

II - Étude des forces centrales en $\frac{1}{r^2}$

- ↳ interact newtonienne $\rightarrow$ chp gravitationnel
- ↳ interact coulombienne $\rightarrow$ chp électrostatique entre 2 charges ponctuelles

1- Énergie potentielle

$$\vec{f} = \frac{k}{r^2} \vec{u} = k \frac{\vec{r}}{r^3} \rightarrow \text{force conservative}$$

$$dE_p = -\delta W = -\vec{f} \cdot d\vec{r} = -\frac{k}{r^2} dr$$

$$\hookrightarrow E_p = \frac{k}{r} + \text{cte} \quad \text{avec } E_p(r \rightarrow +\infty) = 0 \rightarrow \text{pas d'interaction à très grande distance}$$

$$\hookrightarrow \text{cte} = 0$$

$$E_p = \frac{k}{r} \rightarrow k = -G m_1 m_2 < 0 \quad \text{forces attractives}$$

$$\rightarrow k = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} > 0 \quad \text{suivant les signes } q_1, q_2$$

2- Mouvements planétaires

On étudie le mouvement d'un objet de masse m comme une planète, un satellite, une comète... en interaction avec un centre attracteur de masse M de f galiléen.

a) Construite de l' E_{peff} : ici $k = -G M m$

$$E_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + E_p(r)$$

$$E_{\text{peff}} = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r}$$

↳ force "répulsive" qui empêche la lune de tomber sur la Terre par ex.

↳ énergie potentielle centrifuge > 0

↳ énergie potentielle gravitationnelle < 0

↳ force attractive

Étude des variat de $E_{\text{peff}}(r)$:

Pour r faible $\rightarrow E_{\text{peff}}(r) < \frac{L^2}{2mr^2}$ en $\frac{1}{r^2} \rightarrow E_p$ décroissante

Pour $r \rightarrow$ grand $\rightarrow E_{\text{peff}}(r) \propto -\frac{GMm}{r} \propto -\frac{1}{r} < 0 \rightarrow E_p$ croissante

$r \rightarrow +\infty \rightarrow E_{\text{peff}}(r \rightarrow +\infty) \rightarrow 0^-$

$E_{\text{peff}}(r)$
 $\rightarrow$ en $\frac{1}{r^2}$

entre les 2 $\rightarrow$ position du minimum : r_0

$$\frac{dE_{\text{peff}}}{dr} = 0$$

$$\frac{dE_{\text{peff}}}{dr} = -2 \frac{L^2}{2mr^3} + \frac{GMm}{r^2}$$

$$= \frac{1}{r^2} \left(-\frac{2L^2}{2mr} + GMm \right)$$

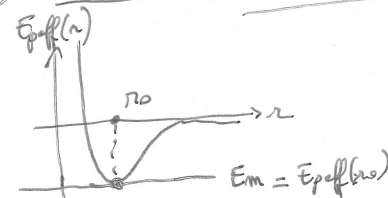
$$\left(\frac{dE_{\text{peff}}}{dr} \right)_{r=r_0} = 0 \Leftrightarrow \frac{2L^2}{2mr_0} = GMm \rightarrow r_0 = \frac{L^2}{m^2 \Gamma G}$$

$$E_{\text{peff}}(r=r_0) = -\frac{GMm}{r_0} + \frac{L^2}{2m \cdot r_0 \times r_0} = -\frac{GMm}{r_0} + \frac{GMm}{2r_0}$$

$$E_{\text{peff}}(r=r_0) = -\frac{GMm}{2r_0}$$

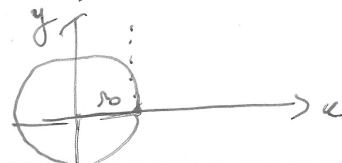
Plusieurs trajectoires sont alors possibles en f^o de l' E_m cote

b) 1^{er} cas : $E_m = E_{\text{peff}}(r_0) < 0$



$\rightarrow$ il n'y a qu'une valeur de r possible $r=r_0$!

(trajectoire circulaire!)



→ Montrons que la mot est uniforme

Conservat du momt cinétique : $L = m r^2 \dot{\theta} = \text{cte}$
avec $r = r_0 = \text{cte} \rightarrow \dot{\theta} = \omega$

→ $v = r_0 \dot{\theta} = \omega r_0$

Expression de la vitesse en exploitant le PFD

Mot circulaire → $\vec{a} = -\frac{v^2}{r_0} \vec{e}_r + \frac{dv}{dt} \vec{e}_\theta$

uniforme → $\vec{a} = -\frac{v^2}{r_0} \vec{e}_r$

PFD → $m \vec{a} = -\frac{GmM}{r_0^2} \vec{e}_r = -\frac{mv^2}{r_0} \vec{e}_r$

→ $v^2 = \frac{r_0 G M}{r_0}$

⚠ la vitesse est indpdle de la masse de l'objet en orbite autour du centre attracteur, elle ne dpt que de r_0 et M la masse du centre.

