II. C. Barrière géologique :

C 1) Pour une tranche d'épaisseur dx, pendant dt :

$N(t+dt) - N(t) = [\ C_t(x,\ t+dt) - C_t(x,t)\ ]S.dx = \dfrac{\partial C_t}{\partial t}.dt.S.dx = (\ 1 + K_s).\ \dfrac{\partial C}{\partial t}.dt.S.dx$

et $N(t+dt) - N(t) = [\ j_C(x,\ t) - j_C(x+dx,t)\ ]S.dx = -\dfrac{\partial j_C}{\partial x}.dt.S.dx = D.\dfrac{\partial^2 C}{\partial x^2}.dt.S.dx$

On en déduit : $\dfrac{\partial C}{\partial t} = D.\dfrac{1}{1+K_S}\dfrac{\partial^2 C}{\partial x^2}$, soit $\mathbf{D' = D / (\ 1+K_S)}$.

2) En régime stationnaire : $\frac{\partial^2 C_0}{\partial x^2} = 0$, d'où $C_0(x) = Ax + B$
avec $C_0(0) = C(0,t) = 0$ et $C_0(l) = C(l,t) = 0$.

On en déduit : $\mathbf{C_0(x) = C_0\,(1 - x/l)}$.

3) $\frac{\partial C}{\partial t} = -\frac{\partial C'}{\partial t}$; $\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 C'}{\partial x^2}$; l'équation vérifiée par C'(x,t) est donc identique à l'équation vérifiée par C(x,t).

$C'(0,t) = C_0(0) - C(0,t) = 0$; $C'(l,t) = C_0(l) - C(l,t) = 0$; $C'(0<x<l,\, 0) = C_0(0<x<l)$.

4) On obtient : $g' / g = D'.f''/f$.
Le premier membre ne dépendant que de t et le second que de x, chacun est égal à une constante.

Si cette constante est nulle : $g(t) = A$: solution stationnaire qui ne convient pas.

Posons $g'/g = -1/\tau$; on a alors $\mathbf{g(t) = A.\exp(-t/\tau)}$; τ doit donc être positif pour que g(t) – et par conséquent C'(x,t) ne diverge pas pour $t \to \infty$.

5) On a donc $f'' = -f / D'\tau$, d'où $\mathbf{f(x) = \sin\left(\frac{x}{\sqrt{\tau D'}} + \varphi\right)}$,

puis $\mathbf{C'(x,t) = A.\exp(-t/\tau).\sin\left(\frac{x}{\sqrt{\tau D'}} + \varphi\right)}$.

Conditions aux limites : $C'(0,t) = 0 = A.\sin(\varphi)$, d'où $\varphi = 0$;

$C'(l,t) = 0 = A.\exp(-t/\tau).\sin\left(\frac{l}{\sqrt{\tau D'}}\right)$, d'où $\frac{l}{\sqrt{D'\tau}} = n\pi$, soit $\mathbf{\tau_n = l^2 / n^2\pi^2 D' = \tau_1 / n^2}$.

6) La fonction $C_0(x)$ est solution du problème d'après la question 2.
Il suffit (pour un physicien?) de vérifier que le terme général de la série vérifie l'équation de diffusion, ce qui est le cas.

7) $\Phi(l,t) = \iint_S \vec{j}_C.d\vec{S} = -D.\left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)_{x=l}.S$

d'où $\Phi(l,t) = \frac{D.S.C_0}{l}\left(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\cos(n\pi).\exp\left(-\frac{t}{\tau_n}\right)\right)$.

8) $N(t) = \int_0^t \Phi(l,t').dt' = \frac{D.S.C_0}{l}\left(t + 2\int_0^t \sum_{n=1}^{\infty}\cos(n\pi).\exp\left(-\frac{t'}{\tau_n}\right).dt'\right) =$

$\frac{D.S.C_0}{l}\left(t - 2\sum_{n=1}^{\infty}\cos(n\pi).\left[\tau_n.\exp\left(-\frac{t'}{\tau_n}\right)\right]_0^t\right)$

$= \frac{D.S.C_0}{l}\left(t - 2\sum_{n=1}^{\infty}\cos(n\pi).\frac{\tau_1}{n^2}\left(\exp-\frac{n^2 t}{\tau_1} - 1\right)\right)$.

9) Pour $t \gg \tau_1$, on a : $N(t) = \frac{D.S.C_0}{l}\left(t - 2\sum_{n=1}^{\infty}\cos(n\pi).\frac{\tau_1}{n^2}(-1)\right)$ avec $\cos(n\pi) = (-1)^n$,

soit $N(t) = \frac{D.S.C_0}{l}\left(t - 2\tau_1\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\right) = \frac{D.S.C_0}{l}\left(t - \frac{1}{6}\pi^2\tau_1\right)$.

La pente de la courbe permet d déterminer D ; l'instant t_0 pour lequel l'asymptote coupe l'axe des temps permet de déterminer τ_1 puis $D' = l^2 / \pi^2\tau_1$.

10) On mesure une pente de $DSC_0 / l = 0{,}002 / 40$ mol.jours^{-1} ;
on en déduit $D = 9{,}64.10^{-11}$ m^2.s^{-1}.

L'asymptote coupe l'axe des temps pour $t_0 = 20$ jours ; on en déduit $D' = 2{,}41.10^{-12}$ m^2.s^{-1}.

$D' = D / (1+K_S)$ donne $K_S = 39{,}0$.

11) En ordre de grandeur $x \approx \sqrt{D't}$, soit $t' = l^2 / D' = 10^{15}$ s $= 33.10^6$ ans.
En l'absence de sorption on remplace D' par D ; on obtient $t = 0{,}8.10^6$ ans.