

Phénomènes de transport – bloc 4 – Fluides en écoulement

Rappel du programme : Objectifs généraux de la formation

L'objectif de la partie « Fluides en écoulement » est d'introduire les grandeurs pertinentes caractérisant un écoulement, en cohérence avec les autres phénomènes de transport. L'expression de l'accélération comme la dérivée particulaire de la vitesse est abordée mais les équations d'Euler ou de Navier-Stokes ne sont pas au programme.

La notion de viscosité est introduite sur un exemple d'écoulement de cisaillement simple. Le nombre de Reynolds est présenté comme le rapport de deux temps caractéristiques construits par analyse dimensionnelle. Il est exploité afin d'évoquer les propriétés de similitude entre des systèmes réalisés à des échelles différentes et caractérisés par les mêmes nombres sans dimension.

Notions et contenus	Capacités exigibles
2.4. Fluides en écoulement	
2.4.1. Débits et lois de conservation	
Particule de fluide.	Définir la particule de fluide comme un système mésoscopique de masse constante.
Champ eulérien des vitesses.	Distinguer vitesse microscopique et vitesse mésoscopique. Définir une ligne de courant, un tube de courant.
Dérivée particulaire du vecteur vitesse : terme local ; terme convectif.	Associer la dérivée particulaire du vecteur vitesse à l'accélération de la particule de fluide qui passe en un point. Citer et utiliser l'expression de l'accélération avec le terme convectif sous la forme $(\mathbf{v} \cdot \text{grad}) \mathbf{v}$.
Masse volumique μ .	Citer des ordres de grandeur des masses volumiques de l'eau et de l'air dans les conditions usuelles.
Débit massique.	Définir le débit massique et l'écrire comme le flux du vecteur $\mu \mathbf{v}$ à travers une surface orientée.
Conservation de la masse.	Énoncer l'équation locale traduisant la conservation de la masse.
Écoulement stationnaire.	Exploiter la conservation du débit massique le long d'un tube de courant.
Débit volumique.	Définir le débit volumique et l'écrire comme le flux de \mathbf{v} à travers une surface orientée.
Écoulement incompressible et homogène.	Définir un écoulement incompressible et homogène par un champ de masse volumique constant et uniforme et relier cette propriété à la conservation du volume pour un système fermé. Exploiter la conservation du débit volumique le long d'un tube de courant indéformable.
2.4.2. Actions de contact sur un fluide	
Pression.	Identifier la force de pression comme étant une action normale à la surface. Utiliser l'équivalent volumique des actions de pression - $\text{grad } P$.
Éléments de statique des fluides.	Exprimer l'évolution de la pression avec l'altitude dans les cas d'un fluide incompressible et de l'atmosphère isotherme dans le modèle du gaz parfait.

Viscosité dynamique.	Relier l'expression de la force surfacique de viscosité au profil de vitesse dans le cas d'un écoulement parallèle. Citer l'ordre de grandeur de la viscosité de l'eau. Exploiter la condition d'adhérence à l'interface fluide-solide.
2.4.3. Écoulement interne incompressible et homogène dans une conduite cylindrique	
Écoulements laminaire, turbulent. Vitesse débitante.	Décrire les différents régimes d'écoulement (laminaire et turbulent). Relier le débit volumique à la vitesse débitante.
Nombre de Reynolds.	Décrire qualitativement les deux modes de transfert de quantité de mouvement : convection et diffusion. Interpréter le nombre de Reynolds comme le rapport d'un temps caractéristique de diffusion de quantité de mouvement sur un temps caractéristique de convection. Évaluer le nombre de Reynolds et l'utiliser pour caractériser le régime d'écoulement.
Chute de pression dans une conduite horizontale. Résistance hydraulique.	Dans le cas d'un écoulement à bas nombre de Reynolds, établir la loi de Hagen-Poiseuille et en déduire la résistance hydraulique. Exploiter le graphe de la chute de pression en fonction du nombre de Reynolds, pour un régime d'écoulement quelconque. Exploiter un paramétrage adimensionné permettant de transposer des résultats expérimentaux ou numériques sur des systèmes similaires réalisés à des échelles différentes.
2.4.4. Écoulement externe incompressible et homogène autour d'un obstacle	
Force de traînée subie par une sphère solide en mouvement rectiligne uniforme. Coefficient de traînée C_x ; graphe de C_x en fonction du nombre de Reynolds.	Associer une gamme de nombre de Reynolds à un modèle de traînée linéaire ou un modèle quadratique.
Notion de couche limite.	Pour les écoulements à grand nombre de Reynolds décrire qualitativement la notion de couche limite.
Forces de traînée et de portance d'une aile d'avion à haut Reynolds.	Définir et orienter les forces de portance et de traînée. Exploiter les graphes de C_x et C_z en fonction de l'angle d'incidence.

I. Débits et loi de conservation

1. Description d'un fluide en écoulement

1.1 Le modèle du fluide continu : la particule de fluide

Un **fluide** est un **milieu matériel** parfaitement **déformable**, contrairement aux solides indéformables. Globalement, il présente la propriété de se mettre très facilement en mouvement dès qu'une force est exercée, et dans ce chapitre, on s'intéressera particulièrement aux **écoulements de fluide**.

On distingue par exemple les **gaz** (et plasmas) **compressibles**, et les **liquides**, **peu compressible** (compressibilité légèrement inférieure à celle d'un solide).

→ Les échelles d'étude

- **échelle macroscopique** : sa **dimension typique L** est de l'ordre de la **dimension de l'écoulement** (cm, m...), le fluide y est décrit comme un milieu continu, mais elle ne permet pas d'étudier les détails d'un écoulement, notamment de décrire les champs de vitesse et de pression au sein du fluide.

- **échelle microscopique** : à cette échelle **inférieure à la distance moyenne entre particules** -> **libre parcours moyen lpm pour les fluides**, le fluide ne peut pas être décrit comme un milieu continu.

- **échelle mésoscopique** : à cette échelle intermédiaire, on décompose le milieu en **particules de fluide élémentaire**, de taille **a**. C'est la taille minimale satisfaisante pour adopter une **description continue du milieu**.

La condition $a \gg lpm$ ($a/lpm =$ nombre de Knudsen) assure un **nombre suffisant de particules** pour établir un **équilibre thermodynamique local** (suffisamment de chocs). Pour chaque particule de fluide, centrée en M, on peut définir **localement** les **grandeurs thermodynamiques intensives** pression, température, masse volumique, et la **grandeur mécanique vitesse**, qui présentent des fluctuations négligeables autour de leurs valeurs moyennes.

La condition $a \ll L$ permet de décrire l'évolution de ces grandeurs au sein du fluide : **champs de vitesse, pression, masse volumique...**

→ La particule de fluide dans l'approximation des milieux continus

Compétence : définir la particule de fluide comme un système mésoscopique de masse constante

Au sein d'un fluide, on définit une **particule de fluide** comme l'ensemble des particules contenues à un instant donné dans un volume, correspondant à l'échelle

mésoscopique. Par définition, la **masse d'une particule de fluide reste constante** (système fermé).

