

Étude thermique d'un bâtiment – Correction

Préambule

1. Modélisation de la pièce

1.a. Unité de capacité thermique volumique : $\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-3}$.

Capacité thermique de la pièce : $C = C_v \times \text{Volume} = C_v \times a \cdot b \cdot h$

$$C = 125 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1}.$$

1.b. On applique le 1^{er} principe à l'air de la pièce de volume constant pour une durée infinitésimale dt . La pièce est supposée ici parfaitement calorifugée et reçoit un transfert thermique du radiateur. La transformation étudiée est donc isochore, on a donc :

$$dU = \delta Q$$

avec :

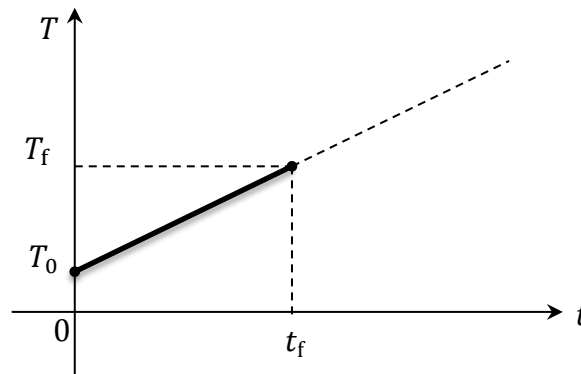
- $dU = CdT$;
- $\delta Q = Pdt$.

Finalement :

$$\frac{dT}{dt} = \frac{P}{C}.$$

1.c. La résolution immédiate de cette équation différentielle donne avec les conditions initiales $T(0) = T_0$:

$$T(t) = \frac{P}{C}t + T_0.$$



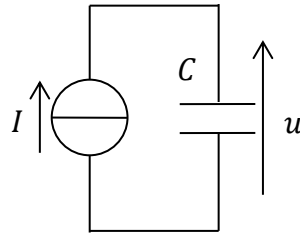
Le durée t_f pour atteindre T_f est alors :

$$t_f = \frac{T_f - T_0}{P} \times C = 625 \text{ s}$$

Remarques : cette durée est très courte car on a supposé l'absence de pertes thermiques à travers les murs. Elle est bien d'autant plus faible que la puissance du radiateur est élevée et d'autant plus grande que la capacité de la pièce est grande.

1.d. On peut envisager le modèle électrique comportant un condensateur (idéal) alimenté par une source (idéale) de courant : $I = C \frac{du}{dt} \Leftrightarrow \frac{du}{dt} = \frac{I}{C}$.

On obtient le schéma électrique :



On a alors les analogies suivantes :

| Électrocinétique | Thermique |
|------------------|------------|
| u | ΔT |
| i | P |
| C | C |

Remarque : On pourrait penser aussi au modèle comportant une bobine (idéale) alimentée par une source (idéale) de tension : $E = L \frac{di}{dt} \Leftrightarrow \frac{di}{dt} = \frac{E}{L}$. Compte tenu de l'analogie classique entre potentiel électrique et température (et compte tenu de la suite de l'énoncé), il semble que le modèle électrique avec le condensateur soit celui qui est attendu.

2. Influence des murs

2.a. Aire en contact avec la pièce $S_p = 2(a + b) \cdot h = 65 \text{ m}^2$.

2.b. On a un volume de béton approximativement égal à $V_b \approx S_p \times L = 9,75 \text{ m}^3$ (on néglige « l'épaisseur des murs » ce qui sous-entend sans doute que l'on néglige un terme en $4L^2h = 0,225 \text{ m}^3$) soit :

$$C_{\text{mur}} \approx \mu S_p L c = 21,5 \text{ MJ} \cdot \text{K}^{-1}$$

On constate que $\frac{C_{\text{mur}}}{C} \approx 200$. La capacité thermique des murs est donc prépondérante par rapport à celle de l'air de la pièce. Il est nécessaire de prendre cette capacité en compte pour évaluer la durée de montée en température de la pièce qui sera de fait beaucoup plus longue !

Remarque : la pièce va monter beaucoup plus lentement en température à cause des murs. Ce phénomène est plus marqué dans les maisons anciennes avec des murs très épais. Ces maisons gardent bien le frais l'été grâce à cela.

Première partie : équation de la chaleur

3. Généralités

3.a. Loi de Fourier $\vec{j} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T$. Le signe $-$ traduit le fait que le transfert thermique spontané s'effectue dans le sens inverse du gradient de température c'est-à-dire des températures élevées vers les plus faibles, conformément au 2^{ème} principe de la thermodynamique.

$j(x, t)$ est une puissance thermique *surfactive* dans la direction de de l'axe Ox .

