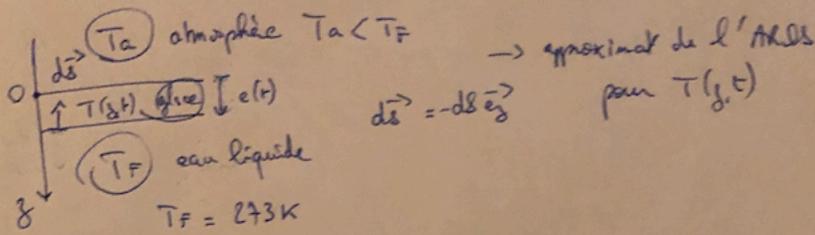


4 - Gel d'un lac



Données : (glace) ρ et $c = 4,18 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ et $L_F = 330 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$
 pour l'eau $\rightarrow \hat{m} \rho$ \hookrightarrow chaleur latente de fusion

1. Hyp : $T(z=0, t) = T_a$

a) Sans des z dérivés, le flux est reçu par la glace : flux entrant.

En régime stationnaire, dans la glace : $\text{div } \vec{j}_q + \rho c \frac{dT}{dt} = 0$
 $\hookrightarrow \text{div } \vec{j}_q = 0 \rightarrow$ flux constant.

donc $\phi = \int_S \vec{j}_q \cdot d\vec{s}$ avec $\vec{j}_q = -\lambda \text{ grad } T = -\lambda \frac{dT}{dz} \vec{e}_z$

$$\phi = \int_S -\lambda \frac{dT}{dz} \vec{e}_z \cdot -dz \vec{e}_z = \int \frac{dT}{dz} S$$

\hookrightarrow car $T(z)$ uniforme sur S

avec $\phi = cte \Rightarrow \frac{dT}{dz} = cte \Rightarrow T(z)$ linéaire avec $z \rightarrow Az + B$
 $\Rightarrow T(z) = \frac{T_F - T_a}{e} z + T_a$

$$\Rightarrow \phi = cte S \left(\frac{T_F - T_a}{e} \right) > 0$$

car $T(z=0) = T_a$
 $T(z=e) = T_F$
 car $T_F > T_a$ (flux entrant \oplus)

b) Bilan pour la couche qui gèle entre t et $t+dt$:

$$dU = \rho c dT + \rho L_F dm = c dT - \rho L_F dm$$

" car $T = cte$ pour la cgt de phase

$$\text{avec } dm = \rho dV = \rho dz S$$

$$\text{donc } -\rho L_F dz S = dU = -\rho c \frac{dT}{dz} dz S \Rightarrow \frac{dT}{dz} = \frac{L_F}{c} \frac{dz}{dz}$$

$$\boxed{e \frac{de}{dt} = -\frac{(T_F - T_a)}{\rho L_F}}$$

Intégral $\rightarrow e de = -\frac{(T_F - T_a)}{\rho L_F} dt$

$$\frac{1}{2} \int_{e_0}^{e^2} d(e^2) = -\frac{(T_F - T_a)}{\rho L_F} t$$

$$e^2 - e_0^2 = -\frac{2(T_F - T_a)}{\rho L_F} t$$

$$\boxed{e^2 = e_0^2 - \frac{2(T_F - T_a)}{\rho L_F} t} \rightarrow e^2 = A + Bt$$

donc

$e < \sqrt{e^2}$ pour $t \rightarrow t_0$ alors $e^2 \approx Bt$ et $\log e = \frac{1}{2} \log B + \frac{1}{2} \log t$

donc $\log e \propto \frac{1}{2} \log t$ pour t grand (e^2 négatif)

\hookrightarrow on retrouve bien une pente de $\frac{1}{2}$ on représente $\log - \log$! Accord!

c) $\left| e \frac{de}{dt} \right| < \frac{d^2}{t} = \frac{-\lambda(T_F - T_a)}{\rho L_F}$ avec d^2 taille caractéristique de l'épaisseur de glace.

