

III) Applications aux champs électrostatiques : forces attractives ou répulsives

1) Modèle de l'atome d'hydrogène : force attractive coulombienne

 Modèle de Bohr "planétaire"

Controverse: d' e^- charge accélérée devrait rayonner de l'ém. et finir par s'écraser sur le noyau
Réponse de Bohr: traj. circulaires stables sans rayonnement qui sont quantifiés en énergie donc en rayonn.

• Montrons que le mv est uniforme et calcul de E_m

traj. circulaire $m\vec{a} = m\left(-\frac{v^2}{R}\vec{e}_r + \frac{dv}{dt}\vec{e}_\theta\right) = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 R^2}\vec{e}_r$
 force coulombienne

donc $\frac{dv}{dt} = 0 \rightarrow$ mv est uniforme

et $v^2 = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 m R}$

$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 R}$

$E_m = -\frac{Ze^2}{8\pi\epsilon_0 R}$

$Z=1$ avec $E_{ioniz} \approx -13,6\text{eV}$
 $R = a_0 = 0,53 \cdot 10^{-10}\text{m}$
 $\hookrightarrow$ rayon de Bohr

• États stationnaires quantifiés :

montrons que E et R sont quantifiés.

Hyp. de Bohr

$\hookrightarrow$ les orbites sont quantifiées par l'intermédiaire du moment cinétique :

$L = m \frac{R}{2\pi} v = n\hbar$

avec n entier
 $\hbar$ cste de Planck.

$\vec{L} = \vec{r} \wedge m\vec{v} = mRv\vec{e}_\theta$

$\hookrightarrow L^2 = m^2 R^2 v^2 = mR \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} = n^2 \frac{\hbar^2}{4\pi^2}$

$\rightarrow R_n = n^2 R_1$ avec $R_1 = \frac{\epsilon_0 \hbar^2}{\pi m Ze^2}$

et $E_n = -\frac{Ze^2}{8\pi\epsilon_0 R_n} = -\frac{Ze^2}{8\pi\epsilon_0} \times \frac{4\pi^2 m}{\hbar^2} \times \frac{1}{n^2}$

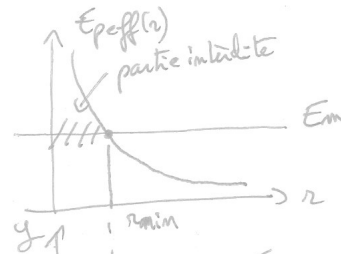
$E_n = -\frac{E_1}{n^2} \rightarrow E_1 = \frac{m Z^2 e^4}{8 \epsilon_0^2 \hbar^2} \rightarrow$ cste fond.

Ces hypothèses seront modifiées par la mécanique en 1926...
 mettant fin au modèle de Bohr.

2) Exemple de force répulsive : diffusion de Rutherford

• Rappel : cas général 2 charges de m signe q_1, q_2

$\hookrightarrow$ l'énergie mécanique est ≥ 0 positive
 $E_m > 0$ car l' E_{eff} est ≥ 0 positive



$\rightarrow$ la traj est forcément une hyperbole!

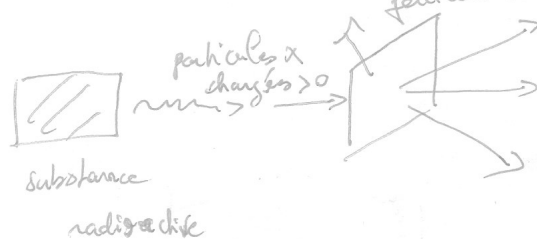
Etat de diffusion

$\chi = \frac{P}{e \cos(\theta - \theta_0) - 1}$ où $P = \frac{m C^2 \hbar^2}{q_1 q_2}$

