

## Exercice 1 – Modèle de Drude et probabilité de collisions

1. La probabilité de subir un choc entre  $t$  et  $t + dt$ , est donnée par  $\frac{dt}{\tau}$ . La probabilité de ne pas subir un choc entre  $t$  et  $t + dt$ , est donc donnée par  $1 - \frac{dt}{\tau}$ . On peut donc (loi des probabilités composées) :

$$P(t + dt) = P(t) \left(1 - \frac{dt}{\tau}\right) \implies \frac{dP}{P} = -\frac{dt}{\tau}.$$

Par intégration, en tenant compte qu'à  $t = 0$ ,  $P(0) = 1$  :

$$P(t) = \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right).$$

2. Par définition le temps moyen est donné par :

$$\langle t \rangle = \frac{\int_0^{\infty} t dp}{\int_0^{\infty} dp}.$$

On obtient par intégration par partie :  $\langle t \rangle = \tau$ .

3. Entre deux chocs, l'équation du mouvement d'un électron est donnée par application du principe fondamental de la dynamique :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E}.$$

En tenant compte des conditions initiales et du fait que le champ électrique est uniforme, on obtient :

$$\vec{v} = -\frac{e}{m}\vec{E}t + \vec{v}_0.$$

Par hypothèse,  $\vec{v}_0$  est d'orientation et de module quelconques, sa valeur moyenne est donc nulle. Il vient :

$$\langle \vec{v} \rangle = -\frac{e}{m}\vec{E}\tau \implies \langle \vec{j} \rangle = -ne \langle \vec{v} \rangle = \frac{ne^2\tau}{m}\vec{E}.$$

Ce qui donne :  $\sigma = \frac{ne^2\tau}{m}$ .

4. La variation moyenne d'énergie cinétique entre deux instants  $t = 0$  et  $t$  s'écrit : On a :

$$\Delta E_c = \frac{m}{2}(v^2 - v_0^2) = \frac{m}{2} \left( \frac{e^2 E^2 t^2}{m^2} - \frac{2e\vec{v}_0 \cdot \vec{E}t}{m} \right).$$

En passant à la valeur moyenne, sachant que  $\langle \vec{v}_0 \rangle = \vec{0}$  et que, par un calcul similaire,  $\langle t^2 \rangle = 2\tau^2$ , on obtient :

$$\langle \Delta E_c \rangle = \frac{e^2 E^2 \tau^2}{m}.$$

On obtient ainsi la puissance dissipée par unité de volume :

$$p = \frac{n}{\tau} \langle \Delta E_c \rangle = \sigma E^2.$$

## Exercice 2 – Le galvanomètre balistique de Tolman et Stewart

1. On considère les porteurs comme un ensemble de  $Nn$  points matériels de masse  $m$  animés de la même vitesse  $v = r\omega_0$ , ainsi :

$$E_c(t=0) = \frac{1}{2} Nnm\omega_0^2 r^2.$$

2. De même qu'à la question précédente :

$$E_c(t) = \frac{1}{2} Nnm\omega^2 r^2.$$

Soit par différentiation :

$$dE_c(t) = Nnm\omega d\omega r^2.$$

3. Un observateur « voit » passer pour un tour de fil une charge  $Nq$  avec le période  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ .

Cela correspond à un courant  $I = \frac{dQ}{dt} = \frac{Nq}{T} = \frac{Nq\omega}{2\pi}$ .

4. Entre deux instants  $t$  et  $t + dt$ , la vitesse passe de  $\omega$  à  $\omega + d\omega$ . L'énergie dissipée par effet Joule entre ces deux instants est donnée par  $dE_j = RI^2 dt$ . On a donc :  $dE_c = -dE_j$ . Ainsi :

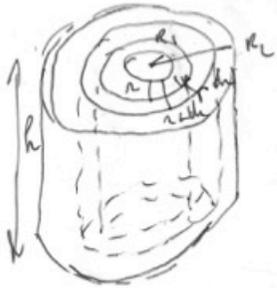
$$dQ = -\frac{2\pi mnr^2}{qR} d\omega.$$

En intégrant entre l'instant initial et l'instant final, on obtient :

$$\frac{q}{m} = \frac{2\pi r^2 n \omega_0}{RQ}.$$

5. On effectue l'application numérique :  $\frac{q}{m} = 1,77 \cdot 10^{11} \text{ C} \cdot \text{kg}^{-1}$ . La valeur théorique est de  $\frac{q}{m} = 1,76 \cdot 10^{11} \text{ C} \cdot \text{kg}^{-1}$ . L'expérience montre que les électrons sont les porteurs de charge.

