

DS de Physique 29 novembre 2023
PSI - Lycée du Parc des Loges – Durée 4H

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Le sujet comporte deux parties totalement indépendantes.

Première partie – Formation de calcaire à la surface d'un thermoplongeur de chauffe-eau (durée conseillée 1H30)

Données

Formule de Taylor à l'ordre 1 : $f(r + dr) = f(r) + \frac{df(r)}{dr} dr$

Expression du gradient en coordonnées cylindriques pour un champ scalaire V ne dépendant que de r : $\vec{\text{grad}} V(r) = \frac{dV(r)}{dr} \vec{u}_r$

Pour chauffer l'eau de la cuve, le chauffe-eau électrique est muni d'un thermoplongeur constitué d'un fil résistif parcouru par un courant électrique qui s'échauffe par effet Joule. Ce fil est recouvert d'un isolant et le tout est placé dans un tube blindé. On assimile ce thermoplongeur à un tube d'acier de longueur L , de rayon r_0 et dont la température de surface est maintenue à T_1 (figure 8).

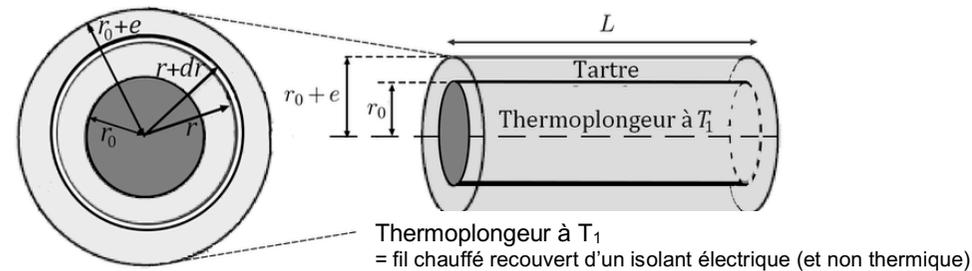


Figure 8 - Schéma du thermoplongeur recouvert de tartre

Ce tube, en contact direct avec l'eau du chauffe-eau, est sensible au tartre (dépôt de calcaire) qui entrave la diffusion de la chaleur. On suppose qu'une couche cylindrique de tartre d'épaisseur e et de conductivité thermique λ se dépose sur le tube.

On considère que le champ de température et le vecteur densité de flux thermique ne dépendent que de la distance r à l'axe. On note ainsi $T(r)$ le champ de température dans le cylindre de tartre auquel on associe un transfert thermique radial de vecteur densité de flux thermique $\vec{j} = j(r)\vec{u}_r$, \vec{u}_r désignant un vecteur unitaire dirigé selon un des rayons du tube et perpendiculaire à l'axe du tube.

Dans le cadre de cette étude, on se place en régime permanent, l'évolution temporelle de la température de l'eau T_e étant supposée lente.

On se place suffisamment loin des extrémités du tube pour pouvoir négliger les effets de bord. On néglige tout phénomène de rayonnement ; on se limite aux échanges conducto-convectifs entre la paroi du tube recouverte de tartre et l'eau. On désigne le coefficient d'échange à la paroi par la constante h et on note T_p la température de la paroi.

Q47. Définir le flux thermique ϕ à travers une surface S . Préciser son unité.

Q48. À l'aide d'un bilan d'énergie portant sur le cylindre infinitésimal de tartre de rayon interne r et de rayon externe $r + dr$ tel que $r_0 < r < r_0 + e$ (**figure 8**), montrer que la composante radiale du vecteur densité de flux thermique $j(r)$ satisfait l'équation différentielle :

$$\frac{d}{dr}(rj(r)) = 0. \quad \text{Rappel : régime permanent}$$

Q49. Énoncer la loi de Fourier.

Q50. Montrer que le champ de température $T(r)$ dans le tartre peut se mettre sous la forme :

$$T(r) = A \ln(r) + B$$

avec A et B deux constantes d'intégration. On déterminera seulement l'expression de A en fonction de T_1 , T_p , r_0 et e .