La dimension de la conductivité thermique est :

$$[\lambda] = \left[\frac{\text{W} \cdot \text{m}^{-2}}{\text{K} \cdot \text{m}^{-1}} \right] = \frac{M \cdot L^2 \cdot T^{-3} \times L^{-2}}{\Theta \times L^{-1}}$$

Soit :

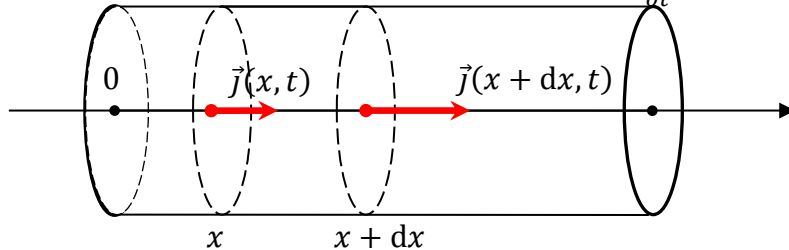
$$[\lambda] = M \cdot L \cdot T^{-3} \cdot \Theta^{-1}$$

Dans le système international, on a donc λ en $W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$ ou en $kg \cdot m \cdot s^{-3} \cdot K^{-1}$.

3.b. On effectue un bilan d'énergie pendant une durée dt sur une tranche de longueur dx , de section S repérée par son abscisse x . On note $H(t)$ l'enthalpie de cet élément de volume à l'instant t . Le *premier principe* pour une évolution isobare s'écrit :

$$H(t + dt) - H(t) = dH = \delta Q_{\text{entrant}} - \delta Q_{\text{sortant}}$$

Avec $dH = mcdT = \mu S dx c (T(x, t + dt) - T(x, t)) = \mu S dx c \times \frac{\partial T}{\partial t}(x, t) dt$



Le transfert thermique *entrant* à l'abscisse x pendant dt à travers une section S est :

$$\delta Q_{\text{entrant}} = \Phi_S(x, t) dt = \vec{j}_Q(x, t) \cdot S \vec{e}_x = S j(x, t) dt$$

Le transfert thermique *sortant* à l'abscisse $x + dx$ pendant dt est :

$$\delta Q_{\text{sortant}} = \Phi_S(x + dx, t) dt = S j_x(x + dx, t) dt$$

On a donc :

$$\delta Q_{\text{entrant}} - \delta Q_{\text{sortant}} = S j(x, t) dt - S j(x + dx, t) dt = -S \frac{\partial j}{\partial x}(x, t) dx dt$$

Finalement :

$$\begin{aligned} \mu S dx c \frac{\partial T}{\partial t} dt &= -S \frac{\partial j}{\partial x} dx dt \\ \mu c \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial x} &= 0 \end{aligned}$$

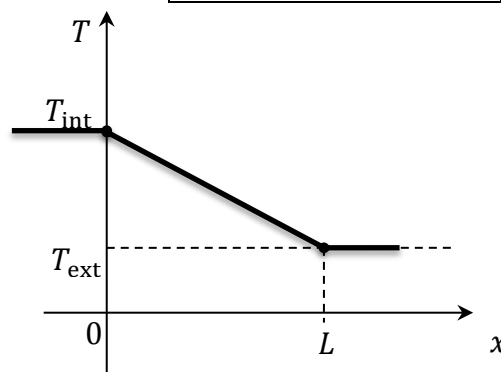
D'après la loi de Fourier, en projection sur l'axe Ox , $j = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}$ soit :

$$\boxed{\mu c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}}$$

4. Étude en régime stationnaire

4.a. En régime stationnaire toute grandeur G se rapportant au système étudié est indépendante du temps soit $\frac{\partial G}{\partial t} = 0$.

4.b. Ici on obtient $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{d^2 T}{dx^2} = 0$ soit après intégration et en utilisant les conditions aux limites ($T(0) = T_{\text{int}}$ et $T(L) = T_{\text{ext}}$) $T(x) = \frac{T_{\text{ext}} - T_{\text{int}}}{L} \cdot x + T_{\text{int}}$



4.c. On peut définir la température moyenne T_{moy} intuitivement par :

$$T_{\text{moy}} = \frac{T_{\text{int}} + T_{\text{ext}}}{2}$$

Plus précisément, on peut définir T_{moy} par $T_{\text{moy}} = \frac{1}{L} \int_0^L T(x) dx$. Cette définition redonne alors le résultat intuitif.

La loi $T(x)$ étant affine, on a $T(x_p) = T_{\text{moy}}$ avec $x_p = \frac{L}{2}$.

4.d. D'après la loi de Fourier, $j(x) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} = -\lambda \frac{T_{\text{ext}} - T_{\text{int}}}{L} \stackrel{\text{def}}{=} j_0$. Cette densité de flux thermique est indépendante de x et dirigé dans le sens Ox positif.

4.e. La puissance du radiateur doit compenser les pertes à travers les murs. Ces pertes sont égales à $j_0 S_{\text{mur}}$. On a donc :

$$P = j_0 S_p = \lambda \frac{T_{\text{int}} - T_{\text{ext}}}{L} 2(a + b) \cdot h = 6,5 \text{ kW}$$

Commentaire : le radiateur n'est pas assez « puissant ». Il faut isoler davantage la pièce (ou installer d'autres radiateurs !).

