1 – Eq. thermique d'un mammifère

1-1. Effet des lois d'échelle sur la régulat° thermique

Lq(?) certains types d'animaux, notamment les mammifères voient leurs tailles max. et mini. limitées : les mammifères (musaraigne + petit mammif.) reptile rarement de la taille d'un éléphant, arthropodes rarement de taille supérieure à qq diz. de cm .... Interessons-nous aux animaux à sang chaud

- Puissance thermique dégagée produite par les efforts musculaires donc $P_{totale} \propto$ volume $\propto L^3$ avec L taille caractéristique de l'animal

- puissance dissipée par l'intermédiaire de la peau (surface ext.) $\Phi \propto Surf \propto L^2$ $(\propto L^2)$

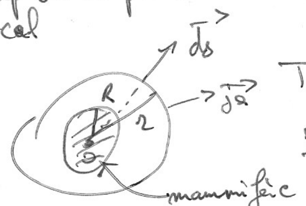
Dc plus l'animal est gros ⊕ il est difficile d'évacuer la chaleur produite $(\propto L^3)$ → ceci explique pourquoi les éléphants ont de si grosses oreilles vascularisées → pour ↑ la surface d'échge air/corps. Donc limitat° en taille max. De plus, le métabolisme sera ⊕ lent pour avoir une puissance volumique produite ⊕ faible, et moins de chaleur à évacuer.

Plus l'animal est petit, ⊕ il est performant dans l'évacuat° comparée à la production, ce qui fixe une limite en taille minimale puisqu'il évacue trop d'nrj thermique. Ils "compensent" par un métabolisme + rapide pour développer une puissance thermique suffisante et maintenir leur température corporelle.

1-2. Symétrie sphérique → chp de température local $T(M,t) = T(r,t)$

$$\vec{j_Q} = -\lambda\, \vec{\text{grad}}\, T = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r} \vec{u_r}$$

$$\vec{j_Q} = j_Q(r,t)\, \vec{u_r}$$ → vect. densité de courant radial !



$T_\infty = 20°C$

$P = P_v \times \frac{4}{3}\pi R^3$

à $T_{corps} = T_c = 30°C$

1-3. Condit° aux limites en $r = R$: continuité du flux thermique

qui est égal à la puissance totale dégagée par le mammi. (pas de pertes ici de chaleur....) → $P = \Phi(r=R) = \oiint \vec{j_Q} \cdot \vec{dS} = j_Q \iint_S dS$

$$\boxed{P = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)_{r=R} \times 4\pi R^2}$$

avec $P > 0$ et $\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)_{r=R} < 0$ → la température ↓ au voisinage du mammi.

(et $T_c = T(r=R)$)

1-4. En régime stationnaire

$$\text{div}\, \vec{j_Q} + \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \rightarrow \boxed{\text{div}\, \vec{j_Q} = 0}$$

Le flux est conservatif → il ne dpd pas de r

$\Phi(r+dr) = \Phi(r) = P$!

et $\Phi(r) = P = -\lambda \frac{dT}{dr} \times 4\pi r^2$

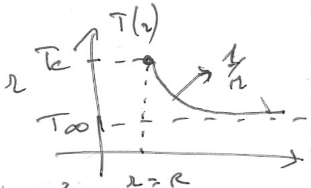
$$\boxed{\frac{dT}{dr} = -\frac{P}{4\pi\lambda r^2}}$$

1-5. Intégrat°

$T(r) = \frac{P}{4\pi\lambda r} + C$ avec $T(r \to +\infty) = T_\infty = C$

$$\boxed{T(r) = \frac{P}{4\pi\lambda r} + C}$$

T ↓ avec r



1-6. $T_c = \frac{P}{4\pi\lambda R} + T_\infty$ avec $P = P_v \times \frac{4}{3}\pi R^3$

$$\boxed{T_c = \frac{P_V R^2}{3\lambda} + T_\infty}$$

Qd $\lambda \nearrow$ $T_c \searrow$ → évacuat° + efficace du métabolisme

Qd $R \nearrow$ $T_c \nearrow$ → product° thermique + efficace comparée à l'évacuat°.