→ Montrons que l' E_c est égale

à la moitié de l' E_p !

et trouvons E_m !!

$E_c = -E_{peff} = -\frac{E_p}{2}$!!

$E_m = -\frac{GmM}{2r_0} = \frac{E_p}{2} = -E_c$

$E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \frac{m r_0 G}{r_0} = -\frac{E_p}{2}$ car $E_p = -\frac{GmM}{r_0}$

$E_m = E_c + E_p = -\frac{E_p}{2} + E_p \Rightarrow E_m = \frac{E_p}{2} = -E_c = E_{peff}(r_0)$
 $E_m = -\frac{GmM}{2r_0}$

qel vitesse minimale pour satelliser un mobile en orbite basse

pour $r \approx r_T \rightarrow v_{\min} = \sqrt{\frac{G M_T}{r_T}} \approx 7,9 \text{ km.s}^{-1}$
Ds la pratique $E_m = E_c + E_{peff}(r_0)$ il faut $E_c \geq \frac{1}{2} m v_{\min}^2$

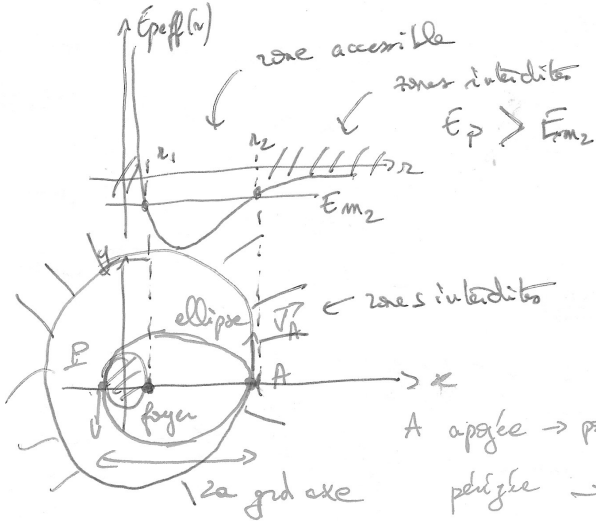
→ Calcul de la période de rotation

$T = \frac{2\pi r_0}{v}$ (distance parcourue en 1 tour)

$T = 2\pi r_0 \sqrt{\frac{r_0}{G M_T}} \rightarrow \frac{T^2}{r_0^3} = \frac{4\pi^2}{G M_T}$

$\frac{T^2}{r_0^3} = \text{cte} \rightarrow 3^{\text{e loi de Kepler}}$

c) 2ème or $0 < E_m < E_{peff \min}$



→ la traj. est bornée entre $r_{\min} = r_1$ et $r_{\max} = r_2$

↳ (état lié)

A apogée → pour satelliser autour de Terre
perigée → pour satelliser autour de Terre
en A et P, la vitesse radiale est nulle.

sinon apogée, périastre (périhélie, aphélie autour du soleil)
↳ car $E_m = E_{peff} \rightarrow E_c = 0 = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 \Leftrightarrow \dot{r} = 0$
composante radiale $\vec{v} = \dot{r} \vec{e}_r = \vec{0}$

Equat polaire de la trajectoire : ellipse avec centre attracteur positionné sur un de ses 2 foyers

$r = \frac{P}{1 + e \cos \theta}$ e excentricité

Données →

$$\begin{cases} r_{\min} = r_1 = \frac{p}{1+e} \\ r_{\max} = r_2 = \frac{p}{1-e} \end{cases}$$

$$r_{\min} + r_{\max} = 2a = \frac{p}{1+e} + \frac{p}{1-e} = \frac{2p}{1-e^2}$$

$$\hookrightarrow p = a(1-e^2)$$

$2a \rightarrow$ grande

d'où $r_{\min} = a(1-e)$ et $r_{\max} = a(1+e)$

• Expression de l'Em et de la période

$$E_m = - \frac{GMm}{2a}$$

$$\leftrightarrow E_m = - \frac{GMm}{2r_0}$$

à savoir (démonstration de la polycopie)

on remplace r_0 par a !