La taille caractéristique de cette particule est grande par rapport au lpm, puisque c'est un système mésoscopique. On y adopte donc une **description continue des variables intensives, fonction de de la position et du temps**.

Plus précisément, on choisit une particule de fluide, de volume dV , centrée en un point M à l'instant t , et on lui associe une **masse volumique** $\mu(M, t)$, en $kg.m^{-3}$:

$$\mu(M, t) = \frac{dm}{dV} \quad \text{où } dm \text{ représente la masse de la particule de fluide}$$

Compétence : citer des ordres de grandeur des masse volumiques de l'eau et de l'air dans les conditions usuelles

Dans les conditions usuelles

$$\mu(eau) = 1000 \text{ kg.m}^{-3} = 1 \text{ g.mL}^{-1}$$

$$\mu(air) = 1,2 \text{ kg.m}^{-3} = 1,2 \text{ g.L}^{-1}$$

Remarque : la masse d'une particule de fluide est constante, mais son volume peut évoluer au cours du temps.

1.2 Vitesse de la particule de fluide dans le champ eulérien

Imaginons l'observation de l'écoulement d'une rivière : dans la **description eulérienne**, on place un **observateur en chaque point lié au référentiel fixe** : on peut imaginer un quadrillage de ponts au-dessus de la rivière pour placer ces observateurs. Pour visualiser l'écoulement, jetons alors des petits flotteurs en amont de des observateurs. Un observateur en un point fixe verra donc passer ces flotteurs « solidaires » du fluide, mais différentes à chaque instant, et déterminera la vitesse du fluide au cours du temps (à cet endroit).

Dans ce point de vue, le vecteur vitesse $\vec{v}(M, t)$ ne concerne donc pas la même particule au cours du temps, mais les différentes particules qui passent successivement au point M : c'est le **point de vue eulérien de description de la vitesse**. On ne suit plus les particules au cours de leurs mouvements comme dans une étude classique de mécanique du point.

On préfère mesurer la vitesse du vent en un point donné, sans connaître la provenance de la particule de fluide, point de vue lagrangien.

Remarque : cette approche se prête bien à la **traduction des conditions aux limites en des points fixes**.

A différents instants, on s'intéresse donc **localement** à la **vitesse d'une particule de fluide**, en un point M donné. Il faut réaliser la moyenne statistique des vitesses

individuelles des N entités qui composent la particule de fluide, contenues dans le volume dV, centré en M, à t :

$$\vec{v}(M, t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \vec{v}_i$$

Il s'agit d'une **description eulérienne** du fluide : on ne suit pas chaque particule le long de sa trajectoire pour définir la vitesse, mais **le mouvement du fluide est défini** par la **vitesse en un point donné M du milieu**, et à un instant t. On parle alors de **champ de vitesse eulérien** (de pression, etc).

Compétence : distinguer vitesse microscopique et vitesse mésoscopique

Alors que les vitesses microscopiques des particules individuelles sont distribuées aléatoirement par l'agitation thermique, la **vitesse mésoscopique** correspond à **l'écoulement d'ensemble du fluide**, comme par exemple la vitesse moyenne de migration des électrons de conduction soumis à un champ électrique.

→ Un enfant souffle dans une paille. Estimer les ordres de grandeurs des vitesses mésoscopique et microscopique de l'écoulement.

→ Ligne de courant et tube de courant

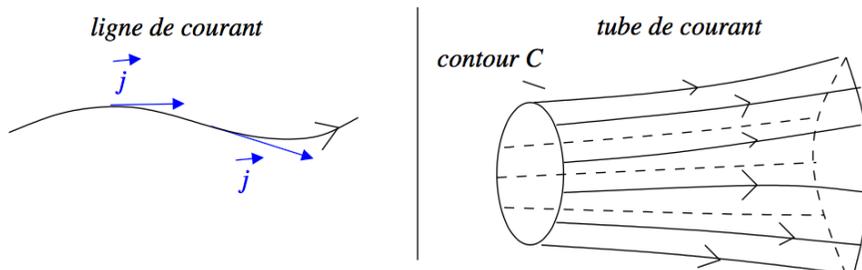
Compétence : définir les notions de ligne de courant et de tube de courant

Les **lignes de courant** sont les **lignes tangentes au vecteur vitesse**, en tout point, et **orientées par ce vecteur**.

Il s'agit donc des lignes de champ du champ eulérien des vitesses.

L'**ensemble des lignes de courant** s'appuyant sur un contour C engendre une **surface fermée** appelée **tube de courant**.

On y reconnaîtra une surface d'entrée et de sortie, et une surface latérale.



Ressource

http://ressources.unisciel.fr/mecaflux/co/AC1-C3_LigneTubeCourant.html

Remarque : dans la pratique une **canalisation** constitue naturellement un **tube de courant**

→ Écoulement stationnaire et champ de vitesse stationnaire

Un écoulement est **stationnaire** si l'ensemble de ses **champs eulériens** $\vec{v}(M, t)$, $\mu(M, t)$... est **indépendant du temps**.

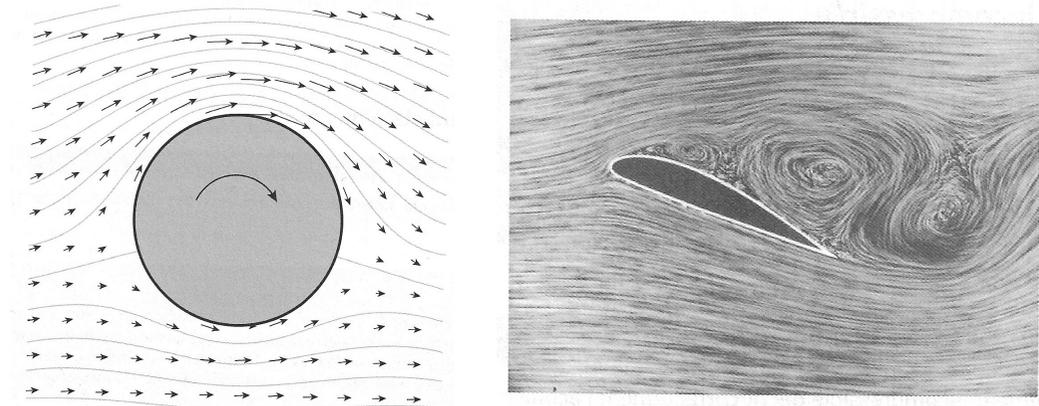
La vitesse de la particule de fluide qui passe au point M est toujours la même au cours du temps.

Le champ eulérien est alors pleinement efficace pour caractériser un écoulement stationnaire.