$$\tau = \frac{\rho L_F}{\lambda(T_F - T_a)} d^2 \quad D = \frac{1}{\rho c}$$

ARQS pour $\tau \gg \tau_{diff}$ avec $\tau_{diff} = \frac{d^2}{D} = \frac{\rho c d^2}{\lambda}$

$$\frac{d^2}{\lambda} \ll \frac{\rho L_F d^2}{\lambda(T_F - T_a)} \rightarrow 1 \ll \frac{\rho L_F}{c(T_F - T_a)}$$

$$\boxed{c(T_F - T_a) \ll L_F} \rightarrow c d m (T_F - T_a) \ll \rho L_F dm$$

car d épaisseur caractéristique de la glace ou formation d'une couche de glace

qté d'énergie nécessaire à sa solidification!! de glace ne fait pas constituer un réservoir d'air suffisant (résistance thermique faible!)

AN: $T_F - T_a \ll \frac{L_F}{c} = 95K$ si la glace impose une qté d'énergie stockée négligeable, la diffusion thermique n'est plus assez efficace \rightarrow en imposant un facteur 10 environ $\hookrightarrow T_F - T_a \approx 8K$.

2- En fait, la conduction-convect domine! Il faut remplacer T_a par T_S la température de surface effective avec

$$\phi_{cc} = h S (T_S - T_a) \text{ en } z=0!$$

continuité du flux car pour $z > 0$

$$\phi = \phi_{cc} = h S (T_S - T_a) = -\lambda S \left(\frac{T_F - T_S}{e} \right)$$

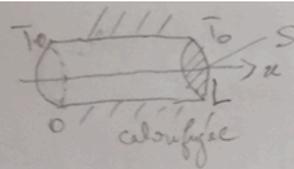
$$T_S = \frac{T_a + \left(\frac{1}{eh}\right) T_F}{1 + \left(\frac{1}{eh}\right)}$$

ARRS h's valide pour T(z) avec T(z=0) = T_S

La température de surface est une moyenne pondérée de T_a et T_F .

b) On retrouve $T_S \approx T_a$ pour $\frac{1}{eh} \ll 1$ (avec $T_F \approx T_a$) $\rightarrow \frac{h}{e} \gg \frac{1}{e}$

Cela correspond au cas d'un vent qui souffle fort (h élevée) et au cas d'une épaisseur de glace élevée (e grande), qui est peu probable au début de la solidification (formation de la glace avec e faible).



λ conductivité
 ρ masse volumique
 c capacité calorifique massique
 $D = \frac{\lambda}{\rho c}$

a) Aux temps très longs, la perturbation initiale s'amortit, la barre se retrouve en équilibre avec le thermostat à T_0 . La température initialement inhomogène sera alors uniforme.

b) On suppose que la barre évolue à volume constant. Appliquons le 1^{er} principe à un élément de volume dV de la barre compris entre x et $x+dx$, selon un problème unidirectionnel selon $x \rightarrow \vec{j}_e = j_e(x,t) \vec{u}_x$

$$d^2U = \delta^2Q + \delta^2W = \delta^2Q \quad (\text{pas de terme source } \delta W_{\text{source}})$$

$$\rightarrow d^2U = \rho c dV dT = \rho c S dx \frac{\delta T}{\delta t} dt$$

$$\rightarrow \delta^2Q = [\phi(x) - \phi(x+dx)] dx$$

$$= -\frac{\delta \phi}{\delta x} dx dx$$

avec $\phi = \iint_S \vec{j}_e(x,t) \cdot d\vec{S} = \vec{j}_e(x,t) \cdot \vec{S} = j_e(x,t) S$

j_e uniforme sur S or $j_e = -\lambda \frac{\delta T}{\delta x}$ (Poi de Fourier)

le bilan local conduit à $\rho c S dx \frac{\delta T}{\delta t} dt = -\lambda \frac{\delta^2 T}{\delta x^2} dx dx S$