1.7 - Comparaison des milieux environnants

- eau : $\lambda(eau) = 500\ W.m^{-1}.K^{-1}$
- air $\lambda(air) = 10\ W.m^{-1}.K^{-1}$

rapport 50

il faut une puissance produite + gde ds l'eau qui évacue + efficacement avec facteur 50 !

$$\boxed{P_V = \frac{3\lambda(T_c - T_\infty)}{R^2}}$$

↳ c'est pourquoi plus critique pour les mammifères marins de petites tailles dans l'eau.

Rq°) Evaluat° du rayon minimum permettant de maintenir une température corporelle dans un milieu à T_∞ : $T_c - T_\infty = \Delta T = \frac{P_V R^2}{3\lambda}$

$$\Delta T_{min} = \frac{P_V R_{min}^2}{3\lambda} \to \boxed{R_{min} = \sqrt{\frac{3\Delta T_{min}\lambda}{P_V}}}$$

R = 10 cm

Ds l'eau $P_V = \frac{3\times10\times5.10^2}{10^{-2}} = 1,5.10^6\ W.m^{-3}$

Ds l'air $P_V = \frac{3\times10\times10}{10^{-2}} = 3.10^4\ W.m^{-3}$

il faut ds l'eau un métabolisme + actif.

Rq°) Pour l'air qui évacue ⊖ bien, on aura une limite à la taille max !! des mammi. marins.

1-8 -

$$E(eau) = P_V(eau) \times \frac{4\pi}{3}R^3 \times \Delta t_{1\ jour}$$
$$= 1,5\times10^6 \times \frac{4}{3}\pi.10^{-3} \times 24\times3600$$
$$\simeq 5,4.10^8\ J$$

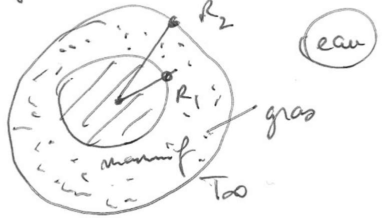
$E_{eau} \simeq 130\ 000$ kcal → par jour → 2000 kcal.kg⁻¹ de poisson
→ 75 kg de poisson nécessaire !! au moins.

Avec une masse volumique moyenne de $1000\ kg.m^{-3} = \rho(mammif)$

pour $V = \frac{4}{3}\pi R^3 \simeq 4\times10^{-3}\ m^3$

masse $\simeq \rho\times V = 4$ kg → il doit manger ≃ 20 fois son propre poids ! pas réaliste !!

3 - Pour atténuer cet effet, les mammifères marins des eaux froides st entourés d'une épaisse couche de graisse, qui les isole de l'ext.



En régime statio.

On a tjs une expression $T(r)$:

$$T(r) = \frac{A}{r} + B$$

avec condit° aux limites $T(r=R_1) = T_c$, $T(r=R_2) = T_\infty$

$$↳\ T(r) = \frac{T_c - T_\infty}{\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) r} + \frac{T_c R_1 - T_\infty R_2}{R_1 - R_2}$$

Puis on égalise le flux d'énergie ds la graisse et la puissance produite

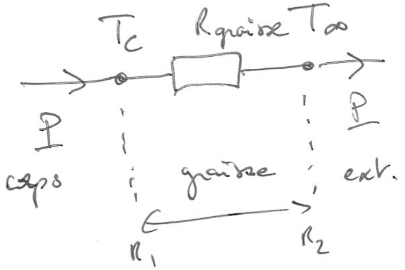
$$P = \frac{3\lambda_{gras}(T_c - T_\infty)}{R_2 - R_1}\,\frac{R_2}{R_1^2}$$

$R_1 = 10$ cm
$R_2 = 15$ cm

$$E \simeq 3,3.10^7\ J \simeq 8000\ kcal$$

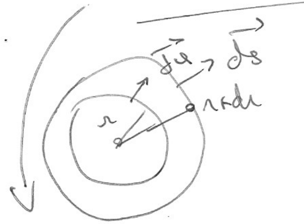
↳ une seule fois son poids en poisson
↳ stratégie évolutive viable

Autre méthode de résolut : utilisat de la résistance thermique



le flux se conserve en régime statio. ici !