Q51. Exprimer la composante radiale du vecteur densité de flux thermique $j(r)$ en fonction de λ , A et r .

Q52. En déduire l'expression du flux thermique ϕ en fonction de λ , A et L.

Q53. Définir la résistance thermique R_t du cylindre de tartre et en déduire son expression en fonction de T_1 , T_p , λ , A et L.

À la frontière entre le tartre et l'eau, la convection de l'eau est limitée par les frottements sur la paroi de tartre. Le transfert thermique à travers la paroi est donné par la loi de Newton :

$$\Phi_{t \rightarrow e} = 2\pi(r_0 + e)Lh(T_p - T_e).$$

Q54. Déterminer l'expression de la résistance thermique R_{cc} résultant du transfert conducto-convectif entre la paroi de tartre et l'eau en fonction de r_0 , e , h et L.

Q55. À l'aide d'un schéma électrique équivalent, montrer que le transfert thermique entre la paroi interne du tartre à la température T_1 et l'eau à la température T_e est représenté par une résistance équivalente R_{eq} dont on précisera l'expression en fonction de R_t et R_{cc} .

Donner aussi l'expression générale de R_{eq} en fonction de T_1 , T_e et du flux.

Q55. bis Expliciter alors l'expression de R_{eq} en fonction de λ , h , L, e , r_0 .

Dans le cas du tartre, $h = 100 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$ et $\lambda = 0,9 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$. L'évolution de la résistance thermique équivalente R_{eq} en fonction de l'épaisseur e de tartre est représentée sur la **figure 9**.

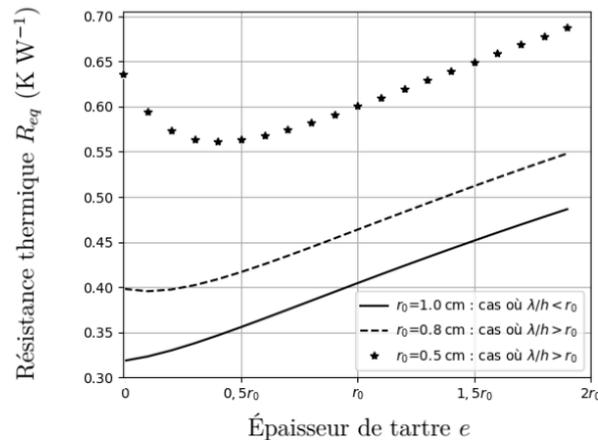


Figure 9 - Évolution de la résistance thermique équivalente en fonction de l'épaisseur de tartre pour une longueur arbitraire du thermoplongeur $L = 50 \text{ cm}$

Q56. On note e_{\min} l'épaisseur minimale à partir de laquelle le tartre augmente l'isolation thermique (par rapport à la situation sans tartre). Déterminer approximativement les 3 valeurs de e_{\min} , exprimées en fonction de r_0 correspondant aux 3 cas différents présentés sur la figure 9. Rendre avec votre copie votre exploitation de la fig 9, fournie en annexe.

Les constructeurs de chauffe-eau indiquent qu'un chauffe-eau entartré aura plus de risques de surchauffe et demandera plus d'énergie pour fonctionner.

Q57. En régime permanent, on souhaite maintenir la température de l'eau à T_e tout en imposant un flux thermique fixé par l'intermédiaire de la résistance chauffante. Comment évoluera la température de surface T_1 du thermoplongeur lorsque l'épaisseur de tartre devient supérieure à e_{\min} ?

Optimisation du dimensionnement du rayon r_0

Faut-il utiliser un rayon r_0 de thermoplongeur faible ou élevé devant λ/h pour limiter les risques de surchauffe ?