5. Résistance thermique

5.a. Loi d'Ohm locale : $\vec{j}_{\text{élec}} = \gamma \vec{E}$.

Tableau récapitulatif

| Diffusion | thermique | électrique |
|--|--|---|
| Loi | $\vec{j}_{\text{th}} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T$ | $\vec{j}_{\text{élec}} = -\gamma \overrightarrow{\text{grad}} V$ |
| Conductivité thermique | λ | γ |
| Grandeur intensive dont l'inhomogénéité est la cause du phénomène de transport | Température | Potentiel électrique |
| Débit de la grandeur transportée | Puissance thermique $\Phi_S = P = \iint_S \vec{j}_{\text{th}} \cdot d\vec{S}$ | Intensité de courant électrique $I = \iint_S \vec{j}_{\text{élec}} \cdot d\vec{S}$ |

5.b. $R_{\text{mur}} = \frac{\Delta T}{\Phi_S} = \frac{T_{\text{int}} - T_{\text{ext}}}{P_{\text{perdue}}} = \frac{T_{\text{int}} - T_{\text{ext}}}{j_0 S_p} = \frac{L}{\lambda S_p}$. La résistance thermique s'exprime en $\text{K} \cdot \text{W}^{-1}$.

Application numérique : $R_{\text{mur}} \approx 1,5 \cdot 10^{-3} \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$.

Deuxième partie : modélisation électrique

6. Circuit électrique

6.a. Le circuit équivalent contient deux capacités électriques auxquelles correspondent les 2 capacités thermiques du mur et de l'air de la pièce. La source de courant est l'équivalent de la puissance thermique délivrée par le radiateur lequel alimente directement l'air de la pièce. On a donc :

- $C_1 \leftrightarrow C$;
- $C_2 \leftrightarrow C_{\text{mur}}$;
- $i(t) \leftrightarrow P$.

La pièce étant à la température variable $T(t)$, la différence de potentiel $u_1(t)$ correspond à la différence de température entre la pièce et l'extérieur soit :

$$u_1(t) \leftrightarrow T(t) - T_{\text{ext}}$$

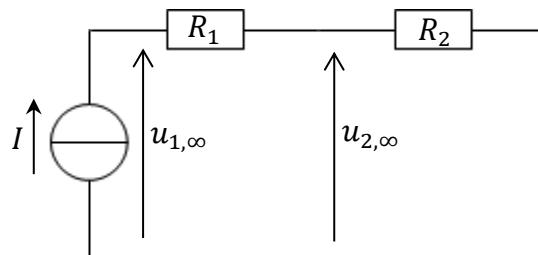
La seule résistance thermique à prendre en compte étant celle des murs, elle semble ici dissociée en 2 parties identiques correspondant à une épaisseur $\frac{L}{2}$ avec une température médiane du mur égale à T_{moy} . On a donc :

- $R_1 \leftrightarrow R_{\text{mur}}$;
- $R_2 \leftrightarrow R_{\text{mur}}$;
- $u_2(t) \leftrightarrow T_{\text{moy}} - T_{\text{ext}}$.

On a donc :

| Électrique | $i(t)$ | C_1 | C_2 | $u_1(t)$ | $u_2(t)$ | R_1 | R_2 |
|------------|--------|-------|------------------|-------------------------|-----------------------------------|---|---|
| Thermique | P | C | C_{mur} | $T(t) - T_{\text{ext}}$ | $T_{\text{moy}} - T_{\text{ext}}$ | Moitié intérieure du mur $\frac{R_{\text{mur}}}{2}$ | Moitié extérieure du mur $\frac{R_{\text{mur}}}{2}$ |

6.b. En régime continu, les condensateurs sont équivalents à des interrupteurs ouverts. On a donc le circuit suivant :



Le même courant parcourt les 2 résistances. On a donc :

$$u_{2,\infty} = R_2 I \leftrightarrow T_{\text{moy}} - T_{\text{ext}}$$

On peut aussi exprimer $u_{2,\infty}$ en fonction de $u_{1,\infty} \leftrightarrow T_{\text{int}} - T_{\text{ext}}$ à l'aide d'un pont diviseur de tension :

$$u_{2,\infty} = u_{1,\infty} \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

On a alors :

$$T_{\text{moy}} - T_{\text{ext}} = (T_{\text{int}} - T_{\text{ext}}) \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

D'après la question 4.c. on a :

$$T_{\text{moy}} - T_{\text{ext}} = \frac{T_{\text{int}} + T_{\text{ext}}}{2} - T_{\text{ext}} = \frac{T_{\text{int}} - T_{\text{ext}}}{2}$$

Soit $\frac{T_{\text{int}} - T_{\text{ext}}}{2} = (T_{\text{int}} - T_{\text{ext}}) \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}$ ce qui donne $\frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{1}{2}$ soit :

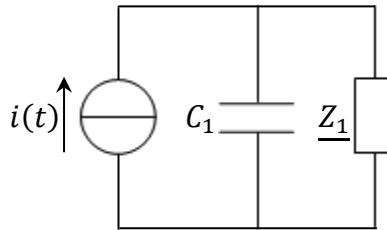
$$\boxed{R_1 = R_2 = \frac{R_{\text{mur}}}{2}}$$