$$\frac{\delta T}{\delta t} - \frac{\lambda}{\rho c} \frac{\delta^2 T}{\delta x^2} = \frac{\delta T}{\delta t} - D \frac{\delta^2 T}{\delta x^2} = 0$$

c) On cherche une solution à variables séparées + terme constant (à $t \rightarrow \infty$)
 $T(x,t) = T_0 + f(x)g(t)$

$$f \frac{dg}{dt} - D g \frac{d^2f}{dx^2} = 0 \rightarrow \frac{1}{g} \frac{dg}{dt} = D \frac{1}{f} \frac{d^2f}{dx^2}$$

Cette relation doit être vraie et $f(x) \neq 0$ \rightarrow la seule possibilité est $\frac{1}{g} \frac{dg}{dt} = D \frac{1}{f} \frac{d^2f}{dx^2} = C \rightarrow \text{cste}$

En effet, le premier terme $\frac{1}{g} \frac{dg}{dt}$ ne dépend que de t alors que le second ne dépend que de x : $D \frac{1}{f} \frac{df}{dx}$.
 x et t étant des variables séparées (indépendantes), chacun des termes est constant.

→ Expression de $g(t)$: $\frac{1}{g} \frac{dg}{dt} = C \rightarrow \frac{dg}{dt} - Cg = 0$
 $g(t) = g_0 e^{Ct} \rightarrow$ pour éviter la divergence est $t \rightarrow +\infty$
 $C < 0$

→ Expression de $f(x)$: $D \frac{1}{f} \frac{df}{dx} = C \rightarrow \frac{d^2 f}{dx^2} - \frac{C}{D} f = 0$

posons $k^2 = -\frac{C}{D} > 0$
 $\frac{d^2 f}{dx^2} + k^2 f = 0 \rightarrow f(x) = G_1 \cos(kx) + G_2 \sin(kx)$

d) Exploiter la condition initiale $T(x, t=0) = T_0 + \delta_0 \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$
 $T_0 + \delta_0 \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = f(x)g(t=0) = g_0 \left(G_1 \cos(kx) + G_2 \sin(kx) \right)$

$\hookrightarrow g_0 G_1 = 0$
 $g_0 G_2 = \delta_0$ et $k = \frac{n\pi}{L} = kn$ (la constante g_0 ne joue aucun rôle ici)

donc $T(x, t) = T_0 + f(x)g = T_0 + \delta_0 e^{Ct} \sin(k_n x)$

$T(x, t) = T_0 + \delta_0 e^{Ct} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$

avec $C = -Dk^2 = -\frac{D}{L^2} n^2 \pi^2$

$T(x, t) = T_0 + \delta_0 e^{-Dk_n^2 t} \sin(k_n x)$
 $T(x, t) = T_0 + \delta_0 e^{-\frac{Dn^2 \pi^2}{L^2} t} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$

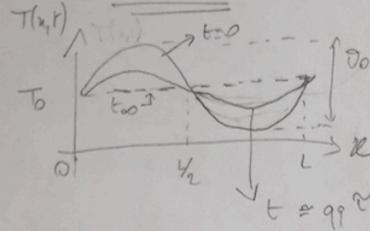
atténuation temporelle de la perturbation spatiale initiale
 en $e^{-\frac{t}{\tau}}$ → temps caractéristique

e) $\tau_n = \left(\frac{L}{n^2 \pi^2} \right) \frac{L^2}{D}$

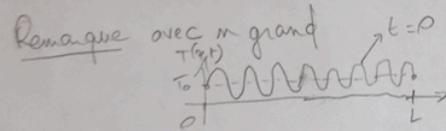
ou $L = \sqrt{n\pi \sqrt{D \tau_n}}$

on retrouve $L \propto \sqrt{D \tau} \rightarrow \text{const}$

Prendre le cas $n=1$ alors $\sin k_n x = \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$



