6 - Modèle de Drude en régime variable : limite de validité de la loi d'Ohm

6-1 - PFD : $m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E} - \frac{m}{\tau}\vec{v} \rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\vec{v}}{\tau} = -\frac{e}{m}\vec{E}$

↳ en régime sinusoïdal (forcé) $\frac{d}{dt} \leftrightarrow j\omega$ $\rightarrow j\omega \underline{\vec{v}} + \frac{\underline{\vec{v}}}{\tau} = -\frac{e}{m}\underline{\vec{E}}$

$\rightarrow \underline{\vec{v}}\left(\frac{1+j\omega\tau}{\tau}\right) = -\frac{e}{m}\underline{\vec{E}}$

donc $\boxed{\underline{\vec{v}} = \frac{-e\tau}{m} \frac{1}{1+j\omega\tau}\underline{\vec{E}}}$

6-2 - $\underline{\vec{j}} = \rho\underline{\vec{v}} = -ne\underline{\vec{v}}$ (on suppose ici ρ réel)

donc $\boxed{\underline{\vec{j}}} = \frac{\frac{ne^2\tau}{m}}{1+j\omega\tau}\underline{\vec{E}} = \boxed{\frac{\gamma_0}{1+j\omega\tau}\underline{\vec{E}}} = \boxed{\underline{\gamma}\,\underline{\vec{E}}}$

avec $\boxed{\gamma_0 = \frac{ne^2\tau}{m}}$ → conductivité en régime stationnaire pour $\omega\tau \ll 1$ soit $f \ll \frac{1}{2\pi\tau}$

6-3 - Pour $\omega\tau \gg 1$ → hte fréq. $f \gg \frac{1}{2\pi\tau}$ $\underline{\gamma} \simeq \gamma_0$

$\boxed{\underline{\vec{j}}} \simeq \frac{\gamma_0}{j\omega\tau}\underline{\vec{E}} = \boxed{-\frac{ne^2}{m\omega}j = -\gamma_{HF}(\omega)j}$

Rq : en électromag $\gamma_{HF} = \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)$ avec ω_p pulsation plasma

6-4 - Puissance volumique dissipée par effet Joule P_v

$\boxed{P_v = \vec{j}\cdot\vec{E}}$

6-5 - Expressions des grandeurs réelles : $\boxed{\vec{E} = \vec{E_0}\cos\omega t}$

$\underline{\vec{j}} = -j\gamma_{HF}(\omega)\underbrace{e^{j\omega t}\vec{E_0}}_{\underline{\vec{E}}} = \gamma_{HF}\vec{E_0}e^{j(\omega t - \frac{\pi}{2})}$ car $-j = e^{-j\frac{\pi}{2}}$

donc $\boxed{\vec{j}} = Re(\underline{\vec{j}}) = \boxed{-\gamma_{HF}(\omega)\vec{E_0}\underbrace{\sin\omega t}_{\cos(\omega t - \frac{\pi}{2})}}$

On remarque que $\vec{j}$ et $\vec{E}$ sont en quadrature (déphasés de $\pm\frac{\pi}{2}$)

On aura donc $\boxed{\langle \vec{j}\cdot\vec{E}\rangle_T = 0}$ (valeur moyenne sur une période comme pour U et I en régime sinusoïdal, s'ils sont en quadrature)

En effet : $\langle P_v\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \vec{j}\cdot\vec{E}\,dt$

$= -\frac{1}{T}\int_0^T \sin\omega t\cos\omega t\,dt$

$= -\frac{1}{2T}\underbrace{\int_0^T \cos 2\omega t\,dt}_{0}$ → rappel de trigo : $\sin 2a = 2\sin a\cos a$ donc $\sin\omega t\cos\omega t = \frac{1}{2}\cos 2\omega t$

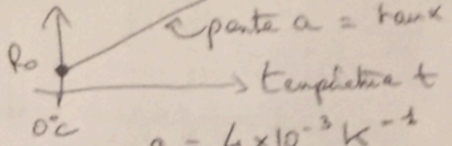
6-6 – Pour les fréq. industrielles, et ondes hertziennes

($f_{électrons} \ll f_{Infrarouge}$), $\gamma \approx \gamma_0 \rightarrow P_v \neq 0$

Le caractère dissipatif de la loi d'Ohm est valide.