Pour un **écoulement stationnaire**, la **ligne de courant s'identifie à la trajectoire d'une particule de fluide**.

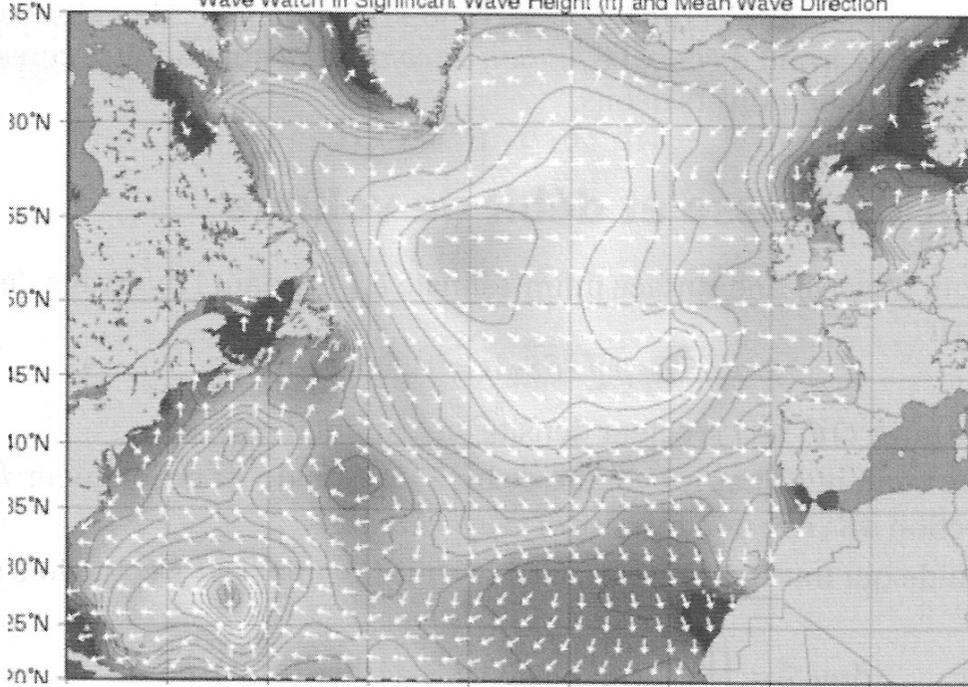
Il est alors possible de visualiser les lignes de courant à l'aide de colorants, de bulles ou particules diffusantes... injectés dans l'écoulement.

Ci-dessous un exemple de lignes de courant pour un écoulement stationnaire autour d'un cylindre en rotation, ou obtenues autour d'une aile d'avion à fort angle d'attaque.



Remarque : il existe cependant des variations de vitesse, car la vitesse n'est pas uniforme, et donc une **accélération non nulle de la particule de fluide**.

Wave Watch III Significant Wave Height (ft) and Mean Wave Direction

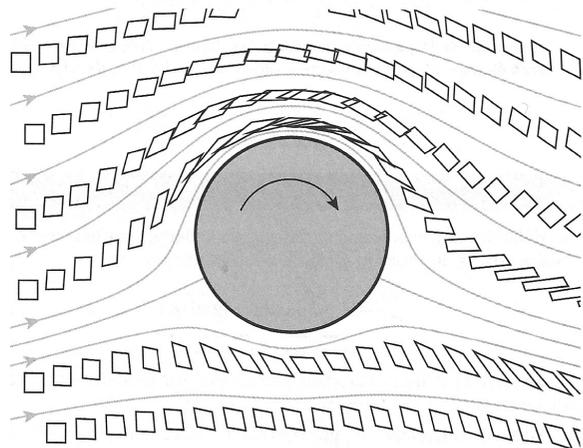


Ci-dessus, un **écoulement de marée en régime non-stationnaire** autour d'un obstacle : trajectoires et lignes de courant n'ont pas de lien immédiat.

1.3 Dérivée particulaire

→ **Dérivée particulaire d'un scalaire : la masse volumique pour exemple**

Simulation numérique de l'évolution des particules de fluide au cours du temps dans l'écoulement permanent autour d'un cylindre en rotation



Dans cette évolution, la particule de fluide se déplace en translation, mais est aussi animée d'une rotation sur elle-même, et son volume est potentiellement modifié. La variation de masse volumique de la particule (de masse constante) qui en résulte n'est pas bien décrite par la dérivée partielle purement eulérienne qui ne tient pas compte du déplacement dans un champ non uniforme.

Suivons une particule de fluide se trouvant au point $M(t)$ en t , de coordonnées (x,y,z) . A $t + dt$, elle se retrouve en $M(t+dt)$, de coordonnées $(x+dx,y+dy,z+dz)$.

La **dérivée particulaire de la masse volumique, notée $\frac{D\mu}{Dt}$** , est alors son taux d'accroissement obtenue en suivant la particule de fluide entre $M(t+dt)$ et $M(t)$, et s'exprime par :

$$\frac{D\mu}{Dt} = \underbrace{\frac{\partial \mu}{\partial t}}_{\text{dérivée locale}} + \underbrace{\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(\mu)}_{\text{dérivée convective}}$$

La **dérivée locale** est liée au caractère **instationnaire de l'écoulement, en un point fixe au cours du temps** (« purement eulérien »).

La **dérivée convective** est liée au caractère **non uniforme de l'écoulement**, avec un déplacement dans des régions de masse volumique non uniforme.

Démonstration



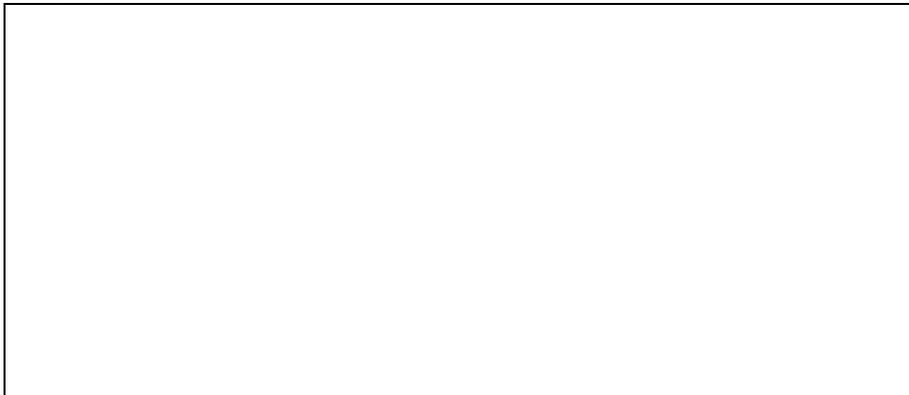


→ Dérivée particulaire de la vitesse

Le taux d'accroissement de la vitesse représente physiquement l'accélération de la particule de fluide qui passe au point M en t, au sens de la mécanique du point. La notion de dérivée particulaire se généralise à tout champ vectoriel en l'appliquant sur chaque composante, et en particulier au champ des vitesses :