## Résistance d'une couronne cylindrique



- axes préliminaires / caractéristiques!
- symétrie à l'extérieur autour de l'axe  
↳ invariante par rotation de  $\varphi$
- on néglige les effets de bords → cylindre  
assez long ( "pression bien"  
valable si  $h \gg r_2$  )
- ↳ invariante par translation selon  $z$

- Donc  $V$  le potentiel ne dépend que de  $r$

$$V(\mathbf{M}) = V(r, \varphi, z) = V(r) \quad \text{avec} \quad \vec{E} = -\text{grad} V$$

en régime stationnaire

$$\vec{E} = -\frac{dV}{dr} \vec{u}_r \quad \text{et} \quad \vec{j} = \gamma \vec{E} \quad \text{implique}$$

que  $\vec{j}$  ne dépend que de  $r$  et pointe par le vecteur radial

$$\vec{j} = j(r) \vec{u}_r!$$

1. En régime staz, l'équation locale de continuité de la charge

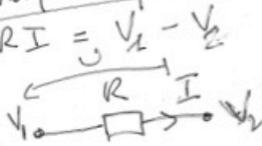
$$\left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \vec{j} = 0 \right] \quad \text{devient} \quad \boxed{\text{div} \vec{j} = 0}$$

$\vec{j}$  est à flux conservatif : son flux est constant!

donc l'intensité du courant  $I$  est constante (ne dépend pas de  $r$ !!)

2. Schéma électrique équivalent

Générateur  
récepteur



## Exercice 3 – Résistance d'une couronne cylindrique

$$I = \iint_{S_{LAT}} \vec{j} \cdot d\vec{S}_{LAT} \quad \Rightarrow \quad j_{S_{LAT}} = 2\pi r h j$$

cte!

$j(r)$  uniforme sur  $S_{LAT}$

avec  $j = \gamma E = -\gamma \frac{dV}{dr}$

cte

donc  $I = -2\pi r h \gamma \frac{dV}{dr}$

$$-dV = \frac{I}{2\pi \gamma R} \frac{dr}{r}$$

$$-\int_{V_1}^{V_2} dV = \frac{I}{2\pi \gamma h} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r}$$

$$U = V_1 - V_2 = \frac{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{2\pi \gamma h} I$$

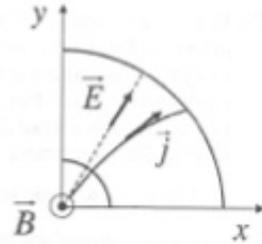
donc  $R = \frac{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{2\pi \gamma h}$

### Exercice 4 – Magnétorésistance - raisonnement

L'introduction de  $\vec{B}$  ne change pas les conditions aux limites sur le potentiel électrique  $V$ , ni sur sa distribution ( $\Delta V = 0$  est inchangé), et le champ  $\vec{E}$  est donc lui-même inchangé : il reste radial.

En revanche on comprend facilement que la force magnétique de Lorentz dévie les porteurs de charge du rayon vecteur, et les trajectoires suivies sont donc courbes (en fait les segments de droite en pointillé deviennent des tronçons de spirale en trait plein) si bien que les lignes de courant ne sont plus parallèles aux lignes de champ : elles ne sont donc plus radiales (on dit que le champ magnétique rend le milieu anisotrope).

Les charges parcourent ainsi une distance d'autant plus grande que  $B$  est important et ce pour une même différence de potentiel ; on prévoit donc une augmentation de la résistance du disque avec  $B$ . L'effet fait intervenir la constante de Hall, il est indécidable pour un conducteur métallique, mais tout à fait notable pour un semi-conducteur.



### Exercice 5 – Magnétorésistance d'après Mines

1. Invariance par rotation autour de l'axe  $(Oz)$  et par translation (en négligeant les effets de bord), donc  $V$  ne dépend que de  $r$ .

