

## PROBLÈME I -

## PHYSIQUE

### Étude thermique d'un bâtiment

Avec les nouvelles normes environnementales et les diagnostics de performance énergétique des bâtiments, la cartographie thermique permet de localiser les zones de déperdition thermique les plus importantes.

On peut ensuite cibler les travaux d'isolation à effectuer en toute connaissance de cause. L'isolation peut s'effectuer par l'intérieur ou l'extérieur avec des matériaux adéquats.

On pourra alors vérifier, à réception des travaux, l'efficacité de ces derniers.

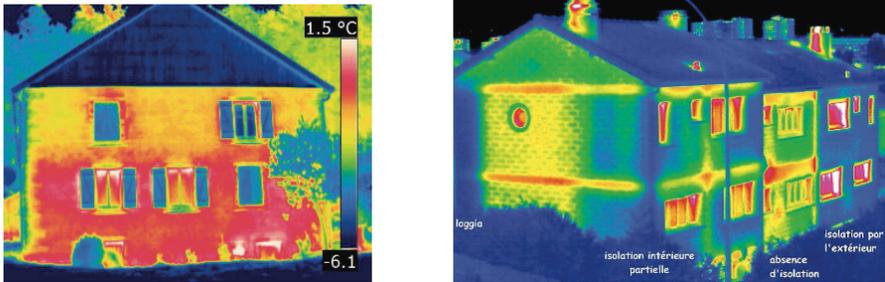


FIGURE 1 – Thermographie infrarouge.

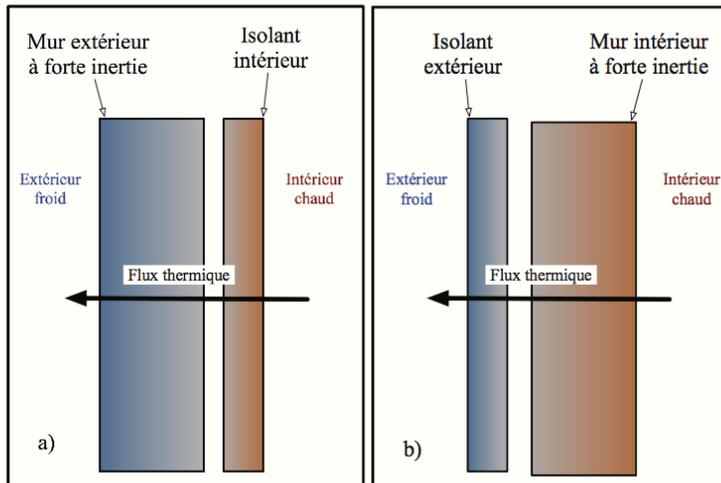


FIGURE 2 – Isolation a) par l'intérieur ou b) par l'extérieur.

## Préambule

### I.1. Modélisation de la pièce

On étudie une pièce parallélépipédique de longueur  $a = 8$  m, de largeur  $b = 5$  m, de hauteur  $h = 2,5$  m et possédant un radiateur électrique de puissance maximale  $P = 2$  kW. Dans l'ensemble du problème, la pièce sera supposée parfaitement isolée au niveau du sol et du plafond. La capacité thermique volumique de l'air est  $C_v = 1,25 \cdot 10^3$  SI. On suppose ici que la pièce est parfaitement calorifugée.

**I.1.a.** Quelle est l'unité de la capacité thermique volumique ?  
Quelle est la valeur de la capacité thermique  $C$  de la pièce ?

**I.1.b.** À l'aide d'un bilan d'énergie thermique appliqué à la pièce, établir l'équation différentielle régissant l'évolution de la température  $T(t)$  dans la pièce en fonction de  $C$  et de  $P$ .

**I.1.c.** Résoudre l'équation sachant que la température initiale de la pièce est  $T_0 = 10$  °C.  
Tracer  $T(t)$ .  
Déterminer la durée nécessaire pour atteindre la température finale  $T_f = 20$  °C.

**I.1.d.** Proposer un modèle électrique simple conduisant à une équation différentielle du même type.

Préciser quelles sont les grandeurs électriques associées aux grandeurs thermodynamiques que sont  $T(t)$ ,  $C$  et  $P$ .

Dessiner le montage électrique analogue.

### I.2. Influence des murs

La pièce est constituée d'une enceinte en béton d'épaisseur  $L = 15$  cm et de masse volumique  $\rho = 2,2 \cdot 10^3$  kg.m<sup>-3</sup>. On note  $c = 1,0 \cdot 10^3$  J.kg<sup>-1</sup>.K<sup>-1</sup> sa capacité thermique massique et  $\lambda$  sa conductivité thermique ( $\lambda = 1,5$  SI).