7. Établissement de l'expression d'une impédance

7.a. $\underline{Z}_2 = \frac{R_2}{1 + jR_2 C_2 \omega}$.

$$7.b. \underline{Z}_1 = R_1 + \frac{R_2}{1+jR_2C_2\omega}$$

7.c. On a le schéma équivalent :



On a donc :

$$i_1(t) = u_1(t) \cdot \left(\frac{1}{\underline{Z}_1} + jC_1\omega \right)$$

7.d. On passe aux amplitudes complexes :

$$I_0 = \underline{U}_1 \cdot \left(\frac{1}{\underline{Z}_1} + jC_1\omega \right) \Leftrightarrow \underline{U}_1 = \frac{I_0}{\frac{1}{\underline{Z}_1} + jC_1\omega} = \frac{I_0}{\frac{1}{R_1 + \frac{R_2}{1+jR_2C_2\omega}} + jC_1\omega}$$

Il reste à « dérouler » les calculs...

$$\underline{U}_1 = \frac{I_0 \left(R_1 + \frac{R_2}{1+jR_2C_2\omega} \right)}{1 + jC_1\omega \left(R_1 + \frac{R_2}{1+jR_2C_2\omega} \right)}$$

$$\underline{U}_1 = \frac{I_0(R_1(1+jR_2C_2\omega) + R_2)}{1 + jR_2C_2\omega + jC_1\omega(R_1(1+jR_2C_2\omega) + R_2)}$$

$$\underline{U}_1 = \frac{I_0(R_1 + R_2 + jR_1R_2C_2\omega)}{1 + j(R_2C_2\omega + R_1C_1\omega + R_2C_1\omega) - R_1R_2C_1C_2\omega^2}$$

$$\underline{U}_1 = \frac{1 + j \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2} C_2\omega}{1 + j((R_1 + R_2)C_1 + R_2C_2)\omega - R_1R_2C_1C_2\omega^2} \cdot (R_1 + R_2)I_0$$

8. Exploitation

8.a. À basse fréquence on a $\omega \rightarrow 0$ et $\underline{U}_{10} = (R_1 + R_2)I_0$ ce qui est cohérent avec le schéma équivalent en régime continu. On a de même $T(t) - T_{\text{ext}} = R_{\text{mur}}I_0 \Leftrightarrow T(t) = T_{\text{int}}$. On retrouve bien le résultat attendu en thermique.

À haute fréquence, on a $\underline{U}_1 \rightarrow 0$ c'est-à-dire $T(t) = T_{\text{ext}} \dots$

Remarque : la notion de résistance thermique n'a de sens qu'en régime stationnaire. L'analogie avec l'électrocinétique n'est donc pas possible en régime variable. L'hypothèse d'une source de courant alternative implique en outre que la puissance thermique analogue du radiateur change de signe c'est-à-dire qu'il refroidisse autant qu'il réchauffe...

En moyenne celui-ci ne fournit pas de puissance à la pièce. Il est normal de trouver une température de la pièce égale à celle de l'extérieur !

8.b. Lorsque $C_2 \rightarrow 0$ on a :

$$\underline{U_1} \rightarrow \frac{R_1 + R_2}{1 + j((R_1 + R_2)C_1)\omega} \cdot I_0$$

Sur le plan électrocinétique, tout se passe comme si le condensateur C_2 était un interrupteur ouvert. On a alors une capacité C_1 en parallèle avec une résistance $R_1 + R_2$. Sur le plan thermique... l'analogie n'est possible que pour $\omega = 0$ soit $\underline{U_1} = (R_1 + R_2)I_0$. On retrouve le cas précédent.

Lorsque $C_2 \rightarrow +\infty$ on a :

$$\underline{U_1} \rightarrow \frac{R_1}{1 + jR_1C_1\omega} \cdot I_0$$

Sur le plan électrocinétique, tout se passe comme si le condensateur C_2 était un interrupteur fermé court-circuitant R_2 . On a alors une capacité C_1 en parallèle avec une résistance R_1 .

Sur le plan thermique... l'analogie n'est possible que pour $\omega = 0$. On trouve alors $\underline{U_1} = R_1 I_0$... ???

On peut aussi remarquer que la tension u_2 est nulle dans ce cas. Cela donnerait alors $T_{\text{moy}} = T_{\text{ext}} \Leftrightarrow T_{\text{int}} = T_{\text{ext}}$... ??

8.c. La fonction de transfert est :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1 + j \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C_2 \omega}{1 + j((R_1 + R_2)C_1 + R_2 C_2)\omega - R_1 R_2 C_1 C_2 \omega^2}$$

Il s'agit d'un filtre passe-bas. En effet, on a :

- $\omega \rightarrow 0, \underline{H}(j\omega) \rightarrow 1$;
- $\omega \rightarrow +\infty, \underline{H}(j\omega) \rightarrow 0$.