Sans charge volumique et en statique :  $\text{div } \vec{E} = \text{div}(-\text{grad}V) = \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$  donc  $\Delta V = 0$ .

alors  $\frac{d}{dr}(r \frac{dV}{dr}) = 0$  donc  $r \frac{dV}{dr} = a$  puis  $V(r) = a \ln(r) + b$ . Les conditions aux limites sont  $\begin{cases} V(r_1) = V_1 = a \ln(r_1) + b \\ V(r_2) = V_2 = a \ln(r_2) + b \end{cases}$  donc :  $V(r) = \frac{V_1 - V_2}{\ln(\frac{r_2}{r_1})} \ln(r) + \frac{V_1 \ln(r_2) - V_2 \ln(r_1)}{\ln(\frac{r_2}{r_1})}$ , puis :

$$\vec{E} = -\text{grad}(V) = \frac{V_1 - V_2}{r \ln(\frac{r_2}{r_1})} \vec{u}_r.$$

2.  $\lambda = \frac{m}{\tau}$  où  $m$  est la masse d'un électron et  $\tau$  le temps moyen entre deux chocs.

3. PFD à un électron, en référentiel galiléen :  $m \frac{d^2 \vec{v}}{dt^2} = -e \vec{E} - e \vec{v} \wedge \vec{B} - \lambda \vec{v}$ . En régime permanent,  $\frac{d^2 \vec{v}}{dt^2} = \vec{0}$ , donc  $e \vec{E} + e \vec{v} \wedge \vec{B} + \lambda \vec{v} = \vec{0}$ . En projection :

$$e \begin{pmatrix} E \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + e \begin{pmatrix} v_r \\ v_\theta \\ v_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} v_r \\ v_\theta \\ v_z \end{pmatrix} = \vec{0},$$

$$e \begin{pmatrix} E \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + eB \begin{pmatrix} v_\theta \\ -v_r \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} v_r \\ v_\theta \\ v_z \end{pmatrix} = \vec{0}.$$

puis on résout le système :

$$\begin{cases} v_r = -\frac{\lambda c E}{\lambda^2 + e^2 B^2} \\ v_\theta = -\frac{e^2 E B}{\lambda^2 + e^2 B^2} \\ v_z = 0 \end{cases} \quad \text{et avec } \vec{j} = -ne \vec{v} : \begin{cases} j_r = \frac{ne^2 \lambda E}{\lambda^2 + e^2 B^2} \\ j_\theta = \frac{ne^3 E B}{\lambda^2 + e^2 B^2} \\ j_z = 0. \end{cases}$$

4. Attendu que  $V(r) = a \ln(r) + b$ , une surface équipotentielle, à  $V$  constant, est une surface à  $r$  constant, soit un cylindre  $\mathcal{S}$ , de rayon  $r$ , de hauteur  $h$ , d'axe  $(Oz)$ . L'intensité du courant à travers  $\mathcal{S}$  est :

$$I = \iint_{\mathcal{S}} \vec{j} \cdot d\vec{S} \vec{u}_r = \iint_{\mathcal{S}} j_r dS = j_r 2\pi r h.$$

Pour obtenir  $R$ , on exprime  $I$  en fonction de  $V_1 - V_2$ , avec l'expression de  $E$  obtenue au 1 :

$$I = j_r 2\pi r h = \frac{ne^2 \lambda E}{\lambda^2 + e^2 B^2} 2\pi r h = \frac{ne^2 \lambda}{\lambda^2 + e^2 B^2} \frac{V_1 - V_2}{r \ln(\frac{r_2}{r_1})} 2\pi r h,$$

$$\text{soit : } I = \frac{ne^2 \lambda}{\lambda^2 + e^2 B^2} \frac{2\pi h}{\ln(\frac{r_2}{r_1})} (V_1 - V_2) \text{ donc } R = \frac{\lambda^2 + e^2 B^2}{ne^2 \lambda 2\pi h} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right).$$

Remarque : attendu que  $\vec{j}$  est radial, donc  $I$  aussi, la différence de potentiel à considérer est bien  $V_1 - V_2$  en convention récepteur ; l'expression de  $R$  est alors bien positive.

$$R_0 = \frac{\lambda}{ne^2 2\pi h} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) \text{ donc } R = R_0 \frac{\lambda^2 + e^2 B^2}{\lambda^2} \text{ et : } \epsilon = \frac{\lambda^2 + e^2 B^2}{\lambda^2} - 1 = \frac{e^2 B^2}{\lambda^2}.$$

$R_0 = 1,1 \cdot 10^2 \Omega$  et  $\epsilon = 7,9 \cdot 10^{-11}$ . La faiblesse de la variation de  $R$  est telle qu'une mesure reste impossible.

