire des prédictions astronomiques de façon plus simple. Ces 2 lois ont été publiées en 1609 dans son livre Astronomie Nouvelle.

La 3^{ème} loi : Énoncée quelques années plus tard (1618), elle permet d'établir un rapport entre toutes les planètes alors que les 2 premières ne concernaient qu'une planète.

La période de rotation autour du Soleil d'une planète est reliée au demi-grand axe de l'ellipse par l'équation : $T^2/a^3 = \text{constante}$ où la constante a la même valeur pour toutes les planètes.

Historiquement, il reliait la période au rayon moyen de l'orbite car beaucoup de planètes ont une excentricité proche de 0.

2.3.2 Données astronomiques :

Selon la définition de l'Union astronomique internationale (UAI), « une **planète** est un corps céleste (a) qui est en orbite autour du Soleil, (b) qui possède une masse suffisante pour que sa gravité l'emporte sur les forces de cohésion du corps solide et le maintienne en équilibre hydrostatique (forme sphérique), et (c) qui a éliminé tout corps se déplaçant sur une orbite proche ».

Selon cette définition, le système solaire contient 8 planètes : Mercure, Vénus, la Terre, Mars, (planètes telluriques) Jupiter, Saturne, Uranus et Neptune (planètes gazeuses, géantes ou joviennes).

d : distance moyenne au soleil en 10^6 km

e : excentricité de l'orbite

i : inclinaison de l'orbite sur l'écliptique en degré

$\mu = GM$: constante de gravitation de la planète, en km^3s^{-2}

T : période orbitale en jours (j) ou années (a)

Nom	d	e	i	μ	T
Mercure	57,9	0,206	7°	$2,192 \cdot 10^4$	88 j
Vénus	108,2	0,007	3°,4	$32,486 \cdot 10^4$	224,7 j
Terre	149,6	0,0167	0°	$39,86 \cdot 10^4$	365,26 j
Mars	227,9	0,093	1°,9	$4,305 \cdot 10^4$	687 j
Jupiter	778,3	0,048	1°,3	$1,267 \cdot 10^8$	11,86 a
Saturne	1427	0,056	2°,5	$3,795 \cdot 10^7$	29,46 a
Uranus	2869,6	0,047	0°,8	$5,82 \cdot 10^6$	84,01 a
Neptune	4496,6	0,009	1°,8	$6,85 \cdot 10^6$	164,8 a

L'organisme coordinateur de l'astronomie au niveau international, en charge de la dénomination des corps célestes ainsi que de leur statut, a décidé lors de son XXVI^e congrès tenu le 24 Août 2006 en République tchèque, au terme d'une semaine de débats de reclasser Pluton en planète naine plutôt que planète. Le numéro d'objet mineur 134340 lui fut attribué le 7 septembre 2006. Notre système solaire possède donc 8 planètes et 5 planètes naines (Pluton-Charon, Cérès, Eris, Makemake, Hauméas)

2.3.3 Interprétation :

Il a fallu attendre 20 ans et Newton pour comprendre les lois de Képler. La 1^{ère} loi est une conséquence de la loi de gravitation qui permet de montrer que la trajectoire est une conique comme nous l'avons vu dans le paragraphe précédent : Le soleil est au foyer de l'ellipse. En fait, Newton a déduit la gravitation de ces lois expérimentales.

La 2^{ème} loi n'est autre que la loi des aires.

Enfin, la 3^{ème} loi donne la période : On a vu que $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi\pi^2}{Gm_s} = \frac{4\pi^2}{GM_s}$. Le calcul est valable compte tenu des ordres de grandeur, les masses de planètes sont faibles devant celle du soleil.

$$\text{Soleil-Terre} \quad \frac{m_r}{m_s} = 310^{-6} \quad \text{Soleil-Jupiter} \quad \frac{m_r}{m_s} = 10^{-3}$$

On peut donc confondre la masse réduite avec la masse de la planète et le référentiel du centre

de masse avec celui de Copernic, alors $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_s} = cte$. On retrouve la masse du soleil : $M_s = 1,98 \cdot 10^{30} \text{ kg}$

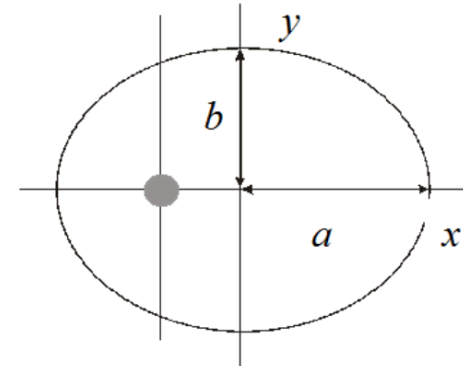
Dans cette théorie, on commet quelques omissions :

- La proximité d'une autre planète perturbe les trajectoires : Par exemple, Laplace rendit compte des inégalités du mouvement de Saturne en introduisant dans les équations du mouvement l'action gravitationnelle exercée par Jupiter. En 1845, Le Verrier chercha à interpréter le mouvement d'Uranus, la planète la plus externe. Il introduisit une nouvelle planète (Neptune) dont il calcula les éléments de la trajectoire. En suivant ces prévisions, elle fut découverte l'année suivante.¹
- On néglige les effets relativistes d'Einstein : Ils ont un effet non négligeable sur Mercure dont la trajectoire passe près du Soleil. On constate alors que le périhélie de Mercure avance de 43 secondes d'arc par siècle. La trajectoire n'est plus fermée.
- On doit apporter des corrections aux mesures angulaires de hauteurs du fait que l'atmosphère terrestre déforme le trajet des rayons lumineux : Les astres ont une direction légèrement différente de celle calculée....

