II Dimensionnement du chauffage d'une voiture de TGV

II.A – Équation de la diffusion thermique dans une paroi solide

Q37. On a :

$$\delta Q_{in} = \underbrace{j(x,t).S.\mathrm{d}t}_{\text{entrant en } x} - \underbrace{j(x+\mathrm{d}x,t).S.\mathrm{d}t}_{\text{sortant en } x+\mathrm{d}x} \Longleftrightarrow \boxed{\delta Q_{in} = -\frac{\partial j}{\partial x}S.\mathrm{d}x.\mathrm{d}t}$$

Q38. La variation d'énergie interne s'écrit :

$$\mathrm{d}U = \rho(S.\mathrm{d}x)c\,(T(x+\mathrm{d}x,t) - T(x,t)) \Longleftrightarrow \boxed{\mathrm{d}U = \rho.S.\mathrm{d}x.c\frac{\partial T}{\partial t}\mathrm{d}t}$$

Q39. D'après le premier principe de la thermodynamique : $\mathrm{d}U = \delta W + \delta Q_{in}$ et, comme il n'y a pas de déformation du solide $\delta W = 0$ donc finalement :

$$\boxed{\rho.c\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial j}{\partial x}}$$

Q40. La loi de Fourier s'exprime $\vec{j} = -\lambda\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,T$ soit ici, comme le problème est unidimensionnel : $\boxed{j(x,t) = -\lambda\frac{\partial T}{\partial x}}$.

Q41. En remplaçant dans le premier principe, il vient alors l'expression demandée :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad \text{avec} \quad \boxed{D = \frac{\lambda}{\rho.c}}$$

II.B – Régime stationnaire

Q42. En régime stationnaire, $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$. On trouve alors que $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$ soit $\frac{\partial T}{\partial x} = a$ ou encore $T(x) = ax + b$. Le profil de température est alors affine. Compte tenu des conditions aux limites, on trouve :

$$\boxed{T(x) = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{e}x}$$

Q43. D'après la loi de Fourier, on trouve $\boxed{j(x) = \frac{T_1 - T_2}{e}}$. Comme $\mathcal{P}_{th} = \iint_S \vec{j}\cdot\mathrm{d}^2\vec{S}$, on en déduit $\boxed{\mathcal{P}_{th} = \frac{\lambda.S}{e}(T_1 - T_2)}$. Dans le volume étudié, on peut dire que le champ $\vec{j}(x)$ est <u>uniforme</u>.

Q44. On définit la résistance thermique en écrivant $\Delta T = R_{th}\mathcal{P}_{th}$ par conséquent $\boxed{R_{th} = \frac{e}{\lambda S}}$.

Q45. De la même manière, on trouve $\boxed{\mathcal{P}_{cc} = h.S(T_{2,p} - T_{2,f})}$.

Q46. On définit alors $\boxed{R_{cc} = \frac{1}{h.S}}$.

Q47. L'air est immobile à l'intérieur et isole bien (peu de convection) alors qu'il y a une vitesse importante de l'autre côté (à l'extérieur) et une moins bonne isolation. Le coefficient conducto-convectif est donc plus important à l'extérieur qu'à l'intérieur ($h_i < h_e$).

Q48. Le premier principe industriel s'écrit $D_m(\Delta e_c + \Delta e_p + \Delta h) = \mathcal{P}_i + \mathcal{P}_{th}$. Ici, $\Delta e_p = 0$ (il n'y a pas de différence d'altitude entre l'intérieur et l'extérieur) et $\mathcal{P}_i = 0$ car on ne considère qu'un échange thermique. En outre, en l'absence de tuyère, on considère généralement Δe_c comme négligeable. Il reste alors, en utilisant la loi de Joule :

$$\mathcal{P}_{th} = D_m c_p(\underbrace{T_{int}}_{\text{sortie}} - \underbrace{T_{ext}}_{\text{entrée}})$$

Q49. Le cas le plus défavorable est le cas où la voiture est vide, car les passagers se comportent comme une source de chaleur et vont ainsi contribuer à maintenir la température intérieure.

Q50. Il convient de déterminer les pertes thermiques. On va considérer que le flux de chaleur se partage entre les vitres, les parois latérales, le sol et le plafond. On néglige le fait que la chaleur a tendance à monter et que les pertes par le toit risquent ainsi d'être plus importantes. On considérera ainsi que le système est équivalent à l'association parallèle de résistances thermiques :

$$\frac{1}{R_{tot}} = \frac{12}{R_{vitre}} + \frac{1}{R_{sol}} + \frac{1}{R_{toit}} + \frac{2}{R_{p.lat.}}$$

Déterminons les différentes résistances thermiques (associations séries de résistance thermique pour chaque matériau) : Pour une vitre :

$$R_{vitre} = \frac{1}{L_V H_V}\left(\frac{1}{h_e} + \frac{e_{ve}}{\lambda_v} + \frac{e_{air}}{\lambda_{air}} + \frac{e_{vi}}{\lambda_v} + \frac{1}{h_i}\right)$$

On trouve $\boxed{R_{vitre} \approx 3,40 \times 10^-1 \ \mathrm{K\,W^{-1}}}$.

Pour le sol, on aura la même chose que pour le toit, à savoir :

$$R_{toit} = \frac{1}{Ll}\left(\frac{e_{st}}{\lambda_{st}} + \frac{e_{lv}}{\lambda_{lv}} + \frac{e_{Al}}{\lambda_{Al}}\right)$$

Numériquement : $\boxed{R_{sol} = R_{toit} \approx 7,59 \times 10^{-3} \ \mathrm{K\,W^{-1}}}$.

Enfin pour une paroi latérale, on écrit (en n'oubliant pas de retrancher la surface de 6 fenêtres) :

$$R_{p.lat.} = \frac{1}{Lh - 6L_V H_V}\left(\frac{e_{st}}{\lambda_{st}} + \frac{e_{lv}}{\lambda_{lv}} + \frac{e_{Al}}{\lambda_{Al}}\right)$$

Et on trouve : $\boxed{R_{p.lat.} \approx 1,28 \times 10^{-2} \ \mathrm{K\,W^{-1}}}$.

Finalement, il vient donc pour la résistance équivalente à l'ensemble de la voiture $\boxed{R_{tot} \approx 2,20 \times 10^{-3} \ \mathrm{K\,W^{-1}}}$.

Q51. Pour que la température intérieure reste constante, il faut alors que la puissance de chauffe compense exactement les pertes thermiques. Ceci s'écrit alors : $\boxed{\mathcal{P}_{ch} = \frac{T_{int} - T_{ext}}{R_{tot}}}$ soit numériquement $\underline{\mathcal{P}_{ch} \approx 10,9 \ \mathrm{kW}}$.

Q52. 50 passagers représentent une puissance thermique moyenne de 3000 W, la puissance de chauffe nécessaire n'est alors plus que de $\underline{\mathcal{P}'_{ch} = 7,9 \ \mathrm{kW}}$.