Ex 5 – Résistivité en fonction de la température

a) $R = R_0(1 + at)$



← pente a = taux de variation de la résistance en f° de la température

R_0 résistance pour $T = 0°C \simeq 273\,K$

$a = 4 \times 10^{-3}\,K^{-1}$

b) Cours → $R = \dfrac{L}{\gamma S} = \rho \dfrac{L}{S}$ avec ρ la résistivité $= 1/\gamma$

donc $\boxed{\rho} = \dfrac{S}{L} R = \boxed{\dfrac{S}{L} R_0(1+at)}$ → f° affine, ↑ avec la température

c) Comme pour le cuivre → $1e^-$ par atome → $\boxed{n \simeq 10^{25}\,m^{-3}}$

On fait l'hypothèse que la densité électronique (électrons de la bande de conduction) varie peu avec la température

d) $\vec{v} = \mu \vec{E}$ et $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ avec $\vec{j} = -ne\vec{v} = -ne\mu\vec{E} = \gamma\vec{E}$

donc $\gamma = \dfrac{1}{\rho} = -ne\mu$ → $\boxed{\mu = -\dfrac{1}{ne\rho}}$

$|\mu| = \dfrac{L}{ne\,S R_0(1+at)}$ la valeur de la mobilité ↓ avec la température ($a > 0$)

e) $\alpha = \dfrac{1}{\ell}\dfrac{d\ell}{dt}$ α coefficient de dilatation $= 10^{-5}\,K^{-1}$

Par ex → Pour un barreau de 10 cm et $\Delta T = 1K$ → $\Delta\ell = 1\,\mu m$ → dilatation

$R = \rho \dfrac{\ell}{S}$ rappel: pour évaluer les variations relatives, on utilise la dérivée logarithmique

$\ln R = \ln\rho + \ln\ell - \ln S$

$\dfrac{dR}{R} = \dfrac{d\rho}{\rho} + \dfrac{d\ell}{\ell} - \dfrac{dS}{S}$ avec $S = \pi r^2$ pour un barreau cylindrique de section S

↳ $\ln S = \ln\pi + 2\ln r \rightarrow \dfrac{dS}{S} = 2\dfrac{dr}{r}$

donc $\dfrac{dR}{R} = \dfrac{d\rho}{\rho} + \dfrac{d\ell}{\ell} - 2\dfrac{dr}{r}$ → la dilatation est isotrope donc identique selon r et ℓ → $\boxed{\dfrac{dr}{r} = \dfrac{d\ell}{\ell}}$

$\boxed{\dfrac{dR}{R} = \dfrac{d\rho}{\rho} \pm \dfrac{d\ell}{\ell}}$ → avec $\dfrac{d\ell}{\ell} = \alpha\,dt$ et $\ln R = \ln R_0 + \ln(1+at)$

$\dfrac{dR}{R} = \dfrac{a\,dt}{1+at} \simeq a\,dt$ (si $at \ll 1$)

$\dfrac{dR}{R} = a\,dt = 4\times10^{-3}dt = \dfrac{d\rho}{\rho} + \alpha\,dt = \dfrac{d\rho}{\rho} + 10^{-5}dt$

donc $dR/R \simeq d\rho/\rho$ car $\alpha \ll a$ → $\boxed{\text{dilatation négligée}}$

Exercice 4 – Comparaison de conductivités métal/semi-conducteur

1.a) Les porteurs de charge mobiles dans un métal sont les électrons mis en commun au sein de tout le cristal métallique (nuage d'électrons délocalisés).

b) La taille de la cellule élémentaire occupée par un atome est quelques fois 10^{-10} m, on peut donc estimer à une fraction de 10^{30} m^{-3} la densité d'atomes. D'où une densité d'électrons $n \approx 10^{29}$ m^{-3}.

c) On définit la mobilité μ comme le rapport de la vitesse de migration d'un porteur de charge à la norme du champ électrique. La mobilité des porteurs dans un métal bon conducteur est environ $\gamma = n\mu e \approx 10^7\ \Omega^{-1}.\mathrm{m}^{-1}$.

d) La résistance électrique s'écrit $R = \dfrac{1}{\gamma}\dfrac{\ell}{S} \approx 0{,}1\ \Omega$.

e) Avec une alimentation de tension efficace égale à 220 V, l'intensité efficace est inférieure à un ampère pour la puissance indiquée. La puissance dissipée par effet Joule dans des fils totalisant une résistance de l'ordre de l'ohm est donc inférieure au watt. Moins de 1 % de la puissance utile est perdue par effet Joule dans les fils électriques, c'est satisfaisant.

2.a) La neutralité impose l'égalité des concentrations des électrons et des trous.

b) On ne peut négliger la contribution de la conduction des trous, car leur mobilité n'est que le tiers de celle des électrons et leur charge est e.

c) La conductivité du silicium est très inférieure à celle d'un métal, on obtient ici :

$$\gamma_{Si} = n(\mu_e + \mu_t)e \approx 3.10^{-4}\ \Omega^{-1}.\mathrm{m}^{-1}.$$

L'emploi d'un semi-conducteur est pertinent dans des composants électroniques, pour contrôler le courant, mais pas dans des applications de transport d'énergie électrique.

d) L'écart n'est certainement pas explicable par la différence de mobilité, car les électrons sont plus mobiles dans le silicium que dans le métal ! C'est l'ordre de grandeur de la densité de porteurs qui explique la différence : il y a considérablement plus d'électrons mobiles dans le métal que dans le semi-conducteur.