2.3.4 Exercice : Mesure de e pour la terre :

Les conséquences principales du caractère non circulaire de l'orbite terrestre est l'inégalité des durées des saisons. Il se trouve que les dates des solstices d'hiver et d'été de l'hémisphère Nord coïncident avec les passages respectifs de la Terre au périhélie H et à l'aphélie E de son orbite. Nous supposons que H est sur l'axe polaire de la trajectoire elliptique de la Terre et nous noterons O le centre du Soleil. Le référentiel d'étude sera le référentiel héliocentrique supposé galiléen. Les positions des équinoxes de printemps P et d'automne A coïncident avec les passages de la Terre sur la droite perpendiculaire à l'axe polaire passant par le centre. La durée T_H de l'hiver est égale à $T_H = 89,4$ jours solaires moyens de 86400 s, tandis que celle du printemps, T_P est égale à $T_P = 93,2$ jours solaires.

- a. Placer les positions des solstices (E et H) et des équinoxes (P et A) sur l'ellipse. Placer aussi l'axe polaire et l'axe perpendiculaire.



- b. En supposant que l'excentricité e de la Terre est petite, $e \ll 1$, montrer que l'aire du secteur OHP est égale

à $A_{OHP} = \frac{ab}{4}(\pi - 4e)$, où a et b représentent respectivement le demi-grand axe et le demi-petit axe de l'ellipse

trajectoire. Établir alors l'expression de l'excentricité e en fonction de la durée de l'hiver T_H et de la durée d'une année terrestre T_{an} . Faire l'application numérique.

¹ Urbain-Jean-Joseph Le Verrier était né à Saint-Lô le 11 mars 1811. Il travaillait au laboratoire de chimie de Gay-Lussac lorsque, aspirant au poste de répétiteur de chimie de l'École polytechnique (d'où il était issu), il dut accepter celui de répétiteur de «géodésie, astronomie et machines». Il se consacra désormais à la mécanique céleste, avec assez de bonheur pour que l'Académie des sciences lui ouvre ses portes en janvier 1846, à la place laissée vacante par le décès de Cassini IV. Moins d'un an auparavant, Arago lui avait «représenté» que le désaccord des positions de la planète Uranus «imposait à chaque astronome de concourir, autant qu'il était en lui, à en éclaircir quelque point». Traitant le problème inverse de celui des perturbations Le Verrier publiait, le 31 août 1846, les éléments de l'orbite d'une planète hypothétique supposée produire sur Uranus l'effet observé. L'astronome berlinois Galle observait l'objet prédit le 23 septembre 1846, jour même où il avait reçu de Le Verrier une lettre précisant la position de cet objet.

2.4 Mouvement des satellites terrestres :

Le mouvement d'un satellite dans le champ terrestre obéit, en première approximation, au mouvement de Képler. Le référentiel du centre de masse est confondu au référentiel géocentrique, supposé galiléen car la masse de la Terre est beaucoup plus grande que celle du satellite.

On néglige l'interaction avec la Lune. Ceci suppose que l'on reste suffisamment proche de la Terre. L'étude du lancement d'une fusée sur la lune est exclue de ce cadre.

De même, on suppose que le champ créé à l'extérieur de la Terre est en $1/r^2$, c'est à dire que l'on considère la Terre comme ponctuelle. En fait, en raison de la rotation propre de la Terre, les effets centrifuges sont responsables de l'aplatissement de la Terre (1/298). On constate donc que la trajectoire des satellites n'est pas exactement fermée et que le plan de la trajectoire est animé d'un lent mouvement de précession autour de

l'axe des pôles. La seule force qui s'exerce sur la masse m est donc : $\vec{f} = -mG \frac{M_T}{r^2} \vec{u}$ avec $M_T = 6,10^{24} \text{ kg}$.

2.4.1 Etude de l'orbite géostationnaire :

Compétences exigibles : Calculer l'altitude du satellite et justifier sa localisation dans le plan équatorial.

Les télécommunications ont envahi notre monde moderne, et la nécessité de disposer de satellites fixes par rapport à la Terre, s'est rapidement imposée. En effet, un tel satellite joue le rôle de relais de transmission ou d'un œil pour la surveillance globale de la Terre. Nous allons vérifier que ce type d'application est possible.

a) Orbite géosynchrone :

On appelle ainsi une orbite de période identique à celle de la Terre, soit $T = 23 \text{ h } 56 \text{ mn } 4,1 \text{ s} = 86164,1 \text{ s}$.

En hypothèse képlérienne, le rayon est donné par : $\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T} \Rightarrow R_g = \left(\frac{GMT^2}{4\pi^2} \right)^{1/3} = 42164,16 \text{ km}$

Une telle orbite possède la propriété de survoler un même lieu géographique, à chaque période, puisque la Terre et le satellite auront tous les deux effectué un tour complet et retrouvé la même position par rapport aux étoiles, mais avec l'inconvénient de ne pas rester à la verticale d'aucun point de la Terre.

b) Orbite géostationnaire :

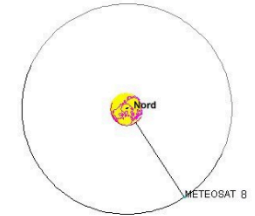
Si on impose en plus à ce satellite de rester fixe par rapport à un point de la Terre. Or, le référentiel terrestre est en rotation autour d'un axe fixe d'où : $\vec{v}_{/R_{\text{géocentrique}}} = \vec{v}_{/T} + \vec{\omega} \wedge \vec{OM}$. Si $\vec{v}_{/T} = 0$ alors $\vec{v}_{/R_{\text{géocentrique}}}$ est orthogonal à $\vec{\omega}$.