### Exercice 6 – Effet Hall

b) Au début du régime transitoire, tant que le champ électrique transverse, dû aux charges accumulées sur les côtés de la plaquette est négligeable, le PFD du porteur libre statistique est :  $-h' \vec{v} - e \vec{E} - e \vec{v} \wedge \vec{B} = \vec{0}$ . La force de Lorentz s'exerçant sur un électron libre tend à l'entraîner vers la face  $y = a$  qui se charge négativement, dépeuplant la face  $y = 0$  qui se charge positivement.

c) De ces charges apparaissant progressivement durant le régime transitoire, naît un champ électrique transverse dirigé selon  $\vec{e}_y$  et lié à la ddp entre les faces latérales (1) et (2) par :  $\vec{E}_H = \frac{-u_{12}}{a} \vec{e}_y$  où  $u_{12} < 0$ . Ce champ finit par stopper l'hémorragie en appliquant sur l'électron une force électrique transverse qui s'oppose à la force de Lorentz :

$$e \vec{E}_H = -e \vec{v} \wedge B \vec{e}_x \Leftrightarrow \vec{E}_H = \frac{j_z}{ne} \wedge B \vec{e}_x = \frac{I \vec{e}_z}{ne a b} \wedge B \vec{e}_x = \frac{I B}{ne a b} \vec{e}_y.$$

Une fois installées de façon permanente, les charges latérales créent ce champ de Hall constant et la ddp  $u_{12} = \frac{-I B}{ne b}$  qui correspond.

d) L'application numérique donne :

$$h' = \frac{ne^2}{\sigma} = 1,02 \times 10^{-13} \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\|\vec{v}\| = \frac{u_{12}}{h' ne} = 0,016 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$R = \frac{l}{ab \sigma} = 1,59; \text{M}\Omega$$

$$B = \frac{u_{12}}{-ne b} = 2,5 \text{ T}.$$

Notons que le système de capture de  $u_{12}$  doit amplifier cette tension. Le tout est un teslamètre à effet Hall.

b) Au début du régime transitoire, tant que le champ électrique transverse, dû aux charges accumulées sur les côtés de la plaquette est négligeable, le PFD du porteur libre statistique est :  $-h' \vec{v} - e \vec{E} - e \vec{v} \wedge \vec{B} = \vec{0}$ . La force de Lorentz s'exerçant sur un électron libre tend à l'entraîner vers la face  $y = a$  qui se charge négativement, dépeuplant la face  $y = 0$  qui se charge positivement.

c) De ces charges apparaissant progressivement durant le régime transitoire, naît un champ électrique transverse dirigé selon  $\vec{e}_y$  et lié à la ddp entre les faces latérales (1) et (2) par :  $\vec{E}_H = \frac{-u_{12}}{a} \vec{e}_y$  où  $u_{12} < 0$ . Ce champ finit par stopper l'hémorragie en appliquant sur l'électron une force électrique transverse qui s'oppose à la force de Lorentz :

$$e \vec{E}_H = -e \vec{v} \wedge B \vec{e}_x \Leftrightarrow \vec{E}_H = \frac{j_z}{ne} \wedge B \vec{e}_x = \frac{I B}{ne a b} \vec{e}_y.$$

Une fois installées de façon permanente, les charges latérales créent ce champ de Hall constant et la ddp  $u_{12} = \frac{-I B}{ne b}$  qui correspond.

d) L'application numérique donne :

$$h' = \frac{ne^2}{\sigma} = 1,02 \times 10^{-13} \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\|\vec{v}\| = \frac{u_{12}}{h' ne} = 0,016 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$R = \frac{l}{ab \sigma} = 1,59; \text{M}\Omega$$

$$B = \frac{u_{12}}{-ne b} = 2,5 \text{ T}.$$

Notons que le système de capture de  $u_{12}$  doit amplifier cette tension. Le tout est un teslamètre à effet Hall.