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \underbrace{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}}_{\text{accélération locale}} + \underbrace{\vec{v} \cdot \text{grad}(\vec{v})}_{\text{accélération convective}}$$

En effet



2. Transport de masse dans les écoulements

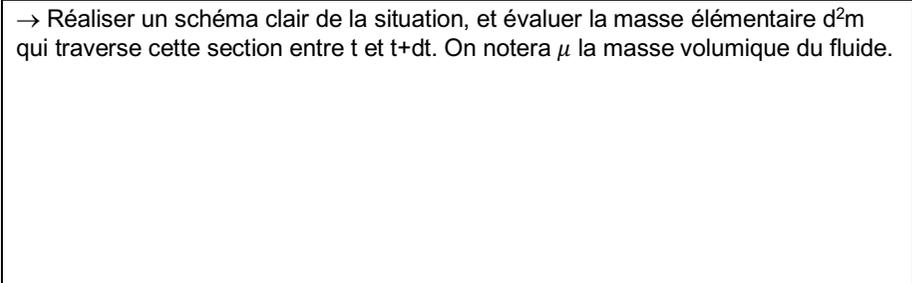
2.1 Débit massique et vecteur densité de courant

L'**écoulement** d'un fluide est un phénomène de **transport de masse**, les particules du milieu transportant leur propre matière. La masse de fluide s'écoulant dans une canalisation est une grandeur essentielle.

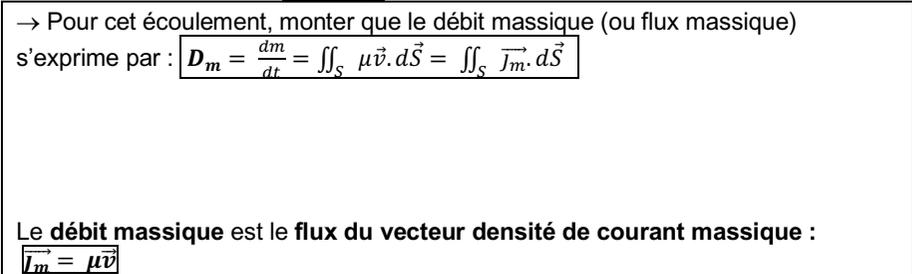
Nous allons donc définir le **débit massique D_m** d'un écoulement : **flux de masse par unité de temps -> en $\text{kg}\cdot\text{s}^{-1}$** et le **vecteur densité de courant massique** qui transporte cette grandeur-> en **$\text{kg}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{s}^{-1}$**

Compétence : définir le débit massique et l'écrire comme le flux du vecteur densité de courant massique à travers une surface orientée

Prenons le cas d'un écoulement à travers une section orientée.



Le **débit massique D_m** au travers de la surface S est défini par la masse dm qui la traverse pendant dt : $D_m = \frac{dm}{dt}$



On retrouve une analogie formelle avec le transport par diffusion thermique et particulaire : le rôle des vecteurs densité de courant \vec{J}_Q et \vec{J}_N est ici tenu par le vecteur densité de courant de masse \vec{J}_m pour le transport de masse.

Grandeur G transportée	Vecteur densité de flux	Expression de $\delta^2 G$
Nombre N de particules	\vec{J}_N	$\delta^2 N = \vec{J}_N \cdot d\vec{S} dt$
Chaleur Q	\vec{J}_Q	$\delta^2 Q = \vec{J}_Q \cdot d\vec{S} dt$
Volume V	\vec{v}	$\delta^2 V = \vec{v} \cdot d\vec{S} dt$
Masse m	\vec{J}_m	$\delta^2 m = \vec{J}_m \cdot d\vec{S} dt$

Cependant, la **source des transports diffusifs** est, à chaque fois, associée à l'**inhomogénéité d'une grandeur physique hors-équilibre**, alors qu'ici le vecteur \vec{J}_m est un **transport convectif**, dont la « source » est le **champ des vitesses** dans le fluide.

Pour le cas pratique, très courant, des écoulements où la **vitesse est uniforme sur la surface** :

$$\text{vitesse uniforme sur } S \rightarrow D_m = \mu v S$$

2.2 Equation locale de conservation de la masse

→ Exemple unidirectionnel (en géométrie cartésienne)

Compétence : écrire les équations bilans, globale ou locale, traduisant la conservation de la masse

On considère un modèle unidirectionnel avec $\vec{v}(x, t) = v_x(x, t) \vec{u}_x$.

→ Réaliser un bilan de masse local appliqué au volume élémentaire dV , compris entre x et $x+dx$, le vecteur densité de courant ne dépendant que de x , et montrer que l'équation locale de conservation de la masse est :

$$\frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial t} = 0$$

→ Généralisation tridimensionnelle $\text{div } \vec{J}_m + \frac{\partial \mu}{\partial t} = 0$ avec $\vec{J}_m = \mu \vec{v}$

3. Propriétés des différents types d'écoulement

3.1 Ecoulement stationnaire (permanent)

→ Caractère conservatif du vecteur densité de courant massique

En régime permanent, les grandeurs ne dépendent pas explicitement du temps, ainsi l'équation locale de conservation devient avec $\frac{\partial \mu}{\partial t} = 0$:

$$\text{div } \vec{J}_m = 0 \quad \text{équivalent à} \quad \oint \vec{J}_m \cdot d\vec{S} = 0$$

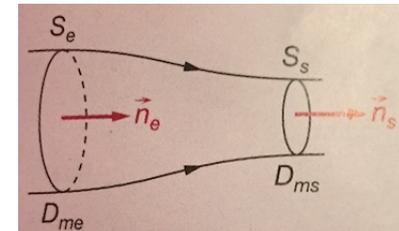
Le flux de masse entrant, ou **débit massique entrant**, équilibre exactement le flux de masse sortant, ou **débit massique sortant**, le vecteur densité de courant est dit à **flux conservatif**.

→ Conséquence : conservation du débit massique

Compétences :

- écrire les équations, **globale** ou locale, traduisant la conservation de la masse
- exploiter la conservation du débit massique

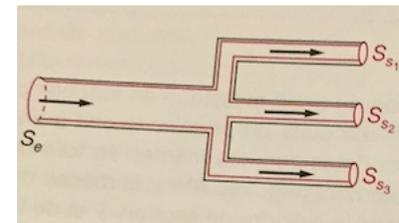
Prenons le cas d'un tube de courant, comme une canalisation, représenté sur la figure ci-contre. Le débit total entrant est égal au débit total sortant en régime permanent. Le débit sur la surface latérale du tube est nul par définition : le vecteur surface y est orthogonal au vecteur densité de courant. Le débit total entrant se réduit ici à D_{me} qui est égal au débit total sortant D_{ms} .



En régime **stationnaire**, le **débit massique se conserve le long d'un tube de courant**.