↳ période spatiale = L



l'amplitude de la perturbation $\delta_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$ s'atténue au cours du temps.

la température varie spatialement vite alors τ est + faible ($\tau \propto \frac{1}{n^2}$) la durée de thermalisation diminue les variations spatiales brusques s'atténuent plus vite lors de la diffusion thermique.

f) Rappel: Développement en série de Fourier d'une fonction

$T_i(x)$, périodique de période $T = 2L$ et impaire avec une valeur moyenne non-nulle égale à T_0

$T_i(x) = T_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n \sin(\omega_n x + \varphi_n) \rightarrow$ soit les termes en sin...

avec $\omega_n = n \frac{2\pi}{T} = n \frac{2\pi}{2L} = \frac{n\pi}{L}$

$T_i(x) = T_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x + \varphi_n\right)$

On développe donc la température initiale en série de Fourier pour satisfaire aux conditions aux limites

$T_i(0) = T_i(L) = T_0$ il faut $\sin\left(\frac{n\pi}{L} x + \varphi_n\right) = 0$ (à $x=0$)

donc $T_i(x) = T_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$ (à $x=L$)

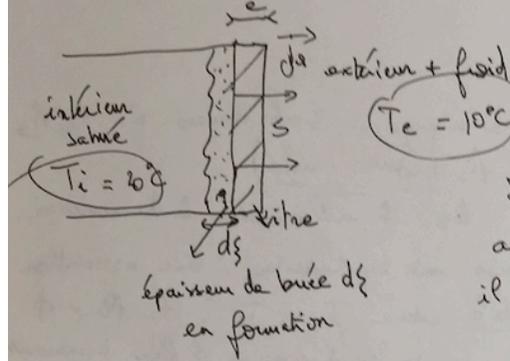
On construit alors la solution globale par superposition des solutions pour $k = \pm \infty \rightarrow$ l'équation pilote linéaire le permet. A chaque composante de Fourier, il suffit de rajouter le terme d'amortissement $e^{-\frac{t}{\tau_m}}$ d'ordre n .

$$\text{Ainsi } T(x,t) = T_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \vartheta_n e^{-\frac{t}{\tau_m}} \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$$

Cette forme générale satisfait à l'équation de la chaleur et on a bien $T(x,t=0) = T_i(x) \rightarrow$ C.I. respectée

Les amplitudes des modes n sont les coefficients de Fourier de la fonction $T_i(x)$ impaire, de période $2L$.

Question de raisonnement



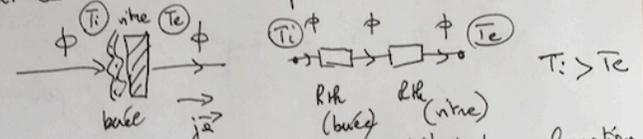
Formation de la bulle

- expliquer la formation de la bulle
- évaluer sommairement $\frac{d\xi}{dt}$ l'évolution de son épaisseur

Dans la zone où la bulle se forme, au contact direct intérieur de la vitre, il y a changement d'état vapeur saturée \rightarrow liquide (bulle).

Cette portion de bulle en formation perd de l'énergie (gaspillage) \rightarrow ce qui permet le changement d'état.

Cette perte au contact de la vitre se produit par transfert thermique :



En raison de la très faible épaisseur de bulle traversée, au début de sa formation, on négligera $R_{th}(bulle)$.