Il suffit de calculer la résistance thermique équivalente d'une coquille sphérique élémentaire d'épaisseur dr et de l'intégrer entre R_1 et R_2 ! ou directement utilisez la déf.



$$\boxed{\Delta T = R_{th}\,\phi}$$

⚠ $R_{th} > 0$!!

$$\phi = \iint \vec{j_Q}\cdot\vec{dS} = j_Q\, 4\pi r^2$$

$$\phi = -\lambda \frac{dT}{dr} \times 4\pi r^2 \longrightarrow \phi \text{ conservatif} = \text{cst} = \phi(r = R_1)$$

$$\frac{dT}{dr} = \frac{\phi}{-4\pi\lambda r^2} \longrightarrow dT = \frac{\phi}{-4\pi\lambda r^2}\,dr$$

$$\Delta T = \int_{T_\infty(R_2)}^{T_c(R_1)} dT = T_c - T_\infty \ (>0)$$

$$= \int_{R_2}^{R_1} \frac{\phi}{-4\pi\lambda r^2}\,dr = \frac{\phi}{4\pi\lambda}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

sinon

$$dR_{th} = \frac{dT}{\phi} = \frac{dT}{-\lambda \frac{dT}{dr} 4\pi r^2}$$

$$dR_{th} = \frac{dr}{-4\pi\lambda r^2}$$

$$R_{th} = \int_{R_2}^{R_1} \frac{-dr}{4\pi\lambda r^2}$$

$$\longrightarrow \boxed{R_{th} = \frac{1}{4\pi\lambda}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)}$$

$$P = \frac{\Delta T}{R_{th}} = \frac{4\pi\lambda\,(T_c - T_\infty)}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}}$$

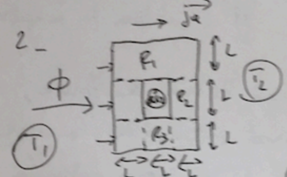
$$P_v = \frac{P}{V} = \frac{P}{\frac{4}{3}\pi R_1^3} = \frac{3\lambda\,(T_c - T_\infty)}{\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) R_1^3}$$

$$\boxed{P_v = \frac{3\lambda\,(T_c - T_\infty)\,R_2}{(R_2 - R_1)\,R_1^2}}$$

Réponse QCM

1.-(a) $\phi_1 < \phi_2 < \phi_3$

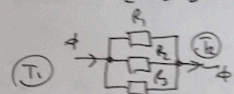
2_



On décompose la brique en 3 résistances R_1, R_2, R_3 (⚠ brique carrée)

On a $R_1 = R_3$ m̂ matériau avec m̂ dimension

Ces 3 résistances sont équivalentes à une association en parallèle entre T_1 et T_2 : le flux ϕ global entrant se divise en 3 flux traversant R_1, R_2, R_3.



$$\text{Donc } \frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{2}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{2R_2 + R_1}{R_1 R_2}$$

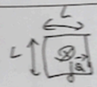
avec $T_1 - T_2 = R_{eq}\,\phi \longrightarrow \boxed{\phi = \frac{T_1 - T_2}{R_{eq}} = (T_1 - T_2)\left(\frac{R_1 + 2R_2}{R_1 R_2}\right)}$

↳ puissance

réponse (a)

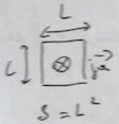
Vérifions les valeurs de R_1 et R_2 :

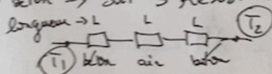
→ R_1 : pour une longueur 3L dans le béton, $S = L^2$



$$\longrightarrow \boxed{R_1} = \frac{3L}{\lambda_b L^2} = \boxed{\frac{3}{\lambda_b L}}$$

→ R_2 : avec béton/air/béton → soit 3 résistances en série, $S = L^2$





$$R_2 = \frac{L}{\lambda_b L^2} + \frac{L}{\lambda_a L^2} + \frac{L}{\lambda_b L^2}$$

$$\boxed{R_2} = \frac{2}{\lambda_b L} + \frac{1}{\lambda_a L} = \boxed{\frac{1}{L}\left(\frac{1}{\lambda_a} + \frac{2}{\lambda_b}\right)}$$