## Exercice 7 – Diode à vide

1. En combinant l'équation locale de Maxwell-Gauss et la relation  $\vec{E} = -\text{grad}V$ , on trouve l'équation de Poisson

$$\Delta V + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0 \implies \frac{d^2 V}{dx^2} + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0.$$

2. Considérons un électron. On néglige le poids et les frottements car le vide a été réalisé dans l'ampoule. La seule force qui s'applique est alors la force électrique qui dérive de l'énergie potentielle  $\mathcal{L}_{\text{pot}} = -eV(x)$ . L'énergie mécanique se conserve donc on a

$$0 - eV_C = \frac{1}{2} m v^2(x) - eV(x) \implies v(x) = \sqrt{\frac{2eV(x)}{m}}.$$

3. Le vecteur densité de courant s'écrit  $\vec{j} = \rho(x)\vec{v}$ . On en déduit l'intensité du courant :

$$I = \int \rho(x)v(x)\vec{e}_x^* \cdot \vec{e}_x^* \delta S = \rho(x)v(x)S.$$

En régime stationnaire, l'intensité du courant ne dépend pas de  $x$ . Il est à noter que cette intensité est négative.

4. De l'équation précédente, on déduit  $\rho(x) = \frac{I}{Sv(x)}$ . Compte tenu de la relation entre la vitesse et le potentiel, il vient l'équation différentielle

$$\frac{d^2 V}{dx^2} + \frac{I}{\epsilon_0 S} \sqrt{\frac{m}{2eV(x)}} = 0 \iff \frac{d^2 V}{dx^2} + \alpha V^{-1/2} = 0.$$

5. Cherchons une solution sous la forme d'une fonction puissance :  $V(x) = Kx^\beta$ . Il vient :

$$\beta(\beta-1)Kx^{\beta-2} + \frac{\alpha}{\sqrt{K}}x^{-\beta/2} = 0 \implies \beta(\beta-1)Kx^{3\beta/2-2} = -\frac{\alpha}{\sqrt{K}} \forall 0 < x < d.$$

Pour que cette relation soit valable sur tout un intervalle, il faut que l'on ait

$$\beta = 4/3 \quad \text{et} \quad K = \left(\frac{9}{4}\alpha\right)^{2/3} = \left(\frac{3}{2}\right)^{4/3} \left(\frac{m}{2e}\right)^{1/3} \left(\frac{I}{\epsilon_0 S}\right)^{2/3}.$$

6. Le potentiel vérifie  $V(d) = V_A$ , d'où la relation

$$V_A = \left(\frac{3d}{2}\right)^{4/3} \left(\frac{m}{2e}\right)^{1/3} \left(\frac{I}{\epsilon_0 S}\right)^{2/3}.$$

Cette relation n'est plus valable si  $V_A < 0$ . En effet, dans ce cas, la force électrique est répulsive et le courant est nul.

7. La caractéristique s'écrit (cf. Figure 14.18).

$$I = -\frac{4\epsilon_0 S}{9d^2} \sqrt{\frac{2e}{m}} V_A^{3/2}.$$

Pour  $V_A = 10,0\text{V}$ , on trouve  $|I| = 2,5\text{mA}$ , ce qui n'est pas beaucoup. Les diodes à jonction permettent de contrôler des courants bien plus importants pour des tensions de l'ordre du volt.

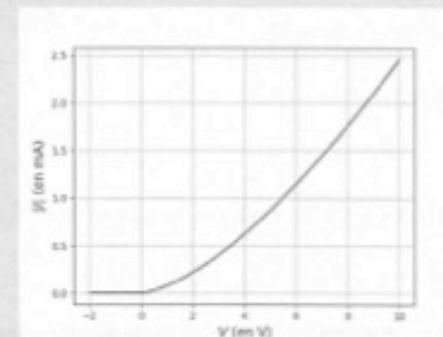


Figure 14.18. Caractéristique d'une diode à vide.