Prenons comme système la bulle en formation, liquide qui évolue à pression constante : $dH = \delta Q_{bulle} \rightarrow$ la bulle demeure à T constante = T_i \rightarrow le transfert thermique est noté ϕ

$$\rightarrow dH = \underbrace{c_p dt}_0 \text{ car } T \text{ constante} + dH_{\text{changement d'état}} = -\rho l v dV = -\rho l v d\xi S$$

\hookrightarrow enthalpie de vaporisation

$$\rightarrow \delta Q_{bulle} = -\phi dt = -\frac{(T_i - T_e) \lambda_{vitre} S}{e} dt$$

$$\text{donc } \rho l v d\xi S = \frac{(T_i - T_e) \lambda_{vitre} S}{e} dt$$

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{\lambda (T_i - T_e)}{\rho e l v}$$

$\rightarrow \frac{d\xi}{dt} = 0,9 \mu m \cdot s^{-1}$
 ensuite $\Delta E \approx e = 5 \text{ mm}$
 la résistance de la bulle n'est plus négligeable \hookrightarrow limitation de son \uparrow

$\Delta E = 0,5 \text{ mm}$
 en 10 min

Résultat de problème - Refroidissement d'un point de soudure

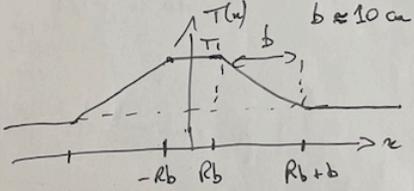
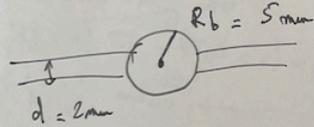
Q25 -> Pour décrire le changement d'état et quantifier les échanges thermiques correspondants, il faut connaître l'enthalpie molaire de fusion du matériau 1 ($l \rightleftharpoons s$) en $J \cdot kg^{-1}$ et la masse volumique du matériau 1. $\rho_1 = 8500 \text{ kg} \cdot m^{-3}$ (état solide)

- Pour quantifier les transferts thermiques avec le milieu ext. $\rightarrow h$ coef. conducto-convectif R en $W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}$
- la diffusion thermique au sein des 2 fils $\rightarrow \lambda_2$ en $W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$

-> Pour évaluer, les effets de diffusion thermique en régime variable
 $Dth_{1,2} = \frac{\lambda_{1,2}}{\rho_{1,2} c_{p,2}}$ aussi les capacités thermiques $c_{p,2}$ en $J \cdot K^{-1} \cdot kg^{-1}$
 $\lambda_{1,2}$ et $\rho_{1,2}$

Il faut bien sûr connaître les paramètres géométriques.

Q. 26. Modéliser et équater



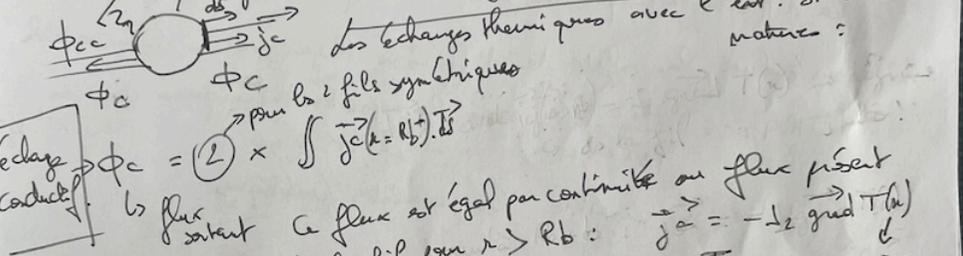
Hypothèses du modèle pendant la solidification

- T_{ext} (point de soudure) uniforme \rightarrow le chgt d'état impose une T_1 cste à l'éq. liq \rightleftharpoons solide de la soudure
- = le profil de température au sein des fils conducteurs est celui d'un régime stationnaire (linéaire avec $x \rightarrow \Delta T = 0$) de diff. thermique
- donc $\Delta t \gg \tau_{diff} = \frac{b^2}{D_2}$ \rightarrow nous vérifions cette hypothèse de l'ABQS

- on considère un problème de transport unidimensionnel parfaitement adapté à la conduction dans les fils de contact (on y néglige la conducto-convexion au contact de l'air ambiant).

- du point de vue thermique, on fait l'hypothèse que les constantes physiques de la soudure ds les états solide et liquide sont voisines $\rightarrow h$ (liquide/air) \approx h (solide/air) par exemple.
- le volume de la boule de soudure change peu lors du changement d'état.