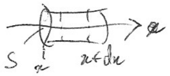
3_ $\tau_{chauffe} = \frac{L^2}{D} \simeq \frac{9 \times 10^{-2}}{2 \times 10^{-4}} = 4{,}5 \times 10^2\,s \simeq 450\,s = 7{,}5\,min$ au moteur pour chauffer globalement

$f = 6000$ tours/min $= \frac{6000}{60}$ Hz $= 100$ Hz

$T_{typique} = \frac{1}{f} = 10^{-2}\,s = 10\,ms$

→ $T_{cycle} \ll \tau_{diffusion}$ (chauffe)

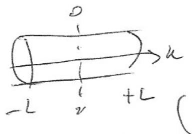
La perturbation de température n'a pas le temps de diffuser → évolution adiabatique



1 – $P_v = \vec{j_e} \cdot \vec{E}$ avec $\vec{j_e} = \gamma \vec{E}$

$P_v = \dfrac{j_e^2}{\gamma}$ et $I = j_e S \rightarrow j_e^2 = \left(\dfrac{I}{S}\right)^2$

$P_v = \dfrac{I^2}{\gamma S^2}$



Autre méthode $\rightarrow P = RI^2$ et $R = \dfrac{2L}{\gamma S}$ et $P_v = P/V$ $(V = S \times 2L)$

2 – $\vec{j_\varphi} = j_\varphi(x)\, \vec{u_x}$ à 1D $= -\lambda \dfrac{dT}{dx} \vec{u_x}$

En régime statio : $d^2U = [\phi(x) - \phi(x+dx)]\,dt + P_v \underbrace{dV}_{S\,dx}\, dt$

$= -\dfrac{d\phi}{dx} dx\, dt + P_v S\, dx\, dt$

$= \lambda S \dfrac{d^2T}{dx^2} dx\, dt + \dfrac{I^2 \cancel{S}}{\gamma S^{\cancel{2}}} dx\, dt$

$\rightarrow \lambda S \dfrac{d^2T}{dx^2} + \dfrac{I^2}{\gamma S} = 0$

$\dfrac{d^2T}{dx^2} = -\dfrac{I^2}{\lambda \gamma S^2}$

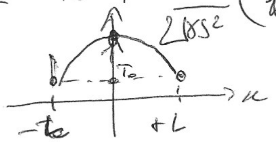
$\dfrac{dT}{dx} = -\dfrac{I^2}{\lambda\gamma S^2} x + A = -\dfrac{I^2}{\lambda\gamma S^2}$

$T = -\dfrac{I^2}{2\lambda\gamma S^2} x^2 + Ax + B$

$T(x = \pm L) = T_0 \rightarrow f^{\circ}$ paire $\rightarrow A = 0$

$T_0 = -\dfrac{I^2}{2\lambda\gamma S^2} L^2 + B \rightarrow B = T_0 + \dfrac{I^2}{2\lambda\gamma S^2}$

$T = T_0 + \dfrac{I^2}{2\lambda\gamma S^2}(L^2 - x^2)$



T_{max} en $x = 0$

$T_{fus} = T_0 + \dfrac{I_{max}^2 L^2}{2\lambda\gamma S^2}$

$S = \dfrac{I_m L}{\sqrt{2\lambda\gamma(T_f - T_0)}} \simeq 1{,}6\ mm^2$

5 – $P_{th}(0) = P_{th}(-L) = -\dfrac{P_e}{2}$? puissance perdue –

rappel $\dfrac{dT}{dx} = \dfrac{-I^2}{\lambda\gamma S^2} x$

$P_{th}(-L) = \iint \vec{j_\varphi}(-L)\, \vec{dS} = j_\varphi(-L)\, S$

$= -\lambda \left(\dfrac{dT}{dx}\right)_{x=-L} S \quad \cancel{\lambda} \times \dfrac{I^2 L}{\cancel{\lambda}\gamma S^2} = \dfrac{RI^2}{2}$

rappel $\boxed{R = \dfrac{2L}{\gamma S}}$