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$$

à savoir

• Expression de la vitesse

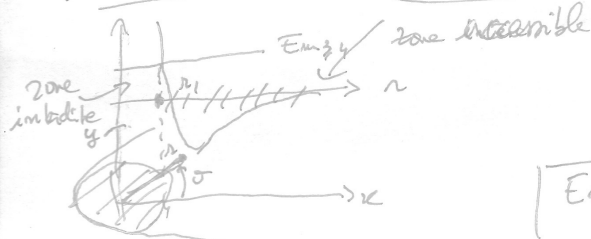
$$v^2 = 2MG \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2a} \right)$$

à connaître

Démonstration : $E_m = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} = - \frac{GMm}{2a}$

$$\hookrightarrow v^2 = 2MG \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2a} \right)$$

d) 3^{ème} / 4^{ème} cas : $E_m \geq 0$ $\rightarrow$ les objets sont diffusés $\hookrightarrow$ non-liés



hyperbole d'équation

$$r = \frac{p}{1+e \cos \theta}$$

$$E_m = \frac{GMm}{2a}$$

signe $\ominus$ par rapport à l'ellipse

Re $E_m = 0 \rightarrow$ parabole $e = 1$ (ellipse dont le 2^{ème} foyer $\rightarrow \infty$)

$$E_m = 0 = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} = 0$$

$$v_{\text{parabole}}^2 = \frac{2MG}{r}$$

Equation $r = \frac{p}{1+\cos \theta}$

seul paramètre

$$r_{\min} = \frac{p}{2}$$

c) loi de Kepler :

- 1^{ère} loi $\rightarrow$ traj elliptique avec foyer soleil

- 2^{ème} loi $\rightarrow$ constante des aires

- 3^{ème} loi $\rightarrow \frac{T^2}{a^3} = \text{cte} \quad \forall$ les planètes

3 - Mouvement des satellites terrestres

- ↳ pas d'interaction avec la lune pour des satellites suffisamment proches de la Terre
- ↳ on néglige les effets d'aplatissement de la Terre → effets centrifuges qui imposent un plan de la traj. des satellites animés d'un mot de précession autour de l'axe des pôles.

a) Orbite géostationnaire

- orbite géosynchrone : période identique à celle de la Terre
 $T = 23 \text{ h } 56 \text{ min } (4, 1 \text{ s})$

$$\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T} \rightarrow R = \left(\frac{GMT^2}{4\pi^2} \right)^{1/3} = 42\,164,16 \text{ km}$$

↳ survole le même lieu à chaque période mais ne reste pas à la verticale d'un point de la Terre

• Orbite géostationnaire

- ↳ Satellite fixe par rapport à un point de la Terre

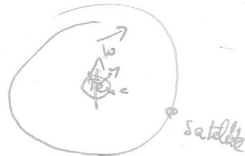
Avec $R_{\text{Terrestre}}$ on rotate $\vec{\omega}$ autour d'un axe fixe

$$\vec{v}_{\text{satellite}/R_{\text{Geo}}} = \vec{v}_{\text{satellite}/R_{\text{Terrestre}}} + \vec{\omega} \wedge \vec{OO'}$$

$$\text{avec } \vec{v}_{\text{satellite}/R_{\text{Terrestre}}} = \vec{0} \rightarrow \boxed{\vec{v}_{\text{satellite}/R_{\text{Geo}}} \perp \vec{\omega}}$$

Donc le plan de la trajectoire est celui qui contient le centre de force et $\perp$ à $\vec{\omega}$ → plan équatorial. (l'orbite est circulaire pour éviter une oscillation Est-Ouest)

$$\hookrightarrow \boxed{\text{orbite circulaire équatoriale avec } R = 42\,164,16 \text{ km}}$$



$$h_{\text{ge}}) \cdot \boxed{h = R - R_T \approx 36\,000 \text{ km du sol}}$$

altitude

- en réalité Terre aplatie (ellipsoïde) → supplément d'attraction qui accélère la vitesse → satellite en orbite réelle un peu + haut (295 km)

b) Vitesse de libération

On lance d'une distance $r = r_0$ un objet avec une vitesse v_0 . Quelle est la valeur de v_0 qui permet la libération → traj. non-bouclée? (corps "arraché" à l'attraction terrestre)

Réponse: il faut $\boxed{E_m \geq 0}$
 $(E_c + E_p)$

$$E_m = \frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{GMm}{r} \geq 0$$

$$\boxed{v_0 \geq v_{\text{lib}} = \sqrt{\frac{2GM}{r_0}}}$$

Au voisinage du sol $r_0 = R_T = 6400 \text{ km}$

$$\boxed{v_{\text{lib}} = 11,2 \text{ km.s}^{-1}}$$

Rq) Vitesse en orbite basse : vitesse minimale pour avoir une orbite circulaire à distance R

$$\boxed{v_{\text{orbite basse}} = \sqrt{\frac{GM}{R_T}} = 7,8 \text{ km.s}^{-1}}$$

sinon "splach!" sur la Terre.