**I.2.a.** Exprimer l'aire  $S_p$  de la surface en contact avec la pièce en fonction de  $a$ ,  $b$  et  $h$ , en négligeant l'épaisseur des murs. Faire l'application numérique.

**I.2.b.** Exprimer le volume de béton  $V_b$  et la capacité thermique  $C_{mur}$  de l'enceinte en béton en fonction de  $S_p$ ,  $L$ ,  $\rho$  et  $c$ .

Comparer numériquement  $C_{mur}$  à la capacité thermique de la pièce  $C$ .

Par rapport à ces premiers résultats, quels commentaires pouvez-vous faire sur la durée de montée en température de la pièce en prenant en considération l'influence de la capacité thermique du mur ?

## Première partie : équation de la chaleur

On étudie la conduction thermique dans le mur modélisé par une barre de section  $S$ , de longueur  $L$  en contact avec deux thermostats de températures  $T_{int}$  et  $T_{ext}$  (voir figure 3, page 4).

On note :  $\vec{J} = j(x,t)\vec{e}_x$  le vecteur densité de flux thermique.

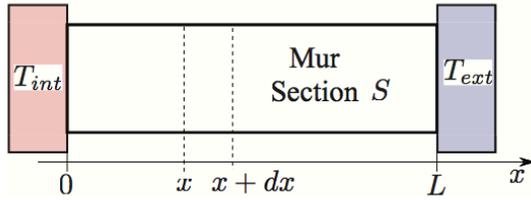


FIGURE 3 – Modélisation du mur.

### I.3. Généralités

**I.3.a.** Rappeler la loi de Fourier. Interpréter son signe. Donner une signification physique de  $j(x,t)$  et préciser son unité. Quelle est la dimension de la conductivité thermique  $\gamma$ ? En déduire son unité dans le système international.

**I.3.b.** À l'aide d'un bilan d'énergie thermique sur la tranche comprise entre les abscisses  $x$  et  $x+dx$  du mur, établir l'équation de diffusion thermique c'est-à-dire l'équation différentielle régissant l'évolution de la température  $T(x,t)$  à l'intérieur du mur en fonction de  $\rho$ ,  $c$ , et  $\lambda$ .

### I.4. Étude du régime stationnaire

**I.4.a.** Rappeler la signification de "régime stationnaire".

**I.4.b.** Les températures de surface seront prises égales à celles des thermostats. Résoudre l'équation de la diffusion thermique et déterminer alors  $T(x)$  la température à l'intérieur du mur à l'abscisse  $x$ . Tracer  $T(x)$ .

**I.4.c.** Définir et exprimer la température moyenne du mur notée  $T_{moy}$ .

Indiquer la position particulière  $x_p$  où la température est égale à la température moyenne.

**I.4.d.** Exprimer la densité de flux  $j(x)$  qui traverse le mur. Que remarquez-vous ?

**I.4.e.** Calculer la puissance  $P$  que le radiateur doit fournir afin de maintenir la température intérieure à  $20^\circ\text{C}$  pour une température extérieure de  $10^\circ\text{C}$ . Commenter ce résultat par rapport au radiateur installé.

### I.5. Résistance thermique

On définit en électricité la résistance d'un conducteur ohmique en convention récepteur par  $R = \frac{\Delta V}{I}$  où  $\Delta V$  est la différence de potentiels aux bornes de la résistance et  $I$  l'intensité du courant électrique qui traverse le conducteur (figure 4).

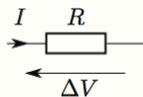


FIGURE 4 – Résistance.

**I.5.a.** Rappeler l'expression de la loi d'Ohm locale pour un conducteur de conductivité électrique  $\gamma$ . En faisant l'analogie entre la loi d'Ohm et la loi de Fourier, indiquer à quelles grandeurs thermodynamiques sont analogues la conductivité électrique, la densité de courant électrique, le potentiel électrique et l'intensité du courant. Donner cette réponse sous la forme d'un tableau récapitulatif.

**I.5.b.** Par analogie, donner l'expression de la résistance thermique  $R_{mur}$  du mur étudié. Préciser son unité et calculer sa valeur.

## Deuxième partie : modélisation électrique

Dans cette partie, on travaillera avec la température moyenne du mur. On modélise l'ensemble du système, composé de la pièce, du mur et du radiateur, par un réseau électrique. Le but est d'étudier le comportement dynamique de ce système via sa fonction de transfert.

### I.6. Circuit électrique

Dans l'approche électrique, la modélisation du système conduit au circuit électrique donné figure 5.

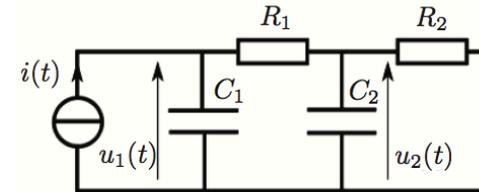


FIGURE 5 – Modèle électrique.