Le plan de la trajectoire est celui qui contient le centre de force et perpendiculaire à $\vec{\omega}$ soit le plan équatorial. Ce point ne peut être que sur l'équateur, sinon le satellite serait à la fois au nord et au sud de l'équateur. L'orbite est nécessairement équatoriale. L'orbite est obligatoirement circulaire pour éviter une oscillation Est-Ouest.

Il n'existe donc qu'une seule orbite satisfaisant à ces critères :

Orbite circulaire équatoriale de rayon $R_g = 42164,16 \text{ km}$ en képlérien.

REMARQUE : Classiquement, on rencontrera dans la littérature, qu'un tel satellite gravite à 36000 km du sol. C'est en réalité la valeur arrondie correspond à une altitude réelle képlérienne de 35786,16 km.



c) Orbite géostationnaire réelle :

Nous savons que la Terre est en première approximation assimilable à un ellipsoïde. Le renflement équatorial terrestre crée donc un supplément d'attraction qui accélère la vitesse. Pour que le satellite retrouve la bonne vitesse angulaire ou linéaire, donnant la période sidérale, il faut le placer un peu plus haut. Le calcul, donne un rayon de 42164,68 km, en ne prenant pas en compte les autres perturbations.

d) Intérêt de l'orbite géostationnaire réelle :

On comprend aisément que trois satellites disposés à 120° sur l'orbite géostationnaire, permettent "de voir" quasiment toute la Terre, à part une petite zone polaire située aux extrêmes.

En utilisant deux satellites on peut communiquer d'un point quelconque de la Terre à un autre sans problème.

Seules les latitudes au-dessus de 81° environ ne sont pas accessibles

Le problème est que cette partie de l'espace est très chargée actuellement !!

Un satellite en orbite géostationnaire est caractérisé par sa longitude de stationnement, L_S . Cette donnée est capitale pour la réception des émissions par une antenne satellite, car elle conditionne l'orientation en azimut et en déclinaison locale de l'axe de l'antenne. La longitude de stationnement est surveillée à 0.1° près.

Actuellement, les principaux satellites utilisés en France sont :

- ASTRA à $19^\circ 2 \text{ EST}$
- EUTELSAT II-F3 à 16° EST
- EUTELSAT II-F1 et HOT BIRD 1 -> 3 à 13° EST
- TELECOM 2B/2D à 5° OUEST
- TELECOM 2A à 8° OUEST

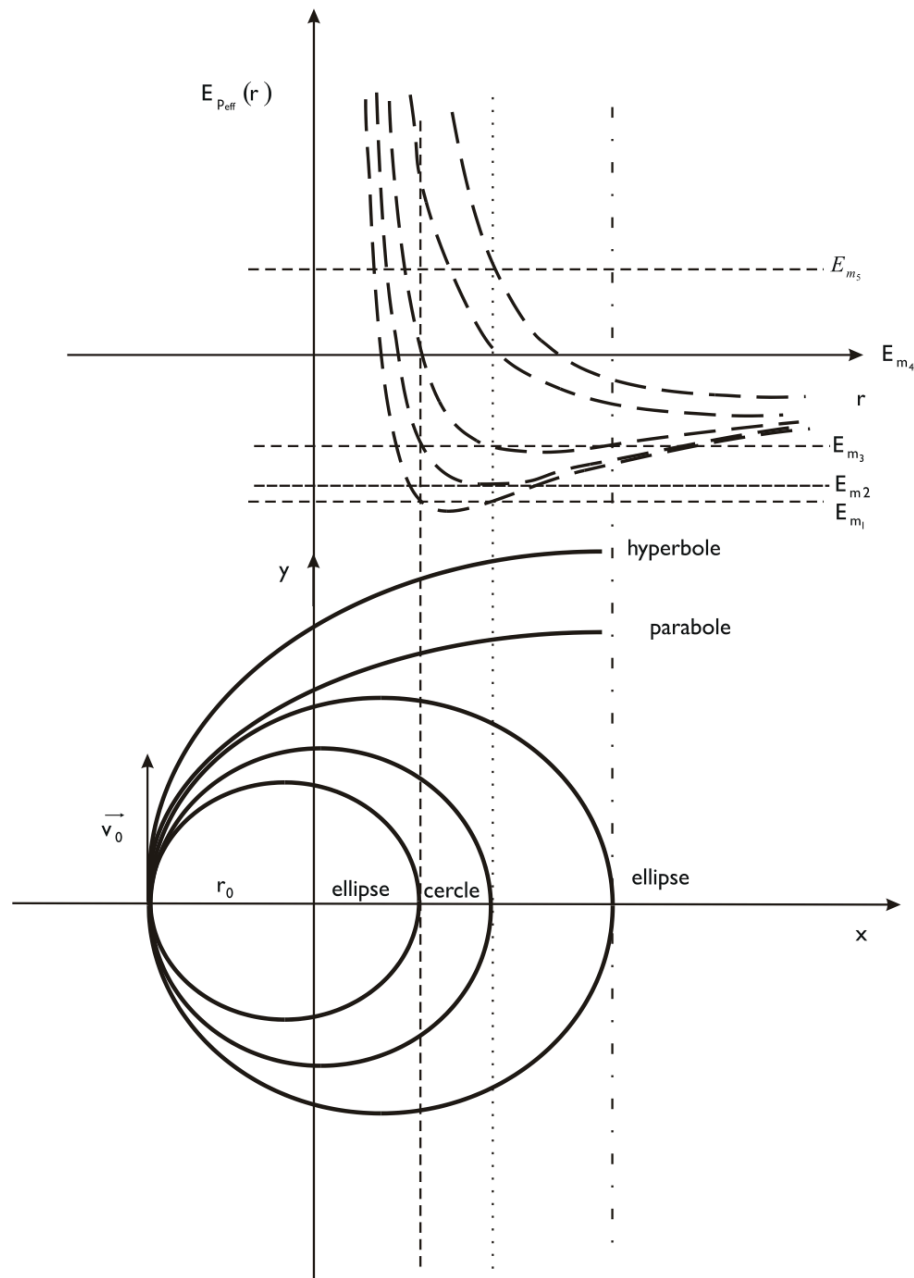
2.4.2 Vitesse de libération :