8.d. Avec ces hypothèses la fonction de transfert devient :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1 + \frac{jR}{4} \alpha C \omega}{1 + j \left(RC + \frac{R}{2} \alpha C \right) \omega - \frac{R^2}{4} \alpha C^2 \omega^2}$$

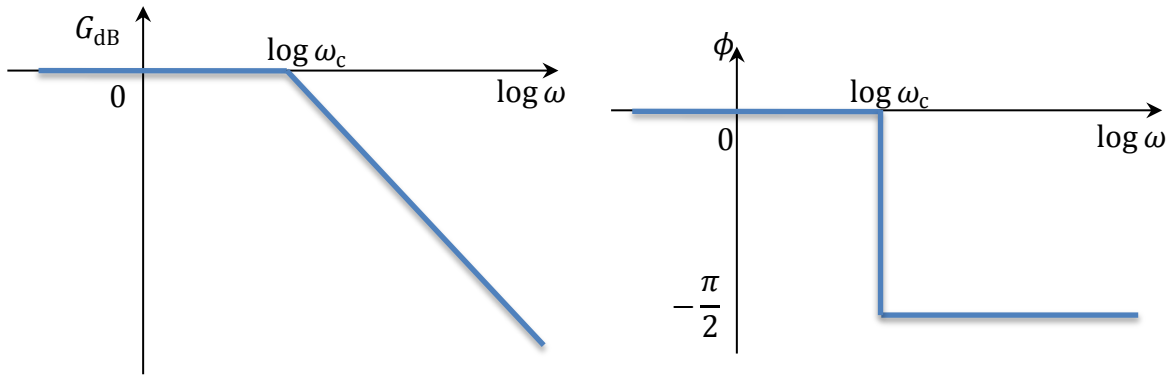
$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1 + \frac{j\alpha}{4} RC \omega}{1 + jRC \left(1 + \frac{\alpha}{2} \right) \omega - \frac{\alpha}{4} (RC\omega)^2}$$

9. Diagramme de Bode

9.a. À basse fréquence $\underline{H}(j\omega) \sim 1$ donc $G_{\text{dB}}(\omega) = 0$ et $\phi(\omega) = 0$.

À haute fréquence $\underline{H}(j\omega) \sim \frac{\frac{j\alpha}{4} RC \omega}{-\frac{\alpha}{4} (RC\omega)^2} = \frac{1}{jRC\omega}$ donc $G_{\text{dB}}(\omega) = -20 \log(RC\omega)$ et $\phi(\omega) = -\frac{\pi}{2}$.

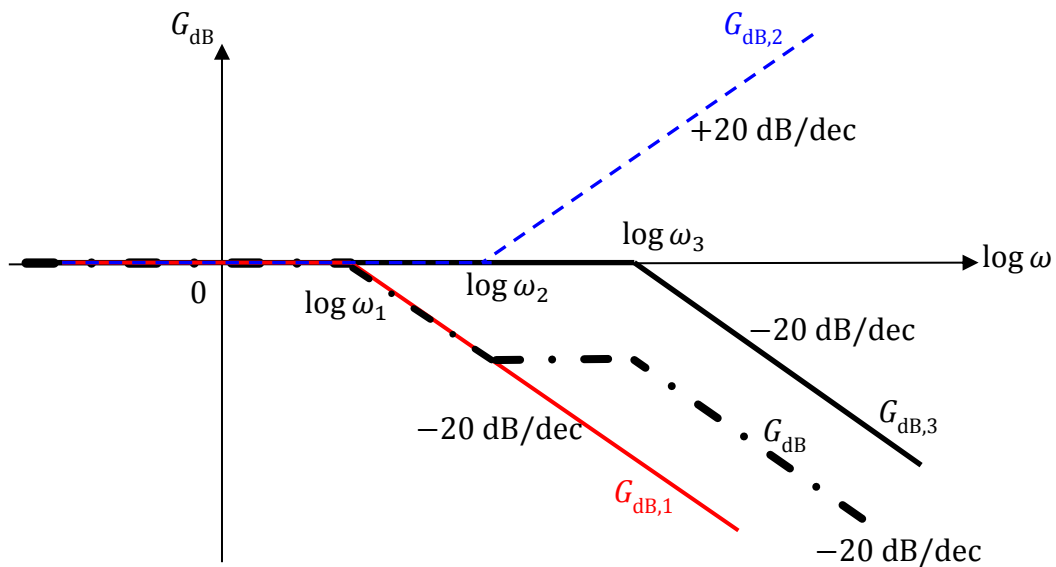
L'intersection se situe en $\omega_c = \frac{1}{RC}$.