Q57. Bis Déterminer les variations de R_{eq} en fonction de e . Confirmez-vous votre réponse précédente ? Déterminer la valeur du rayon r_0 limite permettant de réduire la surchauffe. Peut-on choisir r_0 aussi faible que possible ?

Le **tableau 2** précise les conductivités thermiques, les masses volumiques et les capacités thermiques massiques de l'acier et du calcaire (tartre).

Données	Conductivité thermique	Masse volumique	Capacité thermique massique
Acier	$15 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$	$8\,000 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$	$500 \text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$
Tartre	$0,9 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$	$2\,500 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$	$900 \text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$

Tableau 2 - Données relatives à l'acier et au calcaire

On rappelle l'équation de diffusion de la chaleur :

$$D \Delta T = \frac{\partial T}{\partial t}$$

où $\Delta T = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right)$ désigne le laplacien en coordonnées cylindriques pour le champ de température $T(r)$, $D = \frac{\lambda}{\mu c}$ la diffusivité thermique du milieu, λ sa conductivité thermique, μ sa masse volumique et c sa capacité thermique massique.

Q58. Montrer que la dimension de la diffusivité thermique du milieu D est une longueur au carré par unité de temps.

Q59. On note τ_a la durée d'établissement du régime permanent au sein du thermoplongeur assimilé à une tige d'acier de rayon $r_0 = 1 \text{ cm}$ et τ_t la durée d'établissement du régime permanent au sein d'un dépôt de tartre d'épaisseur $e \approx r_0$. Déterminer l'ordre de grandeur du rapport $\frac{\tau_a}{\tau_t}$.

Q60. Commenter les recommandations des constructeurs. au sujet de la consommation d'énergie

Deuxième partie – Conduction électrique et effet Hall (durée conseillée 1H30)

La découverte de l'effet Hall quantique en 1980 a bouleversé la physique de la matière condensée. Les retombées de ces découvertes sont énormes, allant de l'étalon standard de résistance électrique au développement de nouveaux concepts en physique.

Constantes physiques

Vitesse de la lumière : $c = 3,0 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

Charge élémentaire : $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$

Masse d'un électron : $m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$

Permittivité du vide : $\epsilon_0 = 8,8 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$

Perméabilité du vide : $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$

Constante de Planck : $h = 6,6 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$

Constante de Planck réduite : $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,1 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$

Nombre d'Avogadro : $\mathcal{N}_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$

Constante de Boltzmann : $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$

I.1 - Mécanisme de la conduction électrique

On considère une plaque conductrice parallélépipédique de largeur a , d'épaisseur b et de longueur L traversée par un courant d'intensité $I > 0$ uniformément réparti sur sa surface $S = a \times b$ (figure 7).

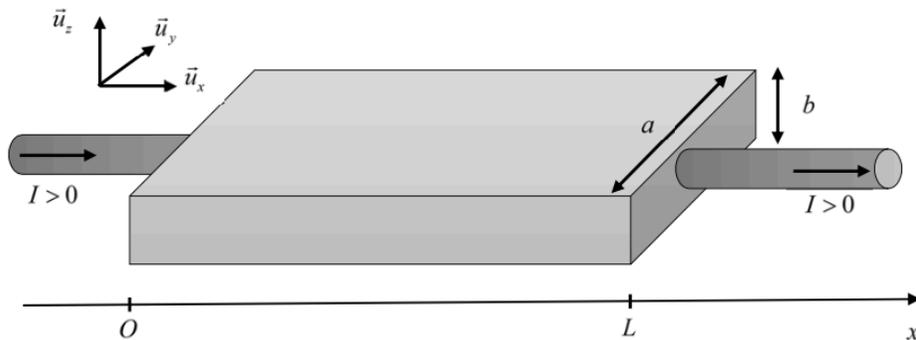


Figure 7 - Plaque conductrice

La plaque constitue un milieu homogène isotrope de conductivité γ , comprenant entre autres des électrons mobiles de densité volumique n_v . On exclut l'influence de tout autre type de porteurs de charge participant à la conduction.

