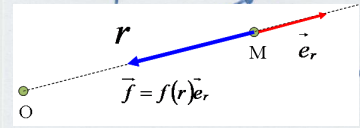


I) Pls des forces centrales

1- Def: 

avec $\vec{e}_r = \frac{\partial \vec{r}}{\partial r}$; force passe ljs par O centre de force

2- Conservat du moment cinétique, loi des aires :

Conservat du moment cinétique
 $\vec{L}_O = \vec{O}M \wedge \vec{p} = \vec{O}M \wedge m\vec{v}$ avec O fixe ds R) galiléen

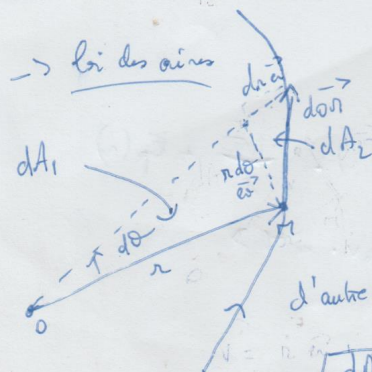
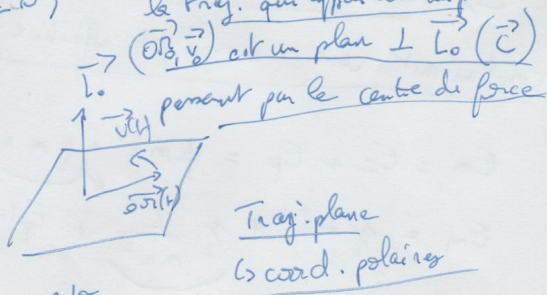
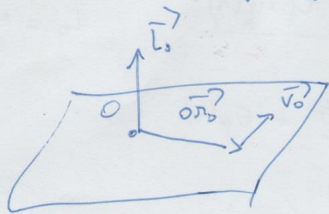
$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \frac{d\vec{O}M}{dt} \wedge m\vec{v} + \vec{O}M \wedge m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{O}M \wedge f(r)\vec{e}_r = \vec{0}$$

$\downarrow$
 $\vec{f} \parallel \vec{e}_r$

$$\boxed{\vec{L}_O = \text{cte} = m \vec{C}}$$
 avec $\vec{C}$ constante des aires

Conséquences de la conservat de $\vec{L}_O$: traj. plane et loi des aires

1^{er} cas : $\vec{C} = \vec{0} \rightarrow (\forall t) \vec{O}M \text{ et } \vec{v} \text{ colinéaires} \rightarrow \text{traj. est une droite}$
 2^{es} cas : $\vec{C} \neq \vec{0} \rightarrow \left. \begin{matrix} \vec{O}M \cdot \vec{L}_O = 0 \\ \vec{v} \cdot \vec{L}_O = 0 \end{matrix} \right\} (\forall t) \vec{O}M \text{ et } \vec{v} \perp \text{ à vect. est } \vec{C}$
 → traj. plane

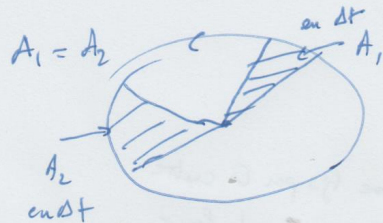


$$dA_1 = \frac{r^2 d\theta}{2}$$

$$dA_2 = \frac{r dr d\theta}{2} \rightarrow \text{ordre 2 en } d\theta \text{ petit négligeable}$$

$$\frac{dA_1}{dt} = \frac{dA_2}{dt} = \frac{r^2 \dot{\theta}}{2}$$

d'autre part $\vec{L}_O = \vec{r} \wedge m(\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta) = mr^2\dot{\theta}\vec{e}_\theta$
 $\vec{C} = \frac{\vec{L}_O}{m} = r^2\dot{\theta}\vec{e}_\theta$
 $\frac{dA}{dt} = \frac{C}{2}$ loi des aires → aire balayée cste



3- Conservation de l'É_{mg}

→ Force centrale dérive d'1 É_p

$$\delta W = \vec{f} \cdot d\vec{l} = f(r)\vec{e}_r \cdot (dr\vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta)$$

$$\delta W = f(r) dr = -dE_p \rightarrow \frac{dE_p}{dr} = -f(r) \text{ force dérive d'1 } E_p$$

$$\rightarrow E_p = - \int f(r) dr + K \rightarrow E_p(r)$$

le mvt est donc conservatif sans l'effet d'1 force centrale (uniquement)

ne dpt que de la part; le travail ne dpt pas du chemin mais uniquement des posit initiales et finales