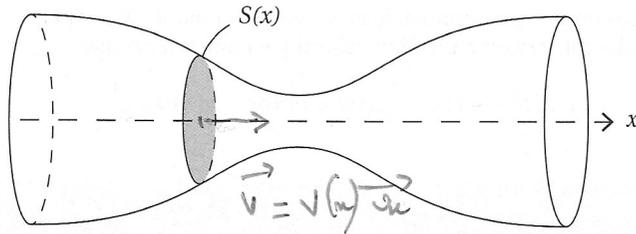
Un autre cas pratique de **bilan global en régime stationnaire** est celui des dispositifs avec plusieurs entrées/sorties : la somme des débits entrants est alors égale à la somme des débits sortants : $\sum_i D_{me,i} = \sum_j D_{ms,j}$

On retrouve l'analogie de la loi des nœuds en électrocinétique.



Prenons le cas d'un **écoulement d'air stationnaire dans une tuyère** de section variable $S(x)$. Si la section $S(x)$ varie lentement avec x , il est légitime de supposer

une vitesse unidirectionnelle, perpendiculaire à la section droite et un écoulement unidimensionnel/ $\vec{v} = v(x)\vec{u}_x$ (la composante radiale étant négligeable).



La conservation du débit massique dans la tuyère, qui est naturellement un tube de champ, fournit la relation :

$$D_m = \mu(x)S(x)v(x) = cte$$

3.2 Écoulement incompressible et homogène

→ Champ d'application du modèle de fluide incompressible

L'**écoulement incompressible** est un modèle.

Il est très bien adapté aux cas d'un **fluide incompressible et indilatable** :

coefficient de compressibilité isotherme $\chi_T = -\frac{1}{V}(\frac{\partial V}{\partial P})_T$ et coefficient de dilatation

isobare $\alpha = -\frac{1}{V}(\frac{\partial V}{\partial T})_P$ négligeables, alors **la variation de volume dV de la**

particule de fluide est négligeable par l'équation d'état : $dV = \alpha V dT - \chi_T V dP$. Sa masse volumique est donc constante.

En pratique, pour les **fluides**, le caractère **incompressible** est aisément **vérifié**.

Avec $\chi_T = 10^{-10} \text{ Pa}^{-1}$ → $dV/V = 10^{-3}$ pour une variation de pression $dP = 100 \text{ bar} = 10^7 \text{ Pa}$ (élévation de pression correspondante à une profondeur de 1000 m de fond pour de l'eau).

Pour les **gaz**, l'écoulement est approximativement **incompressible** si la **vitesse de l'écoulement U est faible devant la vitesse de la célérité des ondes acoustiques** :

Écoulement incompressible pour un gaz ↔ $U \ll c_{\text{son}}$ la vitesse du son dans le fluide
Soit un **nombre de Mach M = U/c_{son} << 1**

→ Propriétés de l'écoulement incompressible et homogène

Compétences :

- définir un écoulement incompressible et homogène par un champ de masse volumique constant et uniforme
- relier cette propriété à la conservation du volume pour un système fermé

Un écoulement **incompressible et homogène** est caractérisé par un **champ de masse volumique constant et uniforme**.

On dit aussi qu'un écoulement est **incompressible** si le **volume** la **particule de fluide** est **conservé** au cours du mouvement. En effet, la conservation de la masse pour une particule de fluide (système fermé), et de la masse volumique impose celle du volume.

→ **Caractère conservatif du vecteur vitesse pour un écoulement incompressible et homogène**

La masse volumique se conserve le long de l'écoulement soit :

$$\frac{D\mu}{Dt} = 0$$

Par ailleurs, l'équation locale de conservation de la masse s'écrit :

$$\text{div } \vec{j}_m + \frac{\partial \mu}{\partial t} = \text{div} (\mu \vec{v}) + \frac{\partial \mu}{\partial t} = \mu \text{div } \vec{v} + \underbrace{\vec{v} \cdot \text{grad} (\mu)}_{\frac{D\mu}{Dt}} + \frac{\partial \mu}{\partial t} = 0$$

Soit $\text{div } \vec{v} = -\frac{1}{\mu} \frac{D\mu}{Dt}$

Pour un écoulement stationnaire → $\text{div } \vec{v} = 0$ → le vecteur vitesse est à flux conservatif

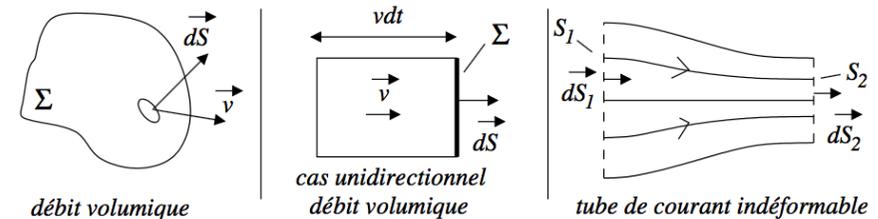
Remarque : considérons une particule de fluide de **volume V** et de **masse m = μV**

L'équation précédente s'écrit : $\text{div } \vec{v} = -\frac{1}{\mu} \frac{D\mu}{Dt} = -\frac{D(\ln \mu)}{Dt} = \frac{D(\ln V)}{Dt} = \frac{1}{V} \frac{DV}{Dt}$

La divergence du vecteur vitesse définit l'accroissement relatif de la particule de fluide au cours du temps (on parle du taux d'expansion volumique).

→ **Débit volumique**

Compétence : définir le débit volumique et l'écrire comme le flux de la vitesse à travers une surface orientée



On définit le **débit volumique** D_V comme le **flux du vecteur vitesse** à travers une surface orientée : $D_V = \iint_S \vec{v} \cdot d\vec{S}$ -> unité en $m^3 \cdot s^{-1}$
 Il représente le volume de fluide qui traverse cette surface par unité de temps.

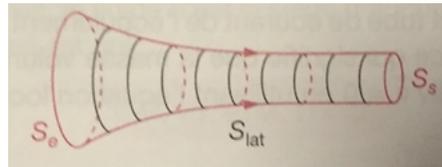
Remarques

- pour un **écoulement incompressible et homogène**, on obtient une relation entre débits massique et volumique : $D_m = \mu D_V$
- généralement, on définit la **vitesse débitante**, ou **vitesse moyenne** \bar{v} par la relation : $D_V = S \bar{v}$

→ **Conservation du débit volumique pour un écoulement incompressible et homogène**

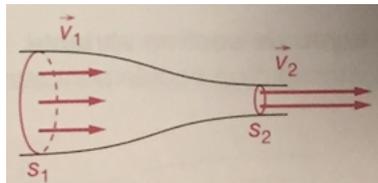
Compétence : justifier la conservation du débit volumique le long d'un tube de tube de courant indéformable

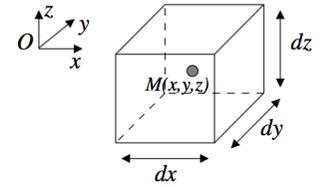
En exploitant la conservation du flux du vecteur vitesse le long du tube de courant (surface fermée ci-contre), on trouve rapidement que $D_{V_e} = D_{V_s}$, car le flux latéral est nul.