Ces électrons de masse m et de charge $-e$ sont tous supposés se déplacer à la même vitesse $\vec{v} = -v\vec{u}_x$.

Ces électrons, supposés non relativistes, sont soumis à l'action d'un champ électrique $\vec{E} = E_0\vec{u}_x$ responsable de leur mise en mouvement.

On modélise les interactions des électrons mobiles avec le milieu lors de leur déplacement par une force de frottement fluide $\vec{F}_f = -\alpha\vec{v}$, avec α un coefficient caractéristique du milieu.

On négligera le poids des particules devant les autres forces.

Q16. Que signifie l'expression " non relativiste " pour les électrons ?

Q17. Exprimer le vecteur densité volumique de charges \vec{j} en fonction de n_v , e et \vec{v} , puis montrer que l'intensité du courant s'écrit :

$$I = n_v e v a b.$$

Q18. Montrer que l'équation différentielle vérifiée par la vitesse \vec{v} d'un électron s'écrit :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\vec{v}}{\tau} = -\frac{e}{m} \vec{E}$$

où on donnera l'expression de τ . Quelle est la signification physique de τ ?

Q19. En déduire l'équation différentielle reliant le vecteur densité de courant \vec{j} et le champ électrique \vec{E} .

Q20. Montrer qu'en régime stationnaire, on obtient la loi $\vec{j} = \gamma \vec{E}$, où l'on donnera l'expression de γ en fonction de τ , m , e et n_v . Quel nom porte cette loi ?

Q21. Application numérique.

- à l'aide du **document 3**, calculer la valeur de τ en montrant au préalable que chaque atome d'aluminium possède 3 électrons de valence jouant le rôle d'électrons de conduction, en déterminant le nombre d'entités par maille et l'expression du paramètre de maille a en fonction de r_{Al} : $a = \frac{4r_{Al}}{\sqrt{2}}$
- conclure quand au domaine de fréquence sur lequel la loi d'Ohm locale reste valable

Document 3 - L'aluminium

Symbole : Al

Numéro atomique : $Z = 13$

Masse molaire : $M_{Al} = 27 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$

Système cristallin : cubique face centrée

Rayon atomique : $r_{Al} = 125 \text{ pm}$

Conductivité électrique : $\gamma = 37,7 \cdot 10^6 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$



Source : Handbook of Chemistry and Physics

Q22. Rappeler l'équation de conservation de la charge reliant la densité volumique de charge ρ au vecteur densité volumique de courant \vec{j} .

I.2 - L'effet Hall

L'effet Hall repose sur le fait qu'une particule chargée en mouvement dans un champ magnétique subit la force dite de Lorentz.

Document 4 - Effet Hall classique

En 1879, Edwin Hall découvre que lorsqu'un courant électrique I traverse un barreau conducteur plongé dans un champ magnétique \vec{B} , il apparaît une différence de potentiel, appelée tension Hall et notée U_H , dans la direction perpendiculaire au courant et au champ (figure 8). Son origine est la force que le champ magnétique exerce sur les porteurs de charge qui participent au courant (force de Lorentz).

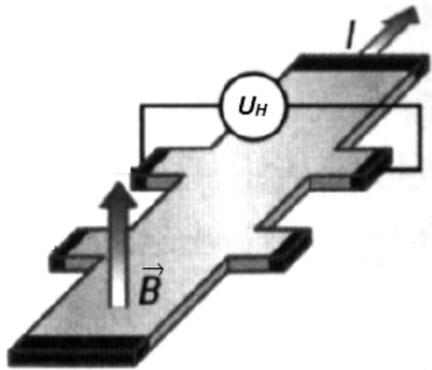


Figure 8 - Mesure de la tension de Hall

Dans les conducteurs usuels, U_H vérifie alors la relation : $U_H = R_H I$ avec R_H la résistance Hall.