→ Ramenons-nous à 1 mvt conservatif à 1 D en construisant une énergie pot. effective $E_{p\text{eff}}(r)$

$$L_O = mr^2\dot{\theta}$$

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2 + E_p(r)$$

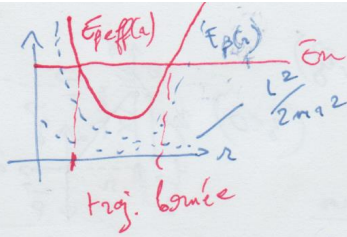
$$E_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} \frac{L^2}{m r^2} + E_p(r)$$

$\frac{\text{cte}}{r^2}$

$$E_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + E_{p\text{eff}}(r) = \text{cte avec } E_{p\text{eff}}(r) = \frac{\text{cte}}{r^2} + E_p(r)$$

On peut reprendre l'analyse du mvt conserv. à 1 D

Exemple :



(ge) En exploitant le PFD équivaut à l'analyse énergétique :

$$m \vec{a} = \vec{f} \rightarrow \text{avec force centrale} \rightarrow \vec{a} = a_r \vec{e}_r \text{ et } \vec{a}_\theta = 0$$

$$\rightarrow \text{sur } \vec{e}_\theta : \begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} (L^2 / (2mr^2)) \\ 0 &= 2\dot{r}\ddot{\theta} + r\ddot{\theta} \Leftrightarrow \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta}) = 0 \end{aligned}$$

$$2r\dot{r}\ddot{\theta} + r^2\ddot{\theta} = r(2\dot{r}\ddot{\theta} + r\ddot{\theta}) = 0$$

$$\hookrightarrow L = \text{cte} \rightarrow \text{loi des aires}$$

$\rightarrow \text{sur } \vec{e}_r :$

$$m a_r = m (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = f \Leftrightarrow \text{à la conservation de l'énergie méca}$$

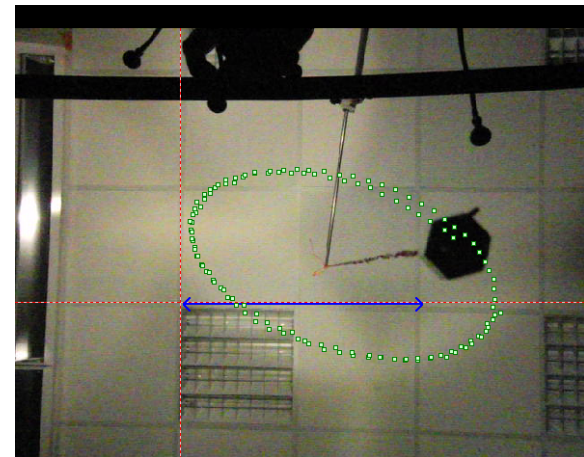
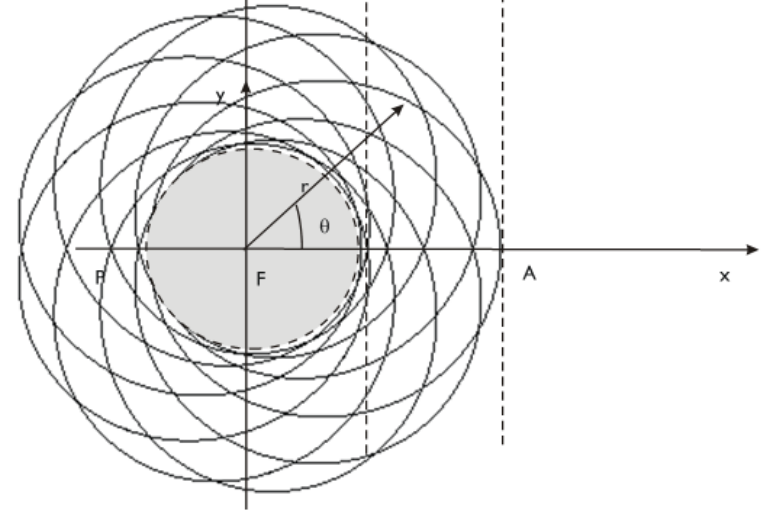
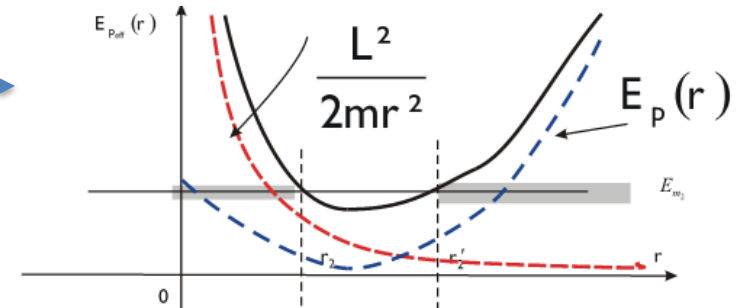
$$\hookrightarrow \frac{dE_m}{dt} = 0$$