Compétences exigibles : Décrire qualitativement le mouvement radial à l'aide de l'énergie potentielle effective. Relier le caractère borné à la valeur de l'énergie mécanique.

On lance d'une distance r_0 avec une vitesse v_0 avec $\vec{v}_0 \cdot \vec{r}_0 = 0$.

Quelque soit la valeur du module de v_0 , $\frac{dr}{dt}(0) = 0$. On part d'un point $E_m = E_p(r_0)$.

Discuter suivant la valeur de v_0 , les différentes trajectoires possibles. Faire la correspondance entre les graphes d'énergie potentielle ci-dessus et les trajectoires.



Compétences exigées : Vitesses cosmiques : vitesse en orbite basse et vitesse de libération. Exprimer ces vitesses et connaître leur ordre de grandeur en dynamique terrestre.

La vitesse en orbite basse est la vitesse minimale qu'il faut communiquer à un corps pour avoir une orbite

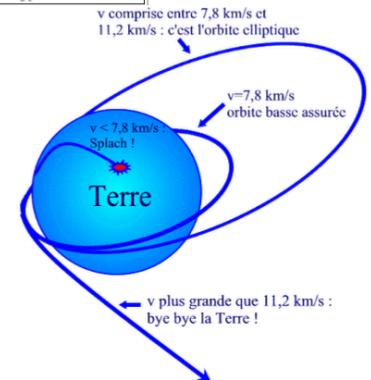
circulaire lorsqu'il est situé à une distance R du centre : $V_c = \sqrt{\frac{M_T G_T}{R}} = 7,8 \text{ km/s}$

La vitesse de libération est la vitesse minimale qu'il faut communiquer à un corps pour l'arracher de l'attraction terrestre lorsqu'il est situé à une distance R du centre. On passe d'un état lié à un état de diffusion. Cela correspond à la trajectoire parabolique : $E_m = 0$ soit

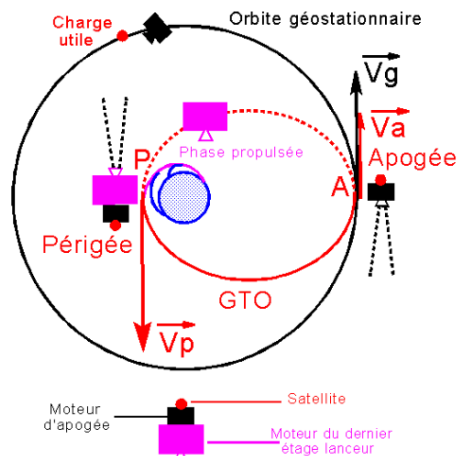
$$E_m = \frac{1}{2} m V_i^2 - m G \frac{M_T}{R} = 0 \text{ soit } V_{li} = \sqrt{\frac{2 M_T G_T}{R}} = \sqrt{2} V_c$$

Soit, au voisinage du sol $v_l = 11,2 \text{ km/s}$.

Remarque: Si on considère un corps de masse élevée et de rayon faible, la vitesse de libération peut atteindre la valeur c de la lumière : Rien ne peut donc sortir. C'est le cas des trous noirs.



2.4.3 Satellisation : (à savoir refaire)



Pour mettre un satellite en orbite circulaire, on doit procéder en 3 temps :

- Une phase propulsée correspondant aux 1^{ers} étages de lancement.
- La 2^{ème} phase est dite GTO (GEOSTATIONARY TRANSFER ORBIT) : l'engin s'éloigne de la Terre sur une ellipse dont le foyer est placé au centre de la terre jusqu'à l'apogée.

☞ Durant cette phase, quelles sont les lois de conservation ?

☞ Montrer que $v_p^2 = \frac{2MGR_A}{(R_p + R_A)R_p}$ et $v_A^2 = \frac{2MGR_p}{(R_A + R_p)R_A}$

- Dans une 3^{ème} phase, on communique au satellite pendant un temps très bref, un accroissement de la vitesse qui lui permet de se satelliser sur un cercle.

Si on veut le mouvement circulaire alors $v_{A_i} = \sqrt{\frac{MG_i}{R_{A_i}}} > v_{A_i}$

Lorsque la fusée arrive à l'apogée, on actionne un moteur pour lui communiquer rapidement l'énergie nécessaire pour atteindre v_A .