Réalisons un bilan d'énergie pour le point de soudure évoluant à la température $T_1 \approx T_{fusion}$ cste.



des échanges thermiques avec l'ext. sr de 2 nature :
 Ce flux est égal par continuité au flux présent ds le fil, pour $x > R_b$:
 $\vec{j}_c = -\lambda \frac{dT}{dx} \vec{e}_x = +\lambda \frac{T_1 - T_{ext}}{b} \vec{e}_x$ régime station.
 par continuité du flux $\vec{j}_c(x=R_b^-) = \vec{j}_c(x=R_b^+)$
 cste soudure cste fil

donc $\phi_c = \frac{\pi d^2 \lambda (T_1 - T_{ext})}{2b}$

Échange conducto-convectif $\phi_{cc} = h S (T_1 - T_{ext}) = 4\pi R_b^2 h (T_1 - T_{ext})$
 on fait $S = 4\pi R_b^2 - 2(\frac{\pi d^2}{4}) = 4\pi R_b^2 (1 - \frac{1}{8} (\frac{d}{R_b})^2) \approx 4\pi R_b^2$ négligeable

Comparons ces 2 flux :
 $\frac{\phi_{cc}}{\phi_c} = \frac{2 \times 4\pi R_b^2 h (T_1 - T_{ext}) b}{\pi d^2 \lambda (T_1 - T_{ext})} = 4 \left(\frac{R_b}{d}\right)^2 \times \frac{R_b}{\lambda} = 2 \times \frac{15}{4} \times \frac{10 \times 0,1}{600} = \frac{50}{4} \times 10^{-2} = 0,125$

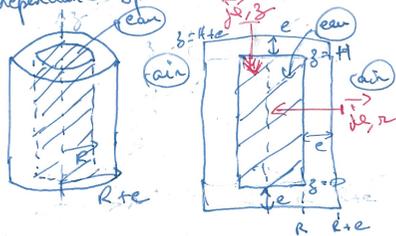
Résultat de pblème : « bojibo »

①

- Le principe est un refroidissement par évaporation, qui consomme de l'énergie en provenance du récipient (transfert thermique)
 - ds le "bojibo", l'eau contenue à l'intérieur de la jante, s'infiltré à travers les pores de sa paroi puis s'évapore au contact de la surface ext.
 - ds le réfrigérant, c'est l'eau contenue dans la sèbe, qui s'infiltré dans la paroi extérieure.

2. Modélisation du système :

- après refroidissement du système, on se place au régime stationnaire, où $T_{int} < T_{ext}$ → l'équilibre est établi.
- après établissement du régime stationnaire, le flux thermique apporté par l'ext. \odot change l'équilibre le flux thermique d'évaporation (flux négatif pour le syst. jante + eau)
- dépendance spatiale de la température: symétrie de révolution:
 - $T(r, \theta, z) = T(r, z)$



Comparons les flux thermiques selon z et r :

$$\phi_z \propto S = \pi(R+e)^2 = \pi R^2$$

$$\phi_r \propto S_{LAT} = 2\pi(R+e)H = 2\pi R H$$

Comme $\frac{S}{S_{LAT}} = \frac{\pi R^2}{2\pi R H} = \frac{R}{2H} = \frac{10}{100} = 0,1 \Rightarrow 10\%$

On peut donc négliger le flux selon $z \rightarrow j_{z,z} \ll j_{z,r}$

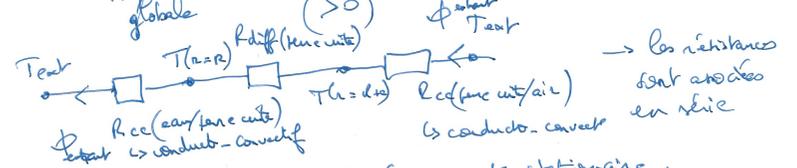
et $\vec{j}_e \approx j_{z,r} = -\lambda \frac{dT}{dr} \vec{e}_r \rightarrow T(r, z) = T(r)$

on considère donc un problème unidimensionnel selon r !!