*Dans un écoulement incompressible homogène, le **débit volumique se conserve entre l'entrée et la sortie d'un tube de courant** (par exemple, il ne change pas dans une canalisation). En particulier, lorsque les lignes de courant s'écartent, la vitesse débitante du fluide diminue.*

Prenons l'exemple de de la figure ci-contre : $S_1 \bar{v}_1 = S_2 \bar{v}_2$ donc lorsque la surface d'écoulement diminue, la vitesse augmente. D'autre part, les débits volumiques entrants et sortants sont égaux dans le cas de plusieurs entrées/sorties.





II. Actions de contact dans un fluide

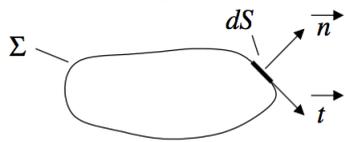
1. Description générale des actions mécaniques de contact

Après avoir décrit et modélisé les écoulements de fluide, nous poursuivons notre étude du transport en mécanique des fluides, en explicitant les forces à l'origine des champs de vitesse engendrés. Contrairement à la statique des fluides, étudiée en première année, dès qu'un **fluide est mis en mouvement**, on peut plus uniquement décrire les actions de contact dans un fluide (fluide/fluide et fluide/paroie) par des forces de pression. Il est nécessaire d'introduire des forces supplémentaires de viscosité.

Délimitons un volume V de fluide par une enveloppe fictive Σ . Le fluide extérieur, ou un support, exerce des **actions de contact à courte portée** sur les particules de fluide, contenues à l'intérieur du volume V.

On **modélise ces actions** par une **force surfacique**.

Compétence : identifier la force de pression comme étant une action normale à la surface



La **résultante des forces exercées par l'extérieur** sur l'élément de surface dS peut être décomposée en deux termes :

- une **composante normale** : la **force de pression** d'expression élémentaire

$$\boxed{d\vec{F}_n = -P(M, t) dS \vec{n}}$$

Cette force résulte des chocs des particules de fluide sur la paroi. Le signe « - » assure que cette force est dirigée vers l'intérieur.

- une **composante tangentielle** : la **force de viscosité** ou **force de cisaillement** modélisant le **frottement des couches de fluide** les unes sur les autres.

2. Expression volumique des forces de pression

Compétence : utiliser l'équivalent volumique des actions de pression $-\overrightarrow{grad} P$
En l'absence d'écoulement, la force de contact est purement normale.

Pour exprimer l'équivalent volumique des forces de pression, on considère une particule de fluide de volume dV, comprise entre x et x+dx, y et y+dy, z et z+dz.

→ Exprimer la composante $d\vec{F}_x$ selon (Ox) de la résultante des forces de pression $P(x, y, z)$, exercée sur cet élément de volume.

En généralisant selon les trois directions, on en déduit l'expression de la

$$\text{résultante : } d\vec{F} = d\vec{F}_x + d\vec{F}_y + d\vec{F}_z = -\left(\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)\vec{u}_x + \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{u}_y + \left(\frac{\partial P}{\partial z}\right)\vec{u}_z\right)dV$$

$$d\vec{F} = -\overrightarrow{grad}P dV = \vec{F}_V dV$$

La **force volumique équivalente** $\vec{F}_V = \frac{d\vec{F}}{dV}$ s'exprime donc par $\boxed{\vec{F}_V = -\overrightarrow{grad}P}$

On retrouve directement cette relation en utilisant la formule d'Archimède :

$$\vec{F} = \oint\oint P d\vec{S} = \iiint_V -\overrightarrow{grad}P dV = \iiint_V \vec{F}_V dV$$

3. Éléments de statique des fluides

3.1 Cas d'un fluide incompressible

Compétence : exprimer l'évolution de la pression avec l'altitude dans le cas d'un fluide incompressible

C'est certainement le cas le plus simple, concrètement il s'applique aux liquides incompressibles et homogènes. La **masse volumique** est alors constante et uniforme, notamment **indépendante de la pression**, dans la limite de pressions raisonnables.

→ Réaliser un schéma de la situation : volume d'eau avec surface libre au contact de l'air, la pression dans l'air P_{atm} . Exploiter le PFD appliqué à un élément de volume dV pour établir le profil de pression au sein du fluide.

La pression augmente donc avec la profondeur (« poids de la colonne d'eau »). Plus simplement, on peut retenir la relation faisant intervenir la différence de pression entre deux points du liquide séparés par une hauteur h :

$$\Delta P = \rho_0 g h$$

Si l'on s'enfonce de 10 mètres $\rightarrow \Delta P \approx 10^3 \cdot 10 \cdot 10 = 10^5 \text{ Pa} = 1 \text{ bar}$

Rappel : 1 Pa (pascal) = 1 N.m⁻²

Contrairement à un gaz, la pression dans un liquide varie significativement sur quelques mètres, à cause d'une masse volumique bien plus élevée.

3.2 Cas d'un fluide compressible : équilibre isotherme de l'atmosphère

Compétence : exprimer l'évolution de la pression avec l'altitude dans le cas de l'atmosphère isotherme dans le modèle du gaz parfait

→ Position du problème : hypothèses du cadre de l'étude

- on s'intéresse au cas d'un **fluide compressible** : un gaz considéré comme un **gaz parfait**. L'équilibre thermodynamique local appliqué à un élément de volume élémentaire dV et de quantité de matière dn, en mol, et de masse dm s'écrit :

$$P dV = dn RT = (dm/M) RT \rightarrow \mu = \frac{dm}{dV} = \frac{PM}{RT}$$

Avec M la masse molaire moyenne pour l'air, constitué de 80% de N₂ (29 g.mol⁻¹) et de 20% de O₂ (32 g.mol⁻¹), soit ici M ≈ 29 g.mol⁻¹.

La différence essentielle avec le fluide incompressible précédent est la **variation de masse volumique avec l'altitude**.

- on fait l'hypothèse d'un **champ de pesanteur uniforme** g(z) = g, sachant que

$$g(z) = \frac{R_T^2}{(R_T+z)^2} \rightarrow \text{cette hypothèse est tout à fait réaliste tant qu'on se limite à des couches atmosphériques } z \approx 10 \text{ km} \ll R_T = 6400 \text{ km le rayon terrestre}$$

- on suppose une atmosphère à l'**équilibre thermique** $\rightarrow T = T_0$ **température constante** : cette hypothèse est plus contraignante, par exemple elle diminue de 0,6 °C tous les 100 m dans la troposphère

→ Détermination du champ de pression

→ Réaliser un schéma clair de la situation, et y placer votre repérage. Exploiter le PFD appliqué à un élément de volume dV pour établir le profil de pression au sein du fluide. On notera P₀ la pression au sol en z = 0.