2.4.4 Phasage et héliosynchronisme :

Nous abordons, qualitativement, dans ce chapitre, les applications modernes, actuelles des satellites d'imagerie spatiale, le satellite étant devenu, en particulier, le géomètre de l'espace.

En effet, le besoin d'images est de plus en plus nécessaire, pour des usages très divers :

- Cartographie, vue du relief en 3D à usage civil ou militaire (missiles de croisière ...)
- Surveillance militaire et acquisitions de données (Hélios ...)
- Images pour l'industrie ou des particuliers (SPOT ...)
- Etudes scientifiques d'évolution de phénomènes terrestres (pollution, déforestation, cultures, archéologie ...)

On demande à un système optique embarqué de réaliser depuis l'espace, des prises de vue de détails sur le sol terrestre. Cela requiert des conditions de fonctionnement très précises :

Choix naturel d'une orbite circulaire, afin de ne pas avoir à modifier la focale le long de l'orbite, de plus la vitesse angulaire de tangage reste alors constante.

Suite à la remarque ci-dessus, le satellite doit avoir une stabilisation de la vitesse de tangage extrêmement précise. C'est une des contraintes du SCAO (Système de Contrôle d'Attitude et d'Orbite).

La nécessité de comparaison des images impose aussi, de toute évidence, de survoler périodiquement les mêmes lieux de la Terre, ce qui signifie que la trace sol doit de refermer au bout d'un certain temps T, appelé PERIODE DE REPETITIVITE. Un satellite *phasé* repasse exactement sur sa trace au sol après un certain nombre de révolutions. Cette situation se produit si le satellite accomplit un nombre entier de révolutions tandis que la Terre accomplit un nombre entier de révolutions.

Par exemple, les satellites GPS sont sur des orbites *phasées* et repassent exactement au dessus des mêmes points du globe toutes les deux orbites...

On comprend bien que la contrainte précédente impose une stabilité de l'orbite, notamment en altitude de manière à conserver une période de révolution stable.

Ceci ne peut être atteint qu'en évitant de freiner sur les couches hautes de l'atmosphère, il faut donc choisir une orbite circulaire au-dessus de 500 km sol.

La précision de la prise de vue, ou si l'on veut la résolution, impose de limiter l'altitude, on choisit donc un maximum de 1500 km d'altitude.

Enfin l'usage constant de prise de vues dans des longueurs d'ondes précises, notamment en infra rouge, impose de maîtriser au mieux l'activité solaire, surtout si l'on veut comparer des enregistrements de même site. La condition est donc d'essayer de survoler un même lieu toujours à la même heure locale. Cette condition à respecter s'appelle la condition d'héliosynchronisme. Pour un tel satellite, la direction de l'éclairement solaire fait un angle constant avec le plan orbital. L'éclairement du sol en dessous du satellite ne dépend ainsi que de la latitude et des saisons. De nombreux satellites d'observation de la Terre sont à la fois sur orbite basse (LEO) et héliosynchrone (SSO).

2.4.5 Jour solaire- Jour sidéral :

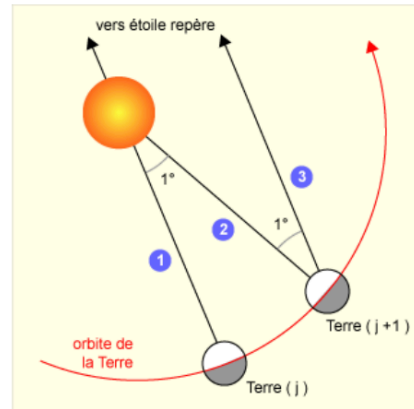
En astronomie, il existe :

- **le jour sidéral** : c'est la durée de la rotation de la Terre sur elle-même (environ 23 heures 56 minutes et 4 secondes)
- **le jour solaire vrai** : c'est l'intervalle de temps séparant deux levers, deux couchers ou deux passages du Soleil au méridien. Il varie de 23 h 59 min 39 s à 24 h 0 min 30 s, il vaut donc en moyenne 24 heures. Le jour solaire vrai est donc plus long que le jour sidéral à cause du mouvement de la Terre autour du Soleil.
- **le jour solaire moyen** : il dure 24 heures et commence à midi, tandis que le jour civil commence à minuit.

Le jour sidéral est plus court d'un peu moins de 4 minutes que le jour solaire : si, une certaine nuit, à 23 h 25 min, vous observez une étoile par rapport à un repère fixe, la nuit suivante vous la verrez au même endroit à 23 h 21 min.

Cette différence d'environ 4 minutes s'explique ainsi : en une année, la Terre effectue environ 365 tours sur elle-même par rapport au Soleil, mais effectue aussi un tour complet autour du Soleil. Donc, par rapport aux étoiles, 365 jours solaires équivalent à 366 jours sidéraux (364 si l'orbite terrestre était rétrograde).

Les jours sidéraux sont donc un peu plus courts que les jours solaires. La période réelle de l'année étant de 365,2422 jours solaires, la durée exacte de l'année sidérale est de : $365,2422 / (365,2422 + 1) = 0,9972696$ jour solaire, soit 23 h 56 min 4,09 s.