De plus, la résistance Hall R_H est proportionnelle à la norme du champ \vec{B} et à l'inverse du nombre n_v de porteurs de charge par unité de volume. L'effet Hall fournit donc un moyen de mesure du nombre de porteurs de charges, utilisé en particulier pour caractériser les matériaux semiconducteurs. Il est aussi à la base du fonctionnement des dispositifs les plus couramment utilisés pour la mesure des champs magnétiques.

Source : Gilbert Pietryk, *Panorama de la Physique*, 2007

I.2.a - Aspect qualitatif

On soumet désormais la plaque à un champ magnétique extérieur $\vec{B} = B\vec{u}_z$ uniforme et stationnaire (figure 9). On négligera le champ magnétique créé par le passage du courant dans le milieu.

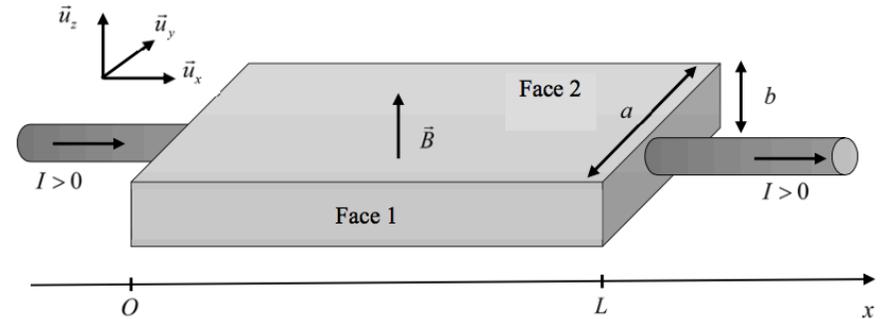


Figure 9 - Plaque conductrice en présence de champ magnétique

Sous l'effet de ce champ magnétique, il y a une accumulation d'électrons mobiles sur une face et, par conséquent, un défaut d'électrons sur l'autre face.

On rappelle ici l'expression de la composante magnétique F_m de la force de Lorentz, s'exerçant sur une particule de charge q se déplaçant à la vitesse \vec{v} et plongée dans un champ magnétique \vec{B} :

$$\vec{F}_m = q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

Q26. Calculer la puissance de cette force et commenter le résultat obtenu.

Q27. Reproduire le schéma de la figure 10 et y représenter les symboles \oplus et \ominus indiquant l'accumulation de charges positives et négatives sur les faces.

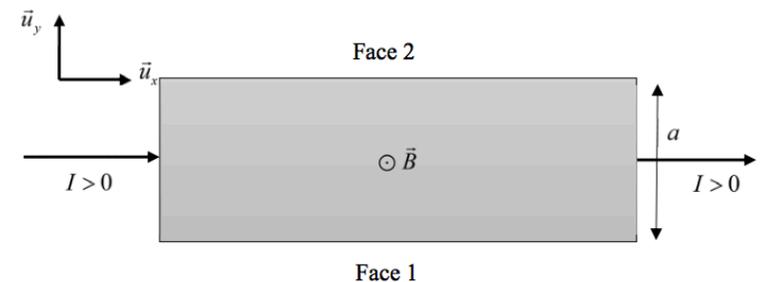


Figure 10 - Plaque conductrice vue du dessus

Q28. Justifier alors l'apparition d'un champ électrique orthogonal aux lignes de courant I . Dessiner sur le schéma précédent l'allure des lignes de champ électrique correspondantes.

I.2.b - Modélisation

Ce déséquilibre de charges dû à la présence du champ magnétique impose, en plus du courant longitudinal selon \vec{u}_x , un courant transversal selon \vec{u}_y . Le champ électrique et le vecteur densité volumique de courant comportent alors une composante selon \vec{u}_x et une selon \vec{u}_y .