9.b. Le dénominateur de $\underline{H}(j\omega)$ étant un polynôme complexe du 2nd degré en $j\omega$, on peut le mettre sous la forme d'un produit de deux polynômes du 1^{er} degré. On obtient avec $\omega_2 = \frac{4}{\alpha RC}$:

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1 + \frac{j\omega}{\omega_2}}{\left(1 + \frac{j\omega}{\omega_1}\right) \left(1 + \frac{j\omega}{\omega_3}\right)}$$

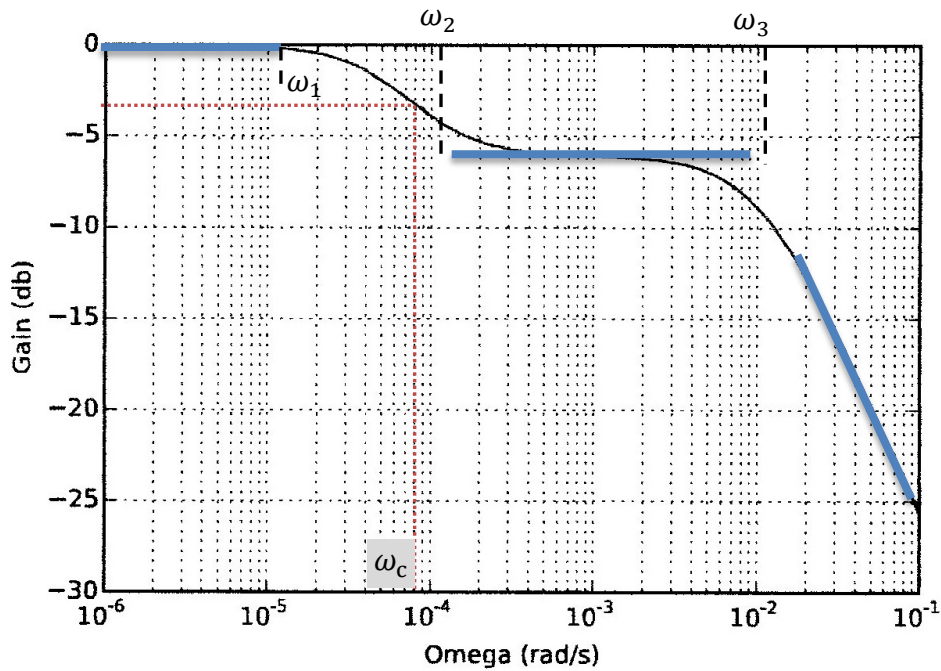
Le tracé du gain en dB associé peut se faire par décomposition en fonctions de transfert du premier ordre selon le schéma ci-dessous avec des notations explicites :



Le gain en dB total (en points-traités-points) est alors la somme des différents gains :

$$G_{dB} = G_{dB,1} + G_{dB,2} + G_{dB,3}$$

On obtient alors :



Compte tenu de la valeur de $\alpha = 200$ on a pour $\omega_2 \ll \omega \ll \omega_3$ un équivalent de la fonction de transfert :

$$\underline{H}(j\omega) \sim \frac{\frac{j\alpha}{4} RC \omega}{jRC \left(1 + \frac{\alpha}{2}\right) \omega} \approx \frac{\frac{j\alpha}{4} RC \omega}{jRC \left(\frac{\alpha}{2}\right) \omega} = \frac{1}{2}$$

Le gain en dB équivalent est donc bien de $-20 \log 2 \approx -6$ dB.

9.c. Voir réponse à la question précédente.

9.d. Par lecture graphique pour un gain de -3 dB on obtient $\omega_c \approx 8 \cdot 10^{-5} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$. La durée du régime transitoire est alors $\tau = \frac{1}{\omega_c} \approx 12500 \text{ s} \approx 3\text{h } 30\text{min}$.

Troisième partie : isolation

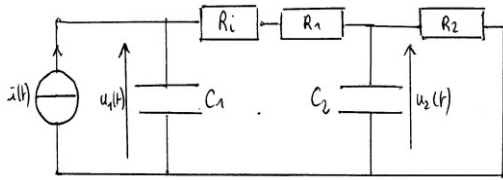
10. Importance de l'isolation

10.a. La résistance thermique de l'isolant supplémentaire est donnée par :

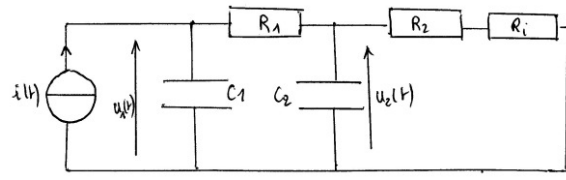
$$R_i = \frac{e}{\lambda_i S_p} = \frac{e}{\lambda_i \cdot 2(a+b)h} \approx 0,015 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$$

Pour R_{mur} on avait trouvé $1,5 \cdot 10^{-3} \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$ c'est-à-dire une valeur 10 fois inférieure. On a bien $R_i = \beta R_{\text{mur}}$ avec $\beta = 10$.