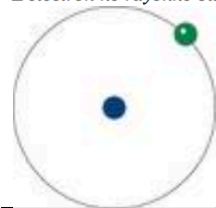
2.5 Atome d'hydrogène ou ion hydrogénoïde:

Ce modèle est un complément du modèle planétaire d'Ernest Rutherford qui décrit l'atome d'hydrogène comme un noyau massif et chargé positivement, autour duquel se déplace un électron chargé négativement. Le problème posé par ce modèle est que l'électron, charge électrique accélérée, devrait selon la physique classique, rayonner de l'énergie et donc finir par s'écraser sur le noyau.

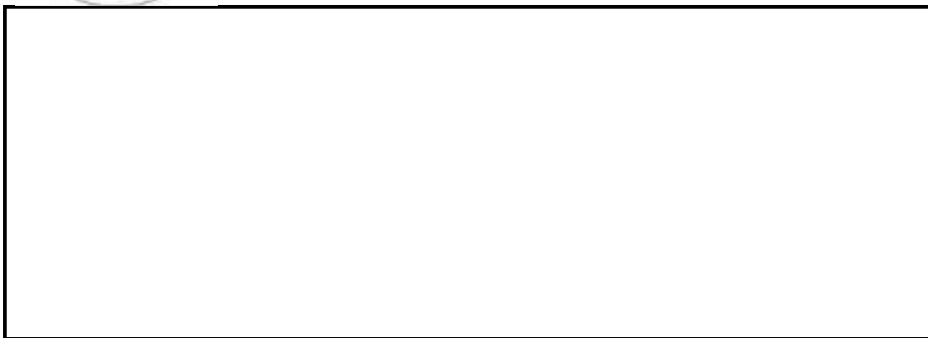
Niels Bohr propose d'ajouter deux contraintes :

L'électron ne rayonne aucune énergie lorsqu'il se trouve sur une orbite stable (ou orbite stationnaire). Ces orbites stables sont différenciées, quantifiées. Ce sont les seules orbites sur lesquelles l'électron peut tourner. L'électron ne rayonne ou n'absorbe de l'énergie que lors d'un changement d'orbite.

L'atome d'hydrogène (ou un ion hydrogénoïde) est constitué d'un noyau de charge $+Ze$ autour duquel gravite un électron de charge $-e$ dans le champ de force électrostatique. La masse du noyau est beaucoup plus élevée que celle de l'électron, le référentiel du centre de masse se confond avec celui lié au noyau et la masse se confond avec la masse la plus légère, m_e . Bohr a supposé que l'électron décrit un mouvement circulaire.



Montrer que le mouvement est alors uniforme et $E_n = -\frac{Ze^2}{8\pi\epsilon_0 r_n}$.



Dans le cas de l'hydrogène ($Z=1$), E représente l'énergie nécessaire pour séparer l'électron du proton, c'est à dire l'énergie d'ionisation de l'atome d'hydrogène. On trouve $E = -13,598 \text{ eV} = 2,177 \cdot 10^{-18} \text{ J}$.

Le rayon est alors $r_0 = a_0 = 0,53 \cdot 10^{-10} \text{ m}$ appelé le rayon de Bohr. C'est bien l'ordre de grandeur atomique.

Les expériences montrent que l'énergie des électrons est quantifiée c'est à dire que l'énergie des électrons ne peut prendre que certaines valeurs appelées **états stationnaires**. Dans le cas des atomes à un seul

électron (H, He^+ , Li^+ ..), les valeurs expérimentales des niveaux d'énergie E_n avec $n = 1, 2, 3, \dots$ sont :

$$E_n = \frac{\text{constante}}{n^2}.$$

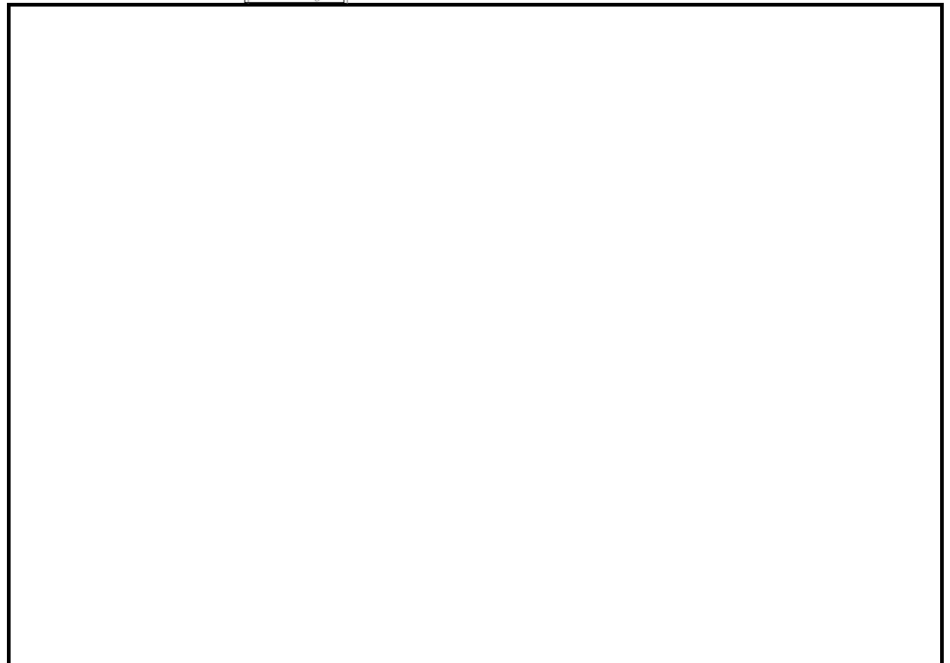
Plus exactement, $E_n = -\frac{13,598 Z^2}{n^2}$. Les orbites permises sont donc quantifiées et proportionnelles à