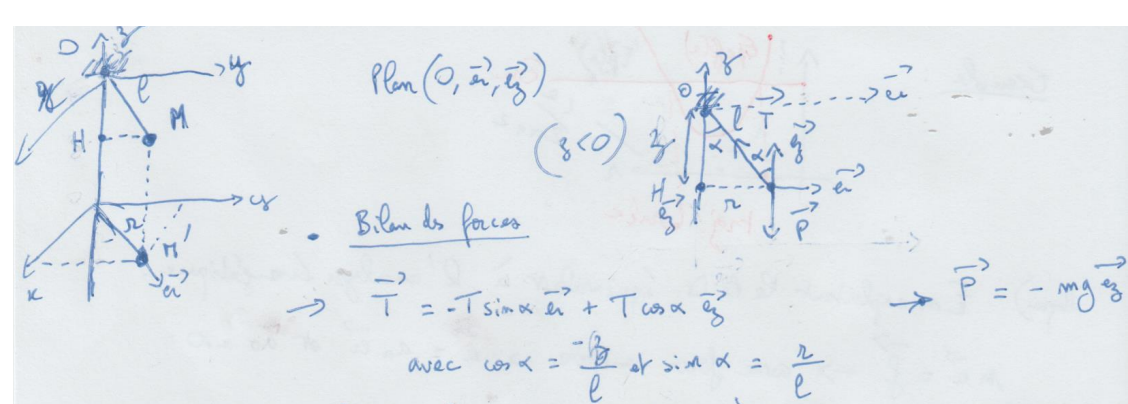
4 - Application : étude d'un pendule conique

On lance un pendule avec une vitesse $\vec{v}_0 \perp \vec{r}_0$; le pendule est initialisé à l'écart de sa position d'équilibre.

a) Nature du mouvement

On se place dans le cas où $x, y \ll l$, montrons que le mouvement du pendule dans le plan (x, y) est à force centrale, et déterminons $x(t); y(t)$





Mut à force centrale de (O, x, y)

Approximatif $x, y \ll l$ soit α très petit $\rightarrow \begin{cases} \cos \alpha \approx 1 \rightarrow z \approx l \\ \sin \alpha \approx \alpha = \frac{r}{l} \end{cases}$

$\vec{T} \approx T \left(-\frac{r}{l} \vec{e}_x + \vec{e}_z \right)$

avec $\frac{r}{l} \ll 1 \rightarrow \vec{T} \approx T \vec{e}_z$ à l'ordre le + bas

Soit un mut plan $\perp$ à $\vec{e}_z$ donc dans $(O, x, y) \rightarrow \ddot{z} = 0$

$(\vec{T} + \vec{P}) \cdot \vec{e}_z = 0$

$T - mg = 0 \rightarrow \boxed{T = mg}$

Mut ds le plan: la seule composante de force à considérer est celle de $\vec{T}$

Ds ce plan $\vec{F}_{\text{résultante}} = -\frac{mg r}{l} \vec{e}_r \rightarrow$ il s'agit d'une force centrale de point fixe O.

• donc horaires $x(t), y(t)$ et trajectoire ds (O, x, y)

$\vec{F} = -\frac{mg r}{l} \vec{e}_r$ avec $r \vec{e}_r = \vec{ON} = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y$

$\vec{F} = -\frac{mg}{l} (x \vec{e}_x + y \vec{e}_y)$

PFD $\rightarrow m \vec{a} = \vec{F}$

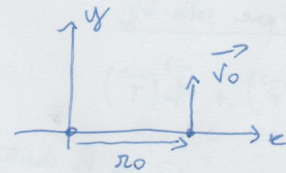
sur $\vec{e}_x$: $m \ddot{x} = -\frac{mg}{l} x \rightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$

sur $\vec{e}_y$: $m \ddot{y} = -\frac{mg}{l} y \rightarrow \ddot{y} + \omega_0^2 y = 0$

$$\begin{cases} x(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t \\ y(t) = A' \cos \omega_0 t + B' \sin \omega_0 t \end{cases}$$

Exploits la CI

$\vec{v}_0 \perp \vec{r}_0$



$$\begin{cases} \vec{r}_0 = r_0 \vec{e}_x \\ \vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(t=0) = r_0 = A \\ \dot{x}(t=0) = 0 = B \omega_0 \rightarrow B = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \boxed{x(t) = r_0 \cos \omega_0 t}$$

$$\begin{cases} y(t=0) = 0 = A' \\ \dot{y}(t=0) = v_0 = B' \omega_0 \rightarrow B' = \frac{v_0}{\omega_0} = r_0' \end{cases}$$