• Evaluation de l'écart de température

②

En régime stationnaire, utilisons la notion de résistance thermique pour lier la diff. de température $\Delta T = T_{ext} - T_{int} = R \Phi_{entrant}$ ($\Delta T > 0$)



Le flux entrant est cot car le régime est stationnaire. (à travers la jante)

→ Evaluons $R_{cc}(jante/air)$: $\phi_{cc}(air) = h_{eau/air} (T_{surface} - T_{ext}) S_{LAT}(R+e)$ (\vec{j}_{cc} selon \vec{e}_z)

$$\phi_{cc} = h_{eau/air} \times (T(r=R+e) - T_{ext}) \times S_{LAT}(R+e)$$

donc $R_{cc}(jante/air) = \frac{\Delta T}{\phi_{cc}} = \frac{1}{h_{eau/air} S_{LAT}(R+e)}$

→ De m $R_{cc}(eau/jante) = \frac{1}{h_{eau/jante} S_{LAT}(R)}$

On ne dispose pas de $h_{eau/jante}$, et on suppose que la température intérieure est uniforme: la diff. s'est faite par convection à homogénéiser la température dans l'eau. On négligera ce transfert conducto-convectif du point de vue des résistances.

→ Evaluons $R_{diff}(jante)$:

le flux entrant selon $d\vec{s} = -ds \vec{e}_z$ est cot :

$$\phi_{diff} = \iint \vec{j}_z \cdot d\vec{s} = \iint j_z(r) \vec{e}_z \cdot (-ds \vec{e}_z)$$

$$= -j_z S_{LAT} = -\lambda \frac{dT}{dr} \times 2\pi R H$$

(j_z uniforme sur S)

$$dT = \frac{\phi_{diff}}{2\pi r H} \frac{dr}{r} \rightarrow \int_{T(R)}^{T(R+e)} dT = \frac{\phi_{diff}}{2\pi H} \int_{r=R}^{r=R+e} \frac{dr}{r} \quad (3)$$

$$\rightarrow \Delta T(\text{teneur}) = T(R+e) - T(R) = \frac{\phi_{diff}}{2\pi r H} \ln\left(\frac{R+e}{R}\right)$$

avec $\ln\left(\frac{R+e}{R}\right) = \ln\left(1 + \frac{e}{R}\right)$ avec $\epsilon = \frac{e}{R} \ll 1$
 or la DL $\rightarrow \ln(1+\epsilon) \sim \epsilon$

$$\Delta T(\text{teneur}) = \frac{\phi_{diff} e}{1 \times 2\pi R H} \rightarrow R_{diff}(\text{teneur}) = \frac{\phi_{diff}}{\Delta T}$$

$$R_{diff}(\text{teneur}) = \frac{e}{1 \times 2\pi R H}$$

Rq) On retrouve l'expression de R_{diff} à 1D pour un cylindre
 infini long de longueur e $\rightarrow R_{th} \approx \frac{e}{1 \times S_{LAT}}$ car $R \gg e$

Comparons maintenant ces 2 résistances :

$$\frac{R_{diff}(\text{teneur})}{R_{cc}(\text{teneur}/\text{air})} = \frac{e}{1 \times 2\pi R H} \times R_{S_{LAT}(R+e)} = \frac{e h \frac{2\pi H (R+e)}{1 \times 2\pi R H}}{1 \times 2\pi R H}$$

avec $(R+e) \approx R$

$$\frac{R_{diff}(\text{teneur})}{R_{cc}(\text{teneur}/\text{air})} = \frac{e h}{1} = \frac{10^{-2} \times 10}{0,9} \approx 10^{-1} \rightarrow R_{diff} \ll R_{cc}$$

donc la résistance due au transport diffusif est négligeable devant la résistance de conduct - con vect qui domine

$$\Delta T \approx R_{cc}(\text{teneur}/\text{air}) \phi_{cavant}(r=R+e)$$

Evolution $\phi_{cavant}(r=R+e)$ (4)