$\frac{n^2}{Z}$. Comme l'énergie et le rayon, le moment cinétique est quantifié. En effet, le moment cinétique en O est

$$\vec{L} = m_e \vec{r}_O \wedge \vec{v}_O = m_e r_O v_O \vec{e}_z \text{ soit } L = m_e r_O v_O : \boxed{L^2 = m_e^2 r_O^2 v_O^2 = m_e r_O (m_e r_O v_O^2) = m_e r_O \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0}}$$

Comme r_O est proportionnel à $\frac{n^2}{Z}$, alors $L = \text{constante} \times n$: Cette quantification du moment cinétique fut suggérée pour la 1^{ère} fois en 1913 par le savant danois, Niels Bohr (1885-1962). Il écrivit cette relation sous la forme : $L = n \frac{h}{2\pi}$ où n est un entier et h est la constante de Planck.

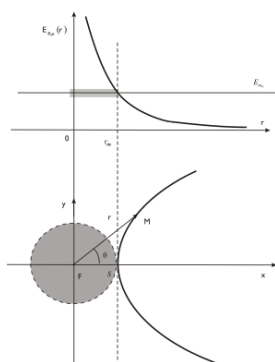
Montrer que $E_n = \frac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 h^2 n^2}$



Néanmoins cette théorie, même modifiée par Sommerfeld pour tenir compte des orbites elliptiques, ne surviva pas à la révolution de la mécanique quantique en 1926.

III Cas des forces répulsives : Problème de diffusion :

3.1 Cas général :



Le seul cas possible à traiter est le cas de l'interaction électrostatique entre 2 charges de même signe. Dans le cas répulsif, l'énergie mécanique est toujours positive. La trajectoire ne peut être qu'une hyperbole. Nous sommes dans un état de diffusion.

$$r(\theta) = \frac{p}{e \cos(\theta - \theta_0) - 1} \quad \text{où} \quad p = \frac{mC^2 4\pi\epsilon_0}{q_1 q_2}$$

La distance minimale d'approche est $r_{\min} = \frac{p}{e - 1}$

3.2 Exemple : Diffusion de Rutherford (1909) :

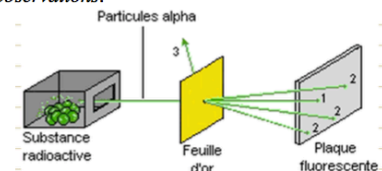
En 1907, J.J. Thomson demande à son élève Rutherford de vérifier l'exactitude de son modèle atomique. Rutherford accepte d'approfondir la théorie du «Plum-Pudding» de Thomson et il veut étudier davantage la structure interne de l'atome. Avec l'aide de deux assistants, Hans Geiger et Ernest Marsden, il décide d'utiliser les particules alpha, très petites et très rapides, qu'il a découvertes pour bombarder une feuille d'or très mince (il utilise l'or, car ses atomes sont très lourds). Il s'attend à l'un ou l'autre de ces comportements: ou toutes les particules traversent la feuille d'or, ou aucune d'elles ne la traverse puisque la matière est homogène. Dans cette expérience, les particules alpha sont produites à partir d'un échantillon de radium radioactif enfermé dans une enceinte de plomb. Elles sont polarisées en un seul faisceau par une fine fente dans le bouclier de plomb. Des écrans fluorescents sont placés derrière la feuille d'or et en avant de celle-ci (en angle bien sûr, afin de ne pas freiner le passage du faisceau). Ces écrans émettent une scintillation (un point brillant) lorsqu'ils sont atteints par une particule alpha. Ils permettent donc de suivre la trajectoire des particules.

En faisant l'expérience, Rutherford et ses assistants font ces observations:

La plupart des particules alpha traversent la feuille d'or sans déviation comme si elles n'avaient jamais rencontré les atomes d'or (1).

Plusieurs particules alpha sont légèrement déviées lors de la traversée de la feuille d'or (2).

Certaines particules alpha rebondissent carrément vers la source comme si elles avaient frappé un mur (3).



La déviation des particules alpha est d'autant plus importante que la masse atomique du métal composant la feuille est élevée.

Ces faits vont complètement à l'encontre des attentes de Rutherford. Très surpris, il s'exclame: «C'est aussi peu croyable que si nous avions tiré un obus sur du papier de soie et que l'obus nous soit revenu en pleine figure.»

Rutherford en déduit que cette déviation de particules alpha positives ne peut résulter que de la présence d'un corps chargé positivement (puisque'il y eu répulsion). De plus, puisque la majorité des particules alpha ne sont pas déviées, c'est qu'elles ne rencontrent pas de matière, donc que la majeure partie des atomes est vide.

En 1911, Rutherford propose son modèle atomique: L'atome offre des espaces vides immenses.

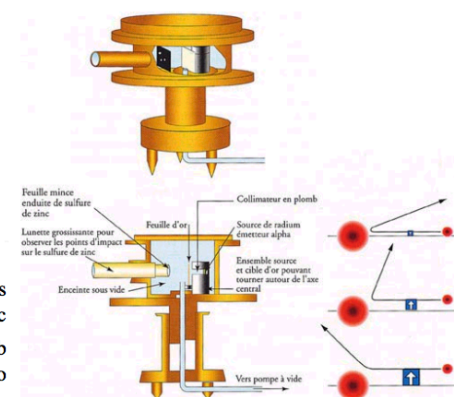
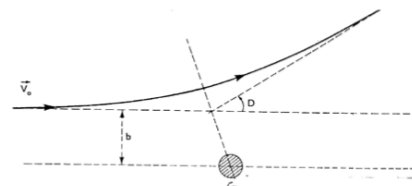
Le centre de l'atome, qu'il nomme «noyau» est minuscule et dense. Il est chargé positivement.