On note désormais :

$$\begin{aligned} - \vec{E} &= E_x \vec{u}_x + E_y \vec{u}_y \\ - \vec{j} &= j_x \vec{u}_x + j_y \vec{u}_y. \end{aligned}$$

On suppose que les interactions des électrons mobiles avec le milieu sont toujours modélisées par une force $\vec{F}_f = -\alpha \vec{v}$ et que le champ magnétique s'écrit toujours $\vec{B} = B \vec{u}_z$.

Q29. Déterminer la nouvelle équation différentielle vérifiée par la vitesse \vec{v} d'un électron.

Q30. Montrer que le vecteur densité volumique de courant \vec{j} vérifie l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d\vec{j}}{dt} + \frac{\vec{j}}{\tau} - \vec{\omega}_c \wedge \vec{j} = \frac{\gamma}{\tau} \vec{E}$$

où l'on donnera l'expression de la pulsation ω_c en fonction de e , m et B .

Q31. Donner une signification physique à ω_c par analogie au mouvement d'un électron mobile soumis à la seule force magnétique.

Q32. Montrer qu'en régime permanent les composantes du champ électrique sont données par l'écriture matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_{xx} & \rho_{xy} \\ \rho_{yx} & \rho_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_x \\ j_y \end{bmatrix}$$

pour laquelle on donnera les expressions des ρ_{ij} en fonction notamment de τ , ω_c et γ .

Quelle est l'unité des coefficients ρ_{ij} ?

Q33. On suppose que la largeur de la plaque a est suffisamment faible pour que les lignes de courant restent parallèles à la direction Ox ($j_y = 0$). Déterminer l'expression du champ transversal E_y , puis montrer que la résistance Hall décrite dans le **document 4** s'écrit :

$$R_H = \frac{B}{n_y e b}.$$

Q34. Justifier les utilités d'une sonde à effet Hall décrites dans le **document 4**.

Q35. Application numérique

Déterminer quelle serait la valeur de U_H pour mesurer un champ magnétique de l'ordre du tesla avec une plaque en aluminium ($n_v = 2,7 \cdot 10^{29} \text{ m}^{-3}$) d'épaisseur $b = 0,1 \text{ mm}$ parcourue par un courant $I = 1,0 \text{ A}$. Commenter la valeur obtenue.

Q36. Les matériaux semi-conducteurs sont des matériaux dont la densité de porteur de charges est entre autres donnée par la loi :

$$n_v = n_0 \exp\left(-\frac{\xi}{k_B T}\right)$$

avec $n_0 = 7,8 \cdot 10^{24} \text{ m}^{-3}$ et $\xi = 172 \text{ meV}$ pour un matériau à base de silicium par exemple.

Expliquer l'intérêt des semi-conducteurs pour des sondes à effet Hall permettant la mesure de champ magnétique.

Q37. Calculer la variation relative de la résistance Hall $\frac{\Delta R_H}{R_H}$ pour la sonde précédente à base du semi-conducteur lorsque la température varie de 10 K autour de la température ambiante. Quel inconvénient possède alors ce type de sonde ?

Troisième partie – Purification du nickel (durée conseillée 1H)

Données de la sous-partie IX-B

On supposera toujours les enthalpies standard et les entropies standard de réaction indépendantes de la température dans des domaines entre deux changements d'état successifs.

Le tétracarbonyle de nickel $\text{Ni}(\text{CO})_4$ est caractérisé par une température d'ébullition $T_{\text{vap}} = 316\text{K}$ sous 1 bar et une enthalpie standard de vaporisation égale à $\Delta_{\text{vap}}H^0 = 30\text{kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$.

Espèces chimiques	Ni(s)	CO(g)	$\text{Ni}(\text{CO})_4(\text{l})$
$\Delta_f H_{298}^0$ (kJ·mol ⁻¹)		-111	-632
S_{298}^0 (J·K ⁻¹ ·mol ⁻¹)	30	198	320

Le nickel est le cinquième élément le plus important de la Terre. C'est un métal dur, malléable et ductile ce qui est à l'origine de sa principale utilisation dans les aciers inoxydables et dans les alliages de nickel comme par exemple dans les pièces de monnaie. De nos jours, les toitures des immeubles, les alliages contenant du nickel sont omniprésents dans notre quotidien. La pointe du Chrysler Building à New York est faite en grande partie de nickel, ce qui lui a permis de rester brillante jusqu'à aujourd'hui.