10.b. Il n'est pas précisé de capacité thermique pour l'isolant. On négligera donc celle-ci. La résistance thermique de l'isolant est mis en série avec celle du mur, soit à l'intérieur soit à l'extérieur :



Isolation par l'intérieur



Isolation par l'extérieur

10.c. Pour maintenir une pièce à 20°C, on se place en régime stationnaire dans lequel les condensateurs sont équivalents à des interrupteurs ouverts. On a donc :

$$P_{\min} = \frac{\Delta T}{R_{\text{tot}}} = \frac{T_{\text{int}} - T_{\text{ext}}}{R_{\text{mur}} + R_i} \approx \frac{10}{0,016} \approx 600 \text{ W}$$

11. Isolation intérieure ou extérieure

11.a. On choisit l'isolation par l'intérieur.

11.b. En régime permanent (= stationnaire), les condensateurs sont équivalents à des interrupteurs ouverts et en appliquant la loi d'Ohm on obtient

$$U_{10} = (R_i + R_{\text{mur}})I_0 = R(1 + \beta)I_0$$

$$U_{20} = \frac{R}{2}I_0$$

11.c. La nouvelle expression de la fonction de transfert est obtenue à partir de celle de la question 8.c. en remplaçant R_1 par $R_1 + R_i$ avec $R_1 = \frac{R}{2}$ et $R_i = \beta R$ soit $R_1 \rightarrow \frac{R}{2} + \beta R$. Après calculs on obtient :

$$H_{\text{int}}(j\omega) = \frac{1 + jRC\omega \cdot \alpha \frac{1 + 2\beta}{4(1 + \beta)}}{1 + j\left(1 + \frac{\alpha}{2} + \beta\right)RC\omega - \frac{\alpha}{2}\left(\frac{1}{2} + \beta\right)(RC\omega)^2}$$

Remarque :

Dans le cas d'une isolation par l'extérieur on doit remplacer R_2 par $R_2 + R_i$ soit $R_2 \rightarrow \frac{R}{2} + \beta R$. On obtient alors après calculs :

$$H_{\text{ext}}(j\omega) = \frac{1 + jRC\omega \cdot \alpha \frac{1 + 2\beta}{4(1 + \beta)}}{1 + j\left((1 + \beta) + \alpha\left(\frac{1}{2} + \beta\right)\right)RC\omega - \frac{\alpha}{2}\left(\frac{1}{2} + \beta\right)(RC\omega)^2}$$

11.d. On peut essayer de répondre à cette question en évaluant l'équivalent du gain pour des pulsations intermédiaires comme cela a été fait à la question 9.b. sachant que l'on a $\alpha = 200$ et $\beta = 10$. On cherche alors à retrouver la hauteur du « plateau » intermédiaire dans le diagramme de Bode pour distinguer les 2 types d'isolations.

On a alors $\omega_2 \ll \omega \ll \omega_3$:

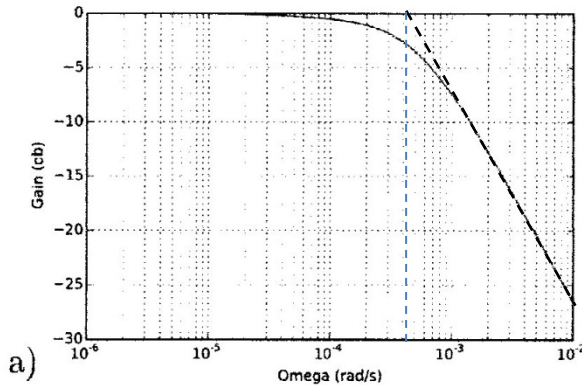
$$H_{\text{int}}(j\omega) \sim \frac{\alpha \frac{1 + 2\beta}{4(1 + \beta)}}{\left(1 + \frac{\alpha}{2} + \beta\right)} \approx \frac{\alpha \frac{2\beta}{4\beta}}{\frac{\alpha}{2}} = \frac{\alpha}{\frac{\alpha}{2}} = 1$$

On obtient donc un « plateau » vers $G_{dB} \approx 0$ ce qui conduit en fait à l'absence de plateau ! La figure 11.a semble correspondre à l'isolation par l'intérieur.

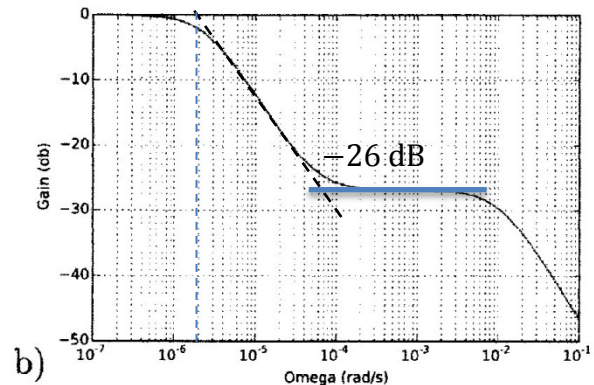
Par ailleurs pour le cas d'une isolation par l'extérieur :

$$\underline{H}_{ext}(j\omega) \sim \frac{\alpha \frac{1+2\beta}{4(1+\beta)}}{(1+\beta) + \alpha \left(\frac{1}{2} + \beta\right)} \approx \frac{\alpha}{\alpha\beta} = \frac{1}{2\beta} = \frac{1}{20}$$

On obtient ici un « plateau » vers $G_{dB} \approx -20 \log 20 \approx -26$ dB ce qui correspond à l'ordre de grandeur que l'on observe sur la figure 11.b qui correspondrait à l'isolation par l'extérieur.