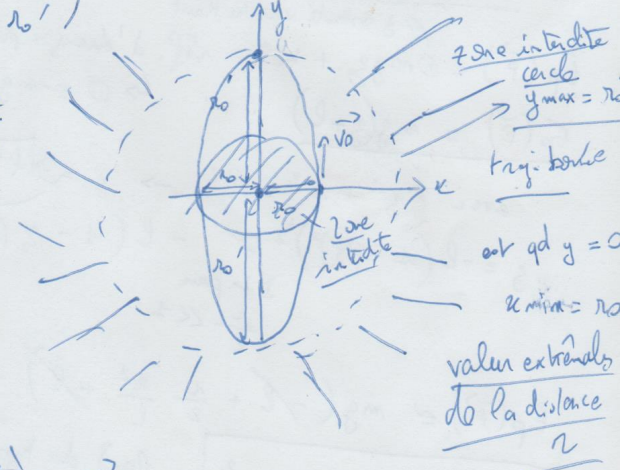
$$\rightarrow \boxed{y(t) = r_0' \sin \omega_0 t}$$

$r_0' = \frac{v_0}{\omega_0}$

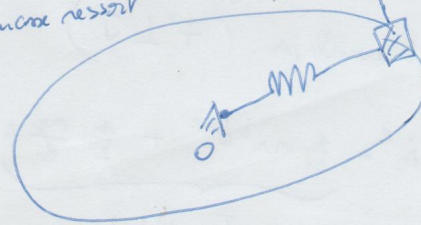
Trajectoire: $\left(\frac{x}{r_0} \right)^2 + \left(\frac{y}{r_0'} \right)^2 = \cos^2 \omega_0 t + \sin^2 \omega_0 t = 1$

$\hookrightarrow$ ellipse

avec $r_0' > r_0$ grand axe $2r_0'$ petit axe $2r_0$



(Ige) m mut pour le système masse ressort



b) Approche énergétique

- Conservation du moment cinétique selon Oz

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum \vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{M}_O(\vec{P}) + \vec{M}_O(\vec{T})$$

$$\left[\frac{dL_z}{dt} \right] = M_z(\vec{P}) + M_z(\vec{T}) \rightarrow 0 \text{ car la droite support (d'action) de } \vec{T} \text{ coupe l'axe } (Oz)$$

$$\text{donc } L_z = \text{cte} = (\vec{OM}(t=0) \wedge m\vec{V}(t=0)) \cdot \vec{e}_z = (r_0 \vec{e}_r \wedge m v_0 \vec{e}_\theta) \cdot \vec{e}_z = (m r_0 v_0 \vec{e}_\phi) \cdot \vec{e}_z$$

$$L_z = \text{cte} = m r_0 v_0$$

- Énergie potentielle effective (ou efficace)

$$E_p(\vec{P}) = \oplus mgz + K \quad \text{réf. d'énergie pot. } E_p(z=-l) = 0$$

$$E_p(\vec{P}) = mg(z+l)$$

$$\text{avec } z^2 + r^2 = l^2 \rightarrow z = \sqrt{l^2 - r^2} \rightarrow \text{ici } z < 0!!$$

$$z = -l \left(1 - \left(\frac{r}{l} \right)^2 \right)^{1/2} \approx -l \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{r}{l} \right)^2 \right) = -l + \frac{1}{2} \frac{r^2}{l}$$

$$DL \text{ pour } \frac{r}{l} \ll 1$$

$$E_p(\vec{P}) \approx mg \left(-l + \frac{1}{2} \frac{r^2}{l} + l \right) \rightarrow$$

$$E_p(\vec{P}) \approx \frac{1}{2} \frac{mg}{l} r^2$$

analogie masse/resort
Rq: du type $E_p = \frac{1}{2} k r^2 !!$
"force de rappel" vers l'équilibre

$$\text{or } E_p(\vec{T}) = 0 \text{ car } \vec{T} \text{ ne travaille pas } (\vec{T} \perp \vec{V})$$

$$\text{donc } E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \underbrace{\frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \frac{mg}{l} r^2}_{E_{\text{eff}}(r)}$$

La partie orthoradiale de l'E : $\frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2$ fait apparaître le terme additionnel constant $\rightarrow \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2 = \frac{L_z^2}{2 m r^2}$ avec $L_z = \text{cte} = m r_0 v_0$ (ou $C = r_0 v_0$)

$$\text{d'où } E_{\text{eff}}(r) = \frac{L_z^2}{2 m r^2} + \frac{1}{2} \frac{mg}{l} r^2$$

$$E_{\text{eff}}(r) = \frac{m r_0^2 v_0^2}{2 r^2} + \frac{1}{2} \frac{mg}{l} r^2$$

$\downarrow$ en $1/r^2$ $\downarrow$ parabole

A partir du graphique ci-contre :

on trouve les 2 limites $r_{\min}$ et $r_{\max}$ telles que

$$E_{\text{eff}} < E_m = \text{cte}$$

$\rightarrow$ la traj. est bornée avec 2 zones interdites

$$r < r_{\min} \quad r > r_{\max}$$