**I.6.a.** Justifier cette modélisation électrique par rapport à notre étude thermique de la première partie. Expliciter les valeurs de  $I, R_1, R_2, C_1, C_2, u_1(t)$  et  $u_2(t)$ , en fonction des grandeurs  $P, R_{mur}, C, C_{mur}$ , la température de la pièce  $T(t)$ , la température moyenne du mur  $T_{moy}(t)$  et la température extérieure  $T_{ext}$ .

**I.6.b.** Que devient ce circuit électrique en régime permanent continu ? Exprimer alors la tension  $u_2(t \rightarrow \infty)$ . Quelle valeur attribueriez-vous à  $R_1$  et à  $R_2$  en fonction de  $R_{mur}$  ?

### I.7. Établissement de l'expression d'une impédance

Afin d'étudier le comportement du circuit en régime variable, on se place en régime sinusoïdal forcé  $x(t)$  de pulsation  $\omega$  dont la grandeur complexe associée est notée  $\underline{x}(t)$  et l'amplitude complexe est  $\underline{X}$  avec :

$$\begin{aligned} x(t) &= X_0 \cos(\omega t + \phi) = \text{Re}(\underline{x}(t)), \\ \underline{x}(t) &= X_0 e^{j(\omega t + \phi)} = \underline{X} e^{j(\omega t)}, \\ \underline{X} &= X_0 e^{j(\phi)}. \end{aligned}$$

La référence de phase sera prise sur la grandeur  $i(t)$  délivrée par le générateur de courant :

$$i(t) = I_0 \cos(\omega t).$$

**I.7.a.** Exprimer l'impédance  $Z_2$  relative à l'association de la résistance  $R_2$  avec le condensateur de capacité  $C_2$ .

**I.7.b.** Exprimer l'impédance  $Z_1$  relative à l'association de la résistance  $R_1$  avec l'impédance  $Z_2$ .

**I.7.c.** Exprimer le lien  $i(t)$ ,  $u_1(t)$ ,  $Z_1$ ,  $C_1$  et  $\omega$ .

**I.7.d.** En déduire que la relation reliant  $\underline{U}_1(j\omega)$  à  $I_0$  est donnée par :

$$\underline{U}_1(j\omega) = \frac{1 + j \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C_2 \omega}{1 + j((R_1 + R_2)C_1 + R_2 C_2)\omega - R_1 R_2 C_1 C_2 \omega^2} (R_1 + R_2) I_0. \quad (1)$$

### I.8. Exploitation

**I.8.a.** Vérifier la cohérence entre la fonction donnée par (1) et les comportements du circuit pour les hautes et basses fréquences.

Exprimer en fonction des données,  $U_{10}$ , la valeur de  $\underline{U}_1(j\omega)$  pour  $\omega = 0$ .

**I.8.b.** Vérifier les comportements limites lorsque  $C_2$  tend vers zéro puis vers l'infini.

**I.8.c.** On appelle fonction de transfert  $\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{U}_1(j\omega)}{\underline{U}_{10}}$ . Quelle est la nature du filtre ?

**I.8.d.** Exprimer la fonction de transfert  $\underline{H}(j\omega)$  dans le cas où  $R_1 = R_2 = \frac{1}{2}R$  et  $C_2 = \alpha C_1 = \alpha C$ .

### I.9. Diagramme de Bode

**I.9.a.** Établir les expressions des asymptotes de  $\underline{H}(j\omega)$  en basse fréquence et haute fréquence. Tracer le diagramme de Bode asymptotique en précisant bien le point d'intersection.

**I.9.b.** En pratique, pour  $\alpha = 200$ , on obtient le diagramme de Bode de la figure 10 du **document réponse**. Mettre clairement en évidence, sur le diagramme de la figure 10 du **document réponse**, des zones rectilignes. Interpréter ces zones et placer trois pulsations particulières  $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3$ .

**I.9.c.** Sous quelle forme pourrait-on mettre  $\underline{H}(j\omega)$  en fonction de  $\omega$ ,  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  et  $\omega_3$  ?

**I.9.d.** Définir la pulsation de coupure du filtre et donner sa valeur. Estimer la durée  $\tau$  du régime transitoire.

## Troisième partie : isolation

Afin de limiter sa consommation énergétique, le propriétaire décide d'isoler la pièce.

### I.10. Importance de l'isolation

Le propriétaire peut disposer l'isolant à l'intérieur ou à l'extérieur du mur. Pour cela, il recouvre les murs d'un isolant de faible capacité thermique, de conductance thermique  $\lambda_i = 0,05$  SI et d'épaisseur  $e = 5$  cm.

**I.10.a.** Calculer la résistance thermique  $R_i$  relative à l'isolation de la pièce. Comparer cette valeur à  $R_{mur}$ . Par la suite, on prendra  $R_i = \beta R_{mur}$  avec  $\beta = 10$ .