Isolation par l'intérieur



Isolation par l'extérieur

On peut alors évaluer les pulsations de coupure :

- pour l'isolation par l'intérieur $\omega_{int} \approx 4 \cdot 10^{-4} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \Leftrightarrow \tau_{int} \approx 2500 \text{ s}$;
- pour l'isolation par l'extérieur $\omega_{ext} \approx 2 \cdot 10^{-6} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \Leftrightarrow \tau_{ext} \approx 50\,000 \text{ s}$.

Commentaires :

Par rapport au cas sans isolation, l'isolation par l'intérieur diminue le temps caractéristique ce qui signifie que ce type d'isolation permet de réchauffer rapidement une maison. Par contre, la maison sera sensible aux variations de température (jour/nuit ou d'un changement de temps ou été/hiver). C'est bien pour une maison qui n'est pas toujours habitée ou quand l'isolation par l'extérieur n'est pas possible

Dans le cas de l'isolation par l'extérieur, le temps caractéristique du régime transitoire est plus grand ($\tau_{ext} \gg \tau_{int}$). Cela peut s'expliquer par le fait qu'il y a plus d'inertie thermique due au mur maintenu à une température proche de la température intérieure. L'isolation par l'extérieur apporte donc du confort car il y a de faibles variations de la température à l'intérieur de la maison lorsque la température extérieure change. Par contre lorsqu'il faut chauffer pour « rattraper » une différence de température importante, le processus est plus long.

Quatrième partie : prise en compte des échanges à la surface

12.

12.a. h s'exprime en $\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$.

12.b. Flux « sortant » donc positif si $T(L) > T_{ext}$: $\Phi = hS(T(L) - T_{ext})$.

12.c. On peut associer une résistance thermique à ce flux conducto-convectif :

$$R_e = \frac{\Delta T}{\Phi} = \frac{1}{hS} \approx 1,5 \cdot 10^{-3} \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$$

On a $R_e \approx R_{\text{mur}} = \frac{R_i}{10}$.

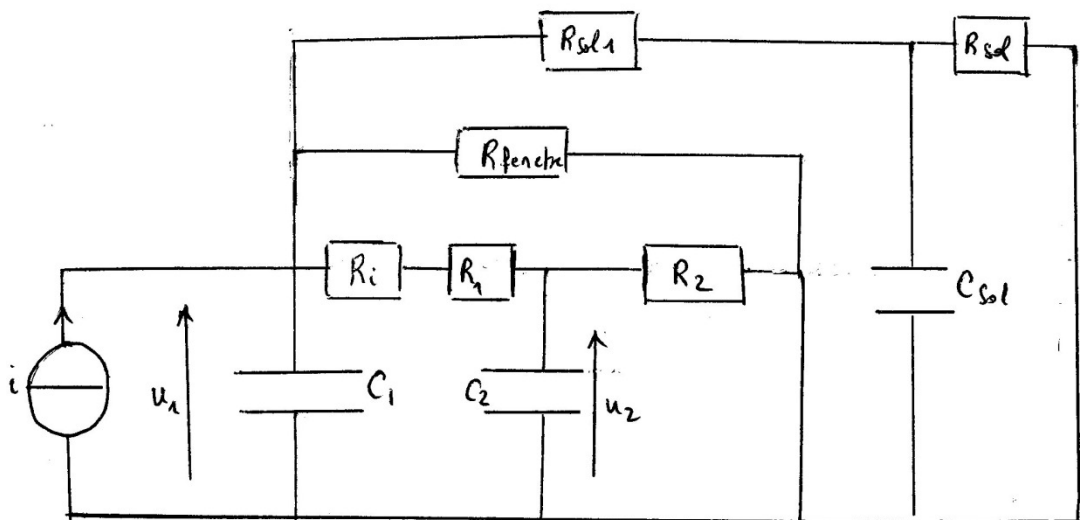
12.d. R_e augmente légèrement l'isolation de la maison. On peut évaluer la nouvelle puissance à délivrer :

$$P = \frac{\Delta T}{R_e + R_{\text{mur}} + R_i} \approx 550 \text{ W}$$

Le radiateur prévu semble suffisant dans le cadre de ce modèle...

12.e. Le sol ajoute de l'inertie thermique (capacité thermique C_{sol}). Il crée aussi des « ponts thermiques » (cf. photo figure 1 de l'énoncé au niveau du sol du premier étage) que l'on peut modéliser par une résistance thermique en parallèle du mur.

La fenêtre modifie la résistance thermique des murs car elle diminue la surface du mur en lui-même, mais ajoute une résistance thermique en parallèle du mur.



12.f. Nous avons négligé :

- le rayonnement thermique ;
- les ponts thermiques au niveau des étages ;
- la présence d'une éventuelle ventilation (VMC).