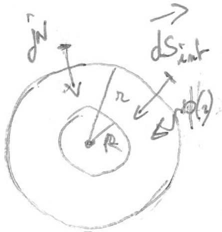
Ex 3 – Taille critique d'1 bactérie



$\vec{dS}_{int}$ on s'attend à une ↗ de la concentrat° lorsque r ↗, car il y a consommat° d'O_2 par la bactérie à sa surface.

$$\frac{dn}{dr} > 0$$

Invariance par rotat° θ, φ $\xrightarrow{\text{sym. sphérique}}$ $n(r,\theta,\varphi,\cancel{t}) = n(r)$
+ régime stationnaire

$$\vec{j_N} = -D\,\vec{grad}\,n = -D\frac{dn}{dr}\vec{u_r} = j_N(r)\,\vec{u_r}$$

1 – Pas de créat°/absorpt° de part à la surface de la bactérie, en régime statio., l'équat° de conservat° du nbre de part : $\mathrm{div}\,\vec{j_N} + \frac{\partial n}{\partial t} = 0$

→ $\boxed{\mathrm{div}\,\vec{j_N} = 0}$ → flux conservatif

$$\phi(r) = \phi_0 = \iint_S \vec{j_N}\cdot\vec{dS}_{int} = \iint_S j_N(r)\,\vec{u_r}\cdot -dS\,\vec{u_r}$$

cste > 0 car ici choix d'un flux entrant $\vec{dS}_{int} = -dS\,\vec{u_r}$

$$\phi_0 = -\iint_S j_N(r)\,dS = -j_N(r)\cdot 4\pi r^2 = D\frac{dn}{dr}\times 4\pi r^2$$

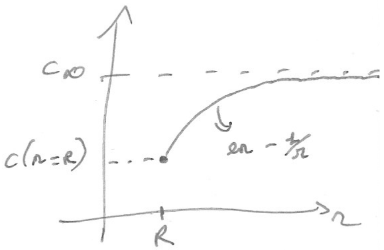
j_N uniforme sur S

donc $\frac{dn}{dr} = \frac{\phi_0}{4\pi D r^2}$ Rqe) on a bien $\frac{dn}{dr} > 0$ avec $\phi_0 > 0$

$n(r) = -\frac{\phi_0}{4\pi D r} + C$ avec $n(r \to +\infty) = n_\infty$ alors $C = n_\infty$

$n(r) = -\frac{\phi_0}{4\pi D r} + n_\infty$ et $n = N_A \times c$ ← en mol.m⁻³

$$\boxed{c = -\frac{\phi_0}{4\pi D N_A r} + c_\infty}$$



2 – $\delta N(O_2\text{ consommé}) = m\text{ bactérie} \times A \times dt$
↳ mol   ↳ en mol. kg⁻¹. s⁻¹

$\frac{\delta N(O_2\text{ consommé})}{dt}$ = Flux consommé = $\mu \times \frac{4}{3}\pi R^3 \times A$
↳ en mol. s⁻¹

Par continuité du flux à la surface de la bactérie en $r = R$:

$\frac{\delta N(O_2\text{ consommé})}{dt} \times N_A = \phi_0$ → le flux j_N transporte ces particules à la surface pour qu'elles y soient consommées.
↳ mol   ↳ en part. m⁻³

$$\rightarrow \phi_0 = \frac{4}{3}\pi R^3 \mu A \times N_A$$

$c = -\frac{\cancel{\frac{4}{3}}\cancel{\pi}R^{\cancel{3}}\mu A\cancel{N_A}}{\cancel{4\pi}D\cancel{N_A}\,r} + c_\infty$ → $\boxed{c(r) = -\frac{\mu A R^3}{3D}\times\frac{1}{r} + c_\infty}$

et $\boxed{c(R) = -\frac{\mu A R^2}{3D} + c_\infty}$

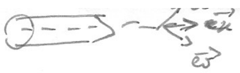
A la limite où la consommation n'est plus possible $c(R) \to 0^+$

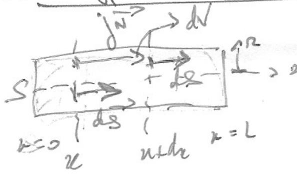
donc $-\frac{\mu A R_c^2}{3D} + c_\infty = 0$ → $\boxed{R_c = \sqrt{\frac{3Dc_\infty}{\mu A}} = 8\,\mu m}$

et $R < R_c$

$$[R_c] = \sqrt{\frac{m^{\cancel{2}}.\cancel{s^{-1}}\times \cancel{m^{-3}}}{\cancel{kg}.\cancel{m^{-3}}\times \cancel{kg^{-1}}.\cancel{s^{-1}}}} = m\,!$$

4 - Diffusion de neutrons





$D = 12 \, m^2 s^{-1}$

Rq) $n(M,t) = n(x,t)$ modèle unidimensionnel
valable car $n(M,t) = n(r, \theta, x, t)$
avec symétrie de révolution autour de (Ox) → invariance
par rotation θ → $n(M,t) = n(r,x,t)$
avec fil assez fin et long → $r \ll L$
→ $n(M,t) = n(x,t)$

donc $\vec{j} = -D \, \vec{grad}\, n = -D \frac{\partial n}{\partial x} \vec{e_x} = j(x) \vec{e_x}$

A. Production de neutrons : $\delta^2 N_{produit} = K n(M,t) \, dV dt$ avec $K = 3{,}5 \cdot 10^4 \, s^{-1}$
↳ taux de création (homogène)