**I.10.b.** Modifier le schéma électrique de la figure 5 (page 5) et proposer les deux montages correspondants.

**I.10.c.** Déterminer la puissance nécessaire  $P_{min}$  afin de maintenir une température dans la pièce de 20 °C pour une température extérieure de 10 °C.

### I.11. Isolation intérieure ou extérieure

**I.11.a.** Choisir un type d'isolation intérieure ou extérieure en précisant clairement votre choix sur la copie.

**I.11.b.** Déterminer, en régime permanent, les différentes tensions  $\underline{U}_{10}$  et  $\underline{U}_{20}$  en fonction de  $\beta$ ,  $R$  et  $I_0$ .

**I.11.c.** Donner la nouvelle expression de  $\underline{H}(j\omega)$  en fonction de  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $R$ ,  $C$  et  $I_0$ .

**I.11.d.** On obtient, comme diagrammes de Bode, les figures 11a) et 11b) du **document réponse**. Indiquer sur la copie et encadrer sur le **document réponse** celle qui correspond à votre choix d'isolation.

Relever la pulsation de coupure correspondant à ce choix et en déduire le temps de réponse  $\tau_i$  de votre système.

Commenter ce résultat par rapport au cas sans isolation et analyser votre choix sur le placement de l'isolant.

## Quatrième partie : prise en compte des échanges à la surface

On prend en considération les échanges thermiques à la surface en contact avec l'air extérieur par la loi de Newton. On prendra pour le coefficient de transfert thermique de surface  $k = 10$  SI.

### I.12.

**I.12.a.** Rappeler la loi de Newton. Quelle peut être l'unité du coefficient  $k$  ?

**I.12.b.** Établir la relation en  $x = L$  entre le flux sortant de l'habitation  $\Phi$  et les données  $k$ ,  $S$ ,  $T_{ext}$  et  $T(L)$ .

**I.12.c.** Modéliser l'échange thermique en  $x = L$  par une résistance thermique notée  $R_e$ . Comparer numériquement  $R_e$  à  $R_{mur}$  et à  $R_i$ .

**I.12.d.** Quelle est la conséquence principale de  $R_e$  sur l'installation ? Calculer la nouvelle puissance à délivrer afin de maintenir la température intérieure à 20 °C pour une température extérieure de 10 °C.

**I.12.e.** Comment modéliser la prise en considération du sol de la pièce ?

Comment traduire l'influence de la présence d'une fenêtre dans la pièce ?

Élaborer un modèle électrique plus complet de la pièce.

**I.12.f.** En revenant sur les photographies de la figure 1, page 2, quel phénomène avons nous négligé ?

**Question I.9.b**

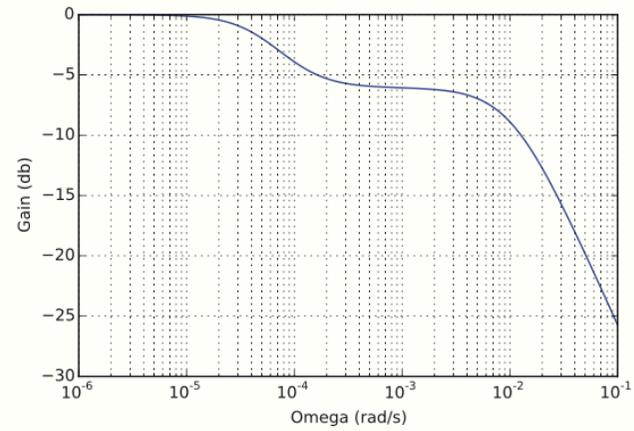


FIGURE 10 – Diagramme de Bode sans isolation

**Question I.11.d**

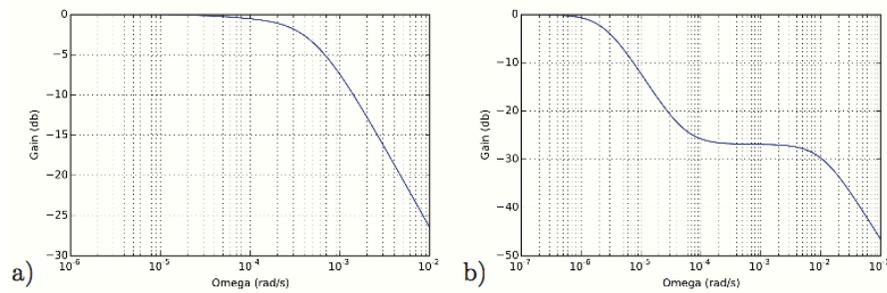


FIGURE 11 – Diagrammes de Bode avec isolation. Il s'agit de déterminer à quels choix d'isolation correspondent les courbes a) ou b).