→ Evaluer numériquement la distance caractéristique H de variation de la pression pour T = 300 K.

La **pression** dans l'air **diminue exponentiellement avec l'altitude**.

Au delà de 3 H, par exemple, la pression n'est plus que de 5%. Dans ce modèle, si on assimile donc 3H à l'épaisseur de l'atmosphère, on trouve une **épaisseur de quelques dizaines de kilomètres**.

→ Estimer la variation relative de pression à l'échelle d'une pièce, ou d'un bâtiment, notée h ≈ 10 m ≪ H. Conclure.

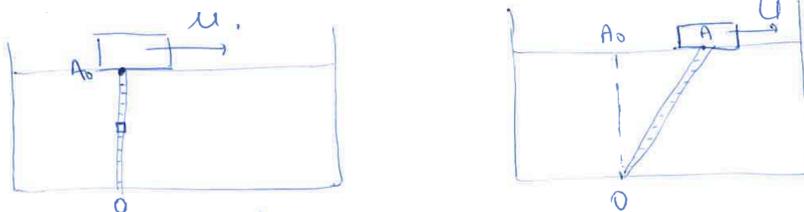
Remarque

On identifie un facteur de Boltzmann dans la dépendance exponentielle de la pression avec l'altitude. Celui-ci met en évidence la **compétition « ordre/désordre »** entre deux termes : l'**énergie cinétique d'agitation thermique** kT (ou RT/M), qui disperse les molécules du gaz selon l'altitude, et l'**énergie potentielle de gravitation**, facteur d'ordre qui a tendance à regrouper les molécules au niveau du sol.

4. Viscosité dynamique d'un fluide

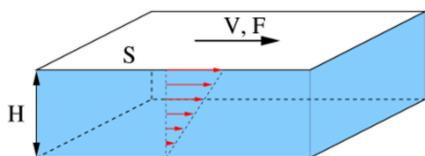
4.1 Nécessité d'une composante tangentielle des forces de contact

→ Mises en évidence expérimentale



Nous proposons une première expérience avec un fluide visqueux : on étale du miel sur une surface, et on dépose une feuille d'aluminium sur cette couche de fluide qu'on tire parallèlement à la surface. On recommence l'expérience avec un fluide peu visqueux comme l'eau. On constate une force bien supérieure en présence de miel pour **mettre ce fluide visqueux en mouvement**, qui est **tangentielle à la surface de contact** fluide/aluminium : il s'agit donc d'une **force de cisaillement** appliquée tangentiellement à la surface.

Analysons plus en détail cette situation avec une deuxième expérience : dans un cristalliseur, rempli de glycérine, fluide très visqueux, on injecte une colonne de glycérine colorée à l'aide d'une seringue. Un palet est disposé à la surface du fluide et on le déplace avec une vitesse U , tangentiellement à la surface.



Le palet mobile met en mouvement la couche supérieure de fluide à sa surface, qui entraîne à son tour une couche inférieure, ce **transfert de quantité de mouvement** (déplacement) des couches de fluide se répète de proche en proche sur chaque couche de fluide, jusqu'à atteindre le fond du cristalliseur. On peut faire **l'analogie avec les cartes d'un jeu lorsque l'on pousse la carte supérieure**.

Une force normale à la surface, comme la résultante des forces de pression, ne peut provoquer ce mouvement tangential (travail nul).

D'autre part, c'est l'**inhomogénéité initiale de vitesse au sein du fluide** qui provoque l'apparition de cette **force dite de cisaillement**. En effet, il existe clairement un **champ de vitesse inhomogène** et un **gradient de vitesse** selon la verticale au début de l'expérience : fluide en déplacement à la surface mobile et

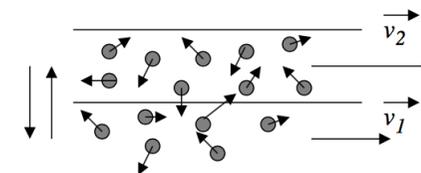
fluide immobile au fond du cristalliseur. Les **zones les plus rapides** ont tendance à **entraîner les plus lentes**.

Résultat du **cisaillement**, un gradient vertical (selon y) du champ de vitesse est lié à une contrainte horizontale (selon x).

Cette force de cisaillement traduit aussi un **transport de quantité de mouvement au sein du fluide** qui se met en déplacement de proche en proche : il y a « **diffusion de quantité de mouvement** ».

→ **Interprétation microscopique qualitative**

Regardons deux couches de fluide au niveau microscopique. Dans chaque couche, une particule de fluide est animée d'une vitesse mésoscopique et d'une vitesse microscopique de moyenne nulle.



les molécules sont échangées du fait de la diffusion

Pour deux couches adjacentes de vitesses mésoscopiques différentes (ci-contre), les molécules en moyenne plus rapides de la couche supérieure diffusent et traversent la frontière entre les deux couches. De ce fait, elles transportent avec elles une quantité de mouvement supplémentaire qu'elles transfèrent à la couche inférieure. La couche inférieure voit sa quantité de mouvement augmenter globalement. Les **forces de viscosité traduisent bien un transport diffusif de quantité de mouvement**.

4.2 Définition de la viscosité comme force surfacique de cisaillement

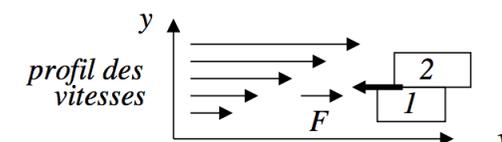
→ **Définition dans le cas d'un écoulement parallèle**

Compétence : relier l'expression de la force surfacique de viscosité au profil de vitesse dans le cas d'un écoulement parallèle

On se place dans le cadre d'un **écoulement plan unidirectionnel** décrit par un **champ de vitesse** : $\vec{v} = v_x(y) \vec{u}_x$

La couche de fluide supérieure plus rapide, repérée par 2, a tendance à entraîner la couche inférieure 1 moins rapide.

Cette **force tangentielle**, exercée par la couche supérieure sur la couche inférieure, est **proportionnelle à la surface de contact** commune entre les deux couches, notée dS , et **au gradient de vitesse vertical**, dans le cas des fluides dits **newtoniens** :



$$d\vec{F} = \eta \frac{\partial v_x}{\partial y} dS \vec{u}_x$$

η est la **viscosité dynamique** du fluide newtonien. Elle dépend fortement de la température et la pression pour les gaz, plus faiblement pour les liquides. Cette force tend à **homogénéiser le champ de vitesse**, comme tout **phénomène de diffusion**.