Les électrons négatifs circulent autour du noyau à une très grande vitesse et se déplacent jusqu'à des distances très éloignées du noyau (si nous imaginons la taille du stade olympique de Montréal, le noyau ne serait pas plus gros qu'une mouche!). Ces derniers sont retenus au noyau par des forces électriques.

La somme des charges des électrons est égale à la charge du noyau, l'atome étant électriquement neutre.

Rutherford compare l'atome à un minuscule système solaire où des électrons (planètes) gravitent autour d'un noyau central (Soleil).

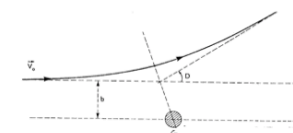
Aucun résultat n'est à connaître.



On bombarde une mince feuille d'or avec des particules α . Une particule α de masse m_α arrive avec une vitesse v_α dont le support est distant de b (paramètre d'impact) du noyau d'or de numéro atomique $Z = 79$.

La particule α est déviée d'un angle D . La masse du noyau étant très élevée, on peut confondre la masse de la particule avec la masse m_α .

Donner les expressions de la conservation de l'énergie et du moment cinétique.



En déduire que la distance minimale d'approche est obtenue pour $r_m = a + \sqrt{a^2 + b^2}$ où $a = \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 m_\alpha v_\alpha^2}$.

VII - Ce qu'il faut retenir et conseils pratiques :

Notions	Compétences
✓ Force centrale. ✓ Jour solaire, Jour sidéral. ✓ Vitesse de libération. ✓ Satellite géostationnaire. ✓ Périastre, apoastre. ✓ Périhélie, périégée. ✓ Aphélie, apogée.	✓ Pour une force centrale, savoir établir la conservation du moment cinétique et que trajectoire est plane ✓ Savoir établir la loi des aires, ✓ Savoir établir la conservation de l'énergie, faire apparaître l'énergie potentielle effective ✓ Dans le cas $1/r^2$, savoir établir la vitesse pour un mouvement circulaire, l'énergie cinétique et mécanique. Savoir transposer au mouvement elliptique. Établir la 3^{ème} loi Kepler. Savoir transposer à l'ellipse. Calcul de $r_{\min}$ et $r_{\max}$. ✓ Savoir établir la vitesse sur une parabole. ✓ Savoir énoncer les lois de Képler. ✓ Savoir retrouver une distance minimale d'approche.

Annexe HISTORIQUE -

Pour fixer les idées de l'étude du mouvement des corps célestes, quelques dates sont nécessaires :

- 1602 : KEPLER observe que les rayons vecteurs des planètes balaient des aires égales en des temps égaux. C'est la fameuse LOI DES AIRES.
- 1605 : Toujours par l'observation, KEPLER identifie les orbites des planètes à des ellipses de foyer le Soleil. Plus tard, NEWTON qui retrouvera par le calcul différentiel ces trajectoires coniques, en déduira la loi de la gravitation.
- 1618 : de nouvelles mesures permettent d'établir la loi des périodes, à savoir $\frac{T^2}{a^3} = Cste$
- 1667 : NEWTON maintenant muni de la théorie du calcul différentiel et intégral, reprend les observations de KEPLER et énonçant la loi de la gravitation universelle, confirme toutes les lois de KEPLER et ouvre ainsi la période du déterminisme scientifique et la voie à la conquête spatiale.

Il faut situer ici l'**anecdote de la pomme**. Peut-être pure invention mais invention due à NEWTON lui-même.

Vacances 1665 à Woolthorpe, le soir. Un verger, un pommier, une pomme qui tombe, la Lune qui ne tombe pas. Pourquoi? Et puis soudain, l'illumination. La Lune tombe et sa trajectoire s'incurve comme celle d'un projectile. Et cette courbure est juste celle qui la maintient à distance constante de la Terre dans un état de chute permanent.

La Lune est donc attirée par la Terre. Que vaut cette force d'attraction? Le jeune NEWTON reprend le cas d'une planète sur sa trajectoire circulaire de rayon R qui nous suffira ici. KEPLER a vérifié expérimentalement que le carré de

la période T est proportionnelle au cube du rayon de la trajectoire $T \propto R^{3/2}$. Or $T = \frac{2\pi R}{V}$, on en déduit $V \propto \frac{1}{\sqrt{R}}$. La

force responsable de la courbure de la trajectoire vaut $F \propto \frac{mV^2}{R}$ donc $F \propto \frac{m}{R^2}$. NEWTON maîtrise parfaitement son

sujet. Il affinera les résultats obtenus: il va montrer que la force centrale en $\frac{1}{r^2}$ entraîne que les planètes ont une trajectoire elliptique dont le Soleil est un des foyers. Ce problème posé par HALLEY et qui n'est pas trivial avait fait "sécher" un bon nombre de physiciens de l'époque probablement parce qu'ils cherchaient à placer le Soleil au centre de l'ellipse; il retrouve tous les résultats de KEPLER (trajectoires planes, constance de la vitesse areolaire) et montre que ce sont des conséquences du caractère central de la force de gravitation.