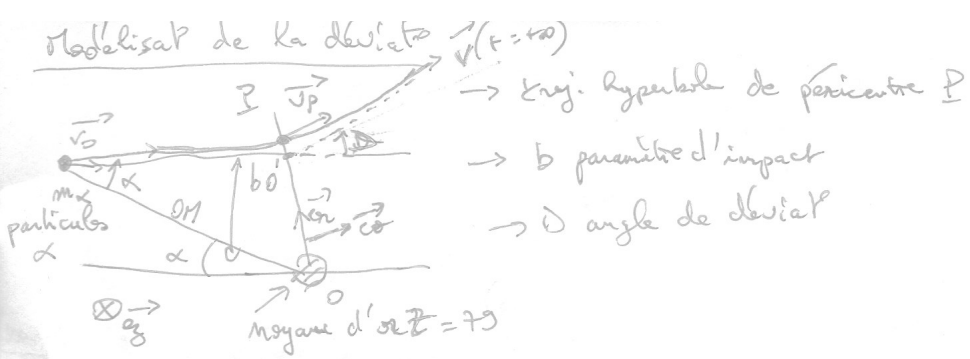
$r_{min} = \frac{P}{e - 1}$

• Application à l'expérience de Rutherford

feuille d'or $\rightarrow$ bcp traversent "tout droit"
 $\rightarrow$ déviat d'autant plus importante que le nbre atomique est grand
 $\rightarrow$ déviat $\rightarrow$ la matière n'est pas homogène et constituée de centre positif!



Modélisation de la déviation



Em l' → $\vec{v}_P = v \vec{e}_\theta = r \dot{\theta} \vec{e}_\theta$ → vitesse orthoradiale

Conservat de l'énj et du moment cinétique

TORC $\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O(\vec{F}_{\text{ext}}) = \vec{0}$ car force centrale → $\boxed{\vec{L}_O = \text{cte}}$

Evaluons le moment cinétique au début et au point P. au mvt
- au début → $\vec{L}_O = \vec{OM} \wedge m \vec{v} = OM m v_0 \sin \alpha \vec{e}_z$
↳ $\alpha = (\vec{OM}, \vec{v}_0)$
↳ $\alpha = (\vec{OM}, \vec{v}_0)$
avec $\sin \alpha = \frac{b}{OM}$

$$\boxed{\vec{L}_O = m v_0 b \vec{e}_z}$$

- au point P: $\vec{L}_O = \vec{OP} \wedge m \vec{v}_P$
 $= r_P \vec{e}_r \wedge m v_P \vec{e}_\theta$
 $\boxed{\vec{L}_O = m r_P v_P \vec{e}_z = m v_0 b \vec{e}_z}$

La conservat du moment cinétique relie donc r_P à v_P .
Pour déterminer r_P , il nous faut une 2^{ème} relation: conservation de l'Em!

→ $E_m = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_0 r}$ avec $q_1 q_2 > 0$ $\frac{E_P > 0}{\text{force répulsive!}}$
 $E_m = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{2ze^2}{4\pi \epsilon_0 r}$ $E_m > 0$ hjs!

Potential $a = \frac{2ze^2}{4\pi \epsilon_0 m v_0^2} \rightarrow E_P = \frac{a}{r} \times m v_0^2$

$E_m = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{m v_0^2 a}{r}$

Par conservat de E_m : $E_m(r \rightarrow \infty) = \frac{1}{2} m v_0^2 + E_P$
 $= E_m(r = r_P) = \frac{1}{2} m v_P^2 + \frac{m a v_0^2}{r_P}$

↳ $\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m v_P^2 + \frac{2 m v_0^2 a}{r_P}$

$\boxed{v_0^2 = v_P^2 + 2a \frac{v_0^2}{r_P}} \rightarrow \text{relation entre } v_0 \text{ et } r_P$

avec $v_P = v_0 \frac{b}{r_P}$

$1 - \frac{b^2}{r_P^2} = \frac{1}{r_P^2} + \frac{2a}{r_P}$

$r_P^2 - 2a r_P - b^2 = 0 \rightarrow \text{équation du second degré}$

$\Delta = 4a^2 + 4b^2 > 0$ solut réels

$r_P = \frac{2a \pm \sqrt{4a^2 + 4b^2}}{2} \rightarrow \text{solut } > 0 \rightarrow \boxed{r_P = a + \sqrt{a^2 + b^2}}$

On peut ensuite évaluer D ...

distance minimale d'approche