- Conditions aux limites admises : $n(x,t)$ s'annule aux extrémités ($\forall t$) (pas à l'intérieur) $n(x=0,t) = n(x=L,t) = 0$

1 - Réalisons un bilan de particules sur un volume dV compris entre x et $x+dx$:

$\delta^2 N = [n(x, t+dt) - n(x,t)] dV = \boxed{\frac{\partial n}{\partial t} dt \, dV}$

Cette variation du nombre de particules entre $t+dt$ et t est due aux échanges avec l'ext. sous l'influence de la diffusion (flux de $\vec{j_N}$) et de la production de neutrons : $\delta^2 N = \delta^2 N_{éch} + \delta^2 N_{créé}$

$= [\phi_{entrant}(x,t) - \phi_{sortant}(x+dx,t)] dt + K n(x,t) dV dt$

$= -\frac{\partial \phi}{\partial x} dx \, dt + K n \, dV$

avec $\phi = \iint_S \vec{j_N} \cdot \vec{dS} = \iint_S - j_N(x) \vec{e_x} \cdot dS \vec{e_x} = - j_N(x) S$

car $j_N(x)$ est uniforme sur S

$= -S \frac{\partial j_N}{\partial x} dx \, dt + K n \, dV dt$

$\boxed{\delta^2 N = + D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} \underbrace{S dx}_{dV} dt + K n \, dV dt}$

→ Bilan total : $\frac{\partial n}{\partial t} \cancel{dt dV} = D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} \cancel{dV dt} + K n \cancel{dV dt}$

$\boxed{\frac{\partial n}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + K n}$

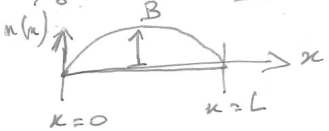
2 - En régime stationnaire : $\boxed{\frac{\partial n}{\partial t} = 0}$ → $D \frac{d^2 n}{dx^2} + K n = 0$

$\boxed{\frac{d^2 n}{dx^2} + \frac{n}{\delta^2} = 0 \quad \text{avec} \quad \delta = \sqrt{\frac{D}{K}}}$ → distance caractéristique

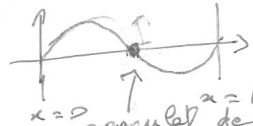
↳ solution : $n(x) = A \cos \frac{x}{\delta} + B \sin \frac{x}{\delta}$

$n(x=0) = 0$ → $A = 0$
$n(x=L) = 0$ → $\sin \frac{L}{\delta} = 0$ → $\frac{L}{\delta} = n\pi$ → $\boxed{L_n = n\pi\delta}$

- $n = 1$: $L_{(1)} = \pi\delta$ → $n(x)$:

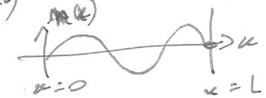


- $n = 2$: $L_{(2)} = 2 \times \pi\delta$ →



↗ impossible (énoncé)
annulation de $n(x)$ entre $x=0$ et $x=L$

- $n = 3$ →



↳ L annulation ... donc annulation pour tt n / $n > 1$

donc $n = 1$ → $\boxed{L_n = L_S = \pi\delta}$ → $\delta = \frac{\pi}{L_S}$

$\boxed{n(x) = B \sin \frac{\pi x}{L_S}}$ avec $\boxed{L_S = \pi \sqrt{\frac{D}{K}} = 7{,}5 \, cm}$

3 - En régime variable, on cherche une solution du type onde stationnaire → bien adaptée à des conditions aux limites fixes dans le temps !

$n(x,t) = h(x) f(t)$ avec $f(t) = e^{-t/\tau}$

$\frac{\partial n}{\partial t} = h \frac{df}{dt} = h \times -\frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} = h \times f \times -\frac{1}{\tau} = -\frac{n}{\tau}$

et $-\frac{n}{\tau} = D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + K n$ → $-\frac{h \cancel{f}}{\tau} = D \frac{d^2 h}{dx^2} \cancel{f} + K h \cancel{f}$

$$\boxed{\frac{d^2h}{dx^2} + \frac{\left(k + \frac{1}{\tau}\right)}{D} h = 0}$$

Avec les mê conditions limites et n = 1 pour éviter l'annulat de n(x,t), mê type de solut :

$$h(x) = B' \sin\left(\frac{x}{\delta'}\right) \quad \text{or} \quad \boxed{\delta' = \sqrt{\frac{k + \frac{1}{\tau}}{D}}}$$

$$\boxed{h(x) = B' \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \qquad L = \pi \delta'}$$

donc $\boxed{n(x,t) = B' \sin \frac{\pi x}{L'} \, e^{-t/\tau}} = h(x)\, f(t)$

et $\delta'^2 = \frac{k + \frac{1}{\tau}}{D}$

$$\frac{1}{\tau} = D\delta'^2 - k \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{\tau} = \frac{D\pi^2}{L^2} - k$$

Pour une solut divergente qd $t \to +\infty$, τ doit être < 0

$$k > \frac{D\pi^2}{L^2} \longrightarrow \boxed{L > L_S = \pi \sqrt{\frac{D}{k}} = 7,9 \text{ cm}}$$

Le syst. "explose" dès que L est supérieur à L_S

$\longrightarrow$ taille minimale d'une bombe nucléaire au plutonium !!