En régime stationnaire, ce flux entrant se compare aux flux d'énergie pour l'évaporat : $\phi_{cavant}(r=R+e) + \phi_{évaporat} = 0$

avec $\phi_{évaporat} dt = - \text{Evap} dm$] qte d'énergie échangée avec dm la qte d'eau évaporée pdr dt

$$dm = \rho_{eau} dV = \rho_{eau} d dt \rightarrow \text{débit volumique (volume } s^{-1})$$

$$\phi_{évaporat} = - \text{Evap} \frac{dm}{dt} = - \text{Evap} \frac{\rho_{eau} d dt}{dt}$$

$$\phi_{évaporation} = - \text{Evap} \rho_{eau} d$$

Rq) On suppose ici que l'évaporat n'est pas influencé par les condit météo comme le vent : le connaître de la fig 5.7. la précise. De plus, il semble qu'il n'existe pas de film d'eau à la surface de la jante : l'étape qui limite la qte d'eau évaporée par unité de tps est la traversée du milieu poreux. (doc 3 \rightarrow inutile).

Il nous faut maintenant exploiter la loi de Darcy (doc 2.) de moten de la traversée du milieu poreux par le fluide est la diff. de pression entre l'intérieur et l'ext.

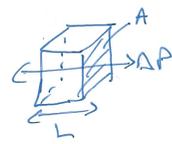
Naturellement, pour ce fluide statique, la pression \uparrow avec la profondeur dans la jante.

Avec un repère selon l'axe z orienté vers le bas, la pression $P(z)$ dans l'eau s'exprime par :

$P(z) = P_0 + \rho_{\text{eau}} g z$. On peut prendre la diff. de pression "moyenne" (au milieu de la jante) pour évaluer ΔP : (5)

$$\Delta P = \rho_{\text{fluide}} \frac{gH}{2}$$

Exploisons la loi de Darcy :



$$Q = KA \frac{\Delta P}{\rho_{\text{jante}} g L}$$

gés. cylindrique
dans la jante

$$\left. \begin{array}{l} L = e \\ A = S_{\text{carré}} \\ \approx 2\pi R H \quad (R_{\text{ext}} = R) \end{array} \right\}$$

$$Q = K \times 2\pi R H \times \frac{\rho_{\text{fluide}} g H}{2 \rho_{\text{jante}} g e}$$

avec $\frac{\rho_{\text{jante}} \times \rho_{\text{fluide}}}{\rho_{\text{jante}}}$ " "
↳ la jante très poreuse est remplie d'eau ≈

$$Q \approx \pi K \frac{R}{e} H^2$$

Rq) et si on intègre la dépendance de ΔP selon z :

$\Delta P = \rho g z$ avec $A \approx 2\pi R dz$ pour une tranche de jante dz

$$dQ = K \times 2\pi R dz \frac{\rho_{\text{fluide}} g z}{\rho_{\text{jante}} g e} \rightarrow Q = \int_{z=0}^{z=H} \frac{2\pi R K}{e} z dz$$

Au final :

$$\Delta T = \frac{R_{\text{eau}}}{R \times 2\pi R H} \times \rho_{\text{eau}} \rho_{\text{eau}} \times \frac{Q}{\pi K \frac{R}{e} H^2}$$

$$\Delta T = \frac{K \rho_{\text{eau}} \rho_{\text{eau}} H}{2 R e}$$

$$\rightarrow Q = \pi K \frac{R}{e} H^2$$

↳ m résultat

AN : $\Delta T = 12^\circ\text{C}$ le modèle simple est cohérent avec l'expérience

3. Intérêt sable humide → ↑ ΔP avec ρ (sable humide) ⊕ grad pour ↑ le flux d'eau et ΔT .