En association avec le cuivre ou le chrome, il est indispensable dans l'aéronautique ou l'électronique. Et avec du cadmium ou du zinc, il est utilisé dans les accumulateurs qui équipent de plus en plus les voitures hybrides et électriques. Ces utilisations concernent des applications de hautes technologies.



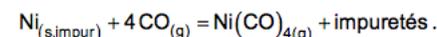
Le « nickel » étasunien



1 rouble transnitrien hommage à Léonov

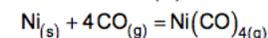


- Q21.** Le procédé Mond est un procédé de purification à 99,9 % du métal qui utilise la facilité unique du nickel à former du tétracarbonyle $\text{Ni}(\text{CO})_4$. Le nickel, obtenu par réduction du minerai, est un produit solide impur contenant du cobalt, du fer et du cuivre. Le résidu métallique est traité au monoxyde de carbone CO à une température d'environ 50 à 60 °C car seul le nickel réagit au CO dans ces conditions pour former un carbonyle gazeux :



Le mélange gazeux de monoxyde de carbone et de tétracarbonyle de nickel est alors chauffé à une température d'environ 220 à 250 °C pour décomposer le $\text{Ni}(\text{CO})_4$, qui donne du nickel métallique : $\text{Ni}(\text{CO})_{4(\text{g})} \rightarrow \text{Ni}_{(\text{s})} + 4\text{CO}_{(\text{g})}$, le nickel étant, cette fois, pur.

- a) Établir l'expression de l'enthalpie libre $\Delta_r G^0(T) = \alpha + \beta T$ associée à la réaction :



au-dessus de 316 K, où α et β sont des constantes numériques à déterminer.

Pour quelle température T_i , obtient-on $\Delta_r G^0 = 0$? Calculer la constante d'équilibre de cette réaction à 50 °C et à 160 °C.

- b) Commenter les signes de α et β . Quel est l'effet d'une augmentation isobare de température ? Quel est l'effet d'une augmentation isotherme de pression ?
- c) La carbonylation industrielle est réalisée dans des fours à tambours rotatifs, à la température $T_1 = 316\text{K}$ et à la pression standard $P^0 = 1\text{bar}$. Pourquoi le four doit-il donc être vigoureusement refroidi à l'eau pour rester à 50 °C ? Évaluer la quantité de chaleur évacuée par l'eau de refroidissement pour la transformation d'une tonne de nickel en carbonyle. Évaluer la fraction molaire x du tétracarbonyle dans ces conditions, une fois l'équilibre atteint, en supposant que la réaction est très avancée dans le sens de l'écriture.

Mais la pénétration du monoxyde de carbone dans l'alliage de nickel au cours de la carbonylation est très lente à 50 °C. Pour augmenter la vitesse de réaction, on travaille à une plus haute température égale à $T_2 = 433\text{K} = 160^\circ\text{C}$ et à une plus forte pression $P = 20\text{bars}$.

- d) Quel sera l'état physique du tétracarbonyle de nickel ? On rappelle que l'équilibre de phase obéit à la loi de Van't'Hoff.
- e) Vérifier que la fraction molaire de tétracarbonyle vaut environ 0,66 à l'équilibre. Commenter.

Masse molaire $M(\text{Ni}) = 59\text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$

Constante du gaz parfait : $R = 8,31\text{J}\cdot\text{mol}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$

Masses molaires en $\text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$: $M(\text{H}) = 1$, $M(\text{C}) = 12$ et $M(\text{O}) = 16$.

Annexe : Nom

Prénom