Remarques

- pour les **fluides non-newtoniens** comme le sang, un mélange eau-fécule de maïs, le dentrifrice..., la viscosité dynamique η dépend du taux de cisaillement $\frac{\partial v_x}{\partial y}$ lui-même. Pour un fluide rhéoépaississant, comme le mélange fécule de maïs + eau (ou un yaourt), quand on y enfonce doucement une cuillère, la force à appliquée est faible, alors que si l'on communique une forte vitesse à la cuillère, celle-ci rebondit à la surface, il faut une force beaucoup plus importante pour y faire pénétrer la cuillère. La force sera aussi différente quand on veut retirer la cuillère du fluide, à forte ou faible vitesse. Pour un fluide à seuil, comme le dentrifrice, une contrainte minimale est nécessaire pour le mettre en écoulement (pas d'écoulement spontané sous l'effet de son poids...)
- on peut aussi définir la viscosité cinématique ν : $\nu = \frac{\eta}{\mu}$

Compétence : exprimer la dimension du coefficient de viscosité dynamique

→ Montrer que la dimension de η correspond à une unité en **Pa.s = PI** → **le poiseuille**

→ Ordres de grandeur

Compétence : citer l'ordre de grandeur de la viscosité de l'eau

Le poiseuille PI est une unité « assez forte » : la glycérine très visqueuse possède une viscosité de l'ordre de l'unité. Le tableau ci-dessous indique des viscosités à 25°C.

Corps pur	Eau	Air	Glycérine
Viscosité	$\eta = 1,0 \cdot 10^{-3} \text{ PI}$	$\eta = 1,8 \cdot 10^{-5} \text{ PI}$	$\eta = 1,4 \text{ PI}$

Rajoutons une huile de lubrifiant pour roulement mécanique, un produit industriel et visqueux, notamment employé pour sa qualité de contact avec les surfaces métalliques : η (huile pour moteur multigrade SAE 15W40 à 40°C) = 0,1 PI

→ Condition aux limites : condition d'adhérence

Compétence : citer la condition d'adhérence à l'interface fluide/solide

Au contact d'un solide, la continuité de la composante tangentielle de la vitesse est imposée par la viscosité : le fluide adhère en effet à la paroi par viscosité, il ne peut pas y glisser. La continuité de la composante est imposée par la non-pénétration du fluide dans le solide.

En conclusion, au **contact d'une paroi immobile**, la **vitesse d'un écoulement visqueux s'annule**. Au **contact d'une paroi mobile**, $\vec{v}(\text{fluide}) = \vec{v}(\text{paroi})$.

→ Caractère dissipatif de la viscosité et modèle de l'écoulement parfait

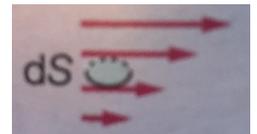
D'un point de vue thermodynamique, la viscosité d'un fluide implique **l'irréversibilité des écoulements** : on ne verra jamais un fluide dont une couche lente ralentit et en accélère une autre plus rapide.

D'un point de vue énergétique, la viscosité transporte de l'énergie cinétique de proche en proche, qui est ensuite convertie en énergie thermique. Il s'agit donc d'un **phénomène dissipatif**.

Cependant pour des « fluides peu visqueux » comme l'air notamment, on pourra adopter le **modèle de l'écoulement parfait**, lorsqu'un écoulement dissipe une énergie négligeable. **Tout transport diffusif devra être négligeable** : **dissipations visqueuse et thermique négligeables**.

4.3 Expression de la force volumique de viscosité

On considère un écoulement parallèle avec un champ de vitesse $\vec{v} = v_x(y) \vec{u}_x$.

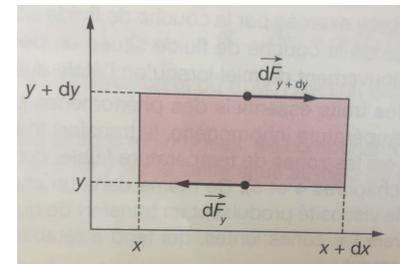


La particule de fluide de volume dV, comprise entre x et x+dx, y et y+dy, subit deux forces de cisaillement en y et y+dy :

$$d\vec{F} = d\vec{F}_{y+dy} + d\vec{F}_y = \eta dS \left(\frac{\partial v_x}{\partial y}(y+dy) - \frac{\partial v_x}{\partial y}(y) \right) \vec{u}_x$$

$$= \eta dS \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} dy \vec{u}_x$$

$$d\vec{F} = \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} dV \vec{u}_x = \vec{F}_v dV$$



Plus généralement à 3 dimensions, on peut établir l'expression de la force volumique de viscosité \vec{F}_v :

$$\vec{F}_v = \eta \Delta \vec{v}$$

Ce qu'il faut retenir

• **Il existe trois échelles d'étude : macroscopique** (distances qui nous sont naturellement perceptibles), **microscopique** (de la taille des atomes) et **mésoscopique** (échelle intermédiaire typiquement de la taille du micromètre : petite à l'échelle macroscopique, mais grande à l'échelle microscopique).

L'échelle mésoscopique permet de définir localement les grandeurs macroscopiques intensives comme la pression $P(M, t)$, la température $T(M, t)$, la masse volumique $\mu(M, t)$, la vitesse mésoscopique $\vec{v}(M, t)$ d'un écoulement...

On obtient ainsi des **champs eulériens**, définis en tout point et à tout instant. Si les champs eulériens ne dépendent pas de la variable temporelle, l'écoulement est dit **stationnaire**.

• **Une ligne de courant** est une ligne qui, en chacun de ses points, est tangente à la vitesse de l'écoulement.

Un tube de courant est constitué d'une surface d'entrée reliée à une surface de sortie par des lignes de courant partant de ses bords.

• **Le débit massique** au travers de la surface S , noté D_m , est la masse de fluide la traversant par unité de temps, soit :

$$D_m = \frac{dm}{dt}$$

où dm est la masse de fluide traversant S pendant dt . D_m s'exprime dans le système international en $\text{kg}\cdot\text{s}^{-1}$. Explicitement,

$$D_m = \iint_S \mu \vec{v} \cdot d\vec{S}$$

Pour un écoulement parallèle uniforme (perpendiculaire à la surface), on a l'expression simple : $D_m = \mu S v$. En régime stationnaire, le débit massique se conserve le long d'un tube de courant.

• **Le débit volumique** au travers de la surface S , noté D_V , est le volume de fluide la traversant par unité de temps. D_V s'exprime dans le système international en $(\text{m}^3\cdot\text{s}^{-1})$. Explicitement, on obtient :

$$D_V = \iint_S \vec{v} \cdot d\vec{S}$$

Sur une surface où la vitesse de l'écoulement est uniforme et normale à cette surface,

$$D_m = S v$$

Débits massique et volumique sont liés par :

$$D_m = \mu D_V$$

Dérivée particulaire de la vitesse

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \underbrace{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}}_{\text{accélération locale}} + \underbrace{\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(\vec{v})}_{\text{accélération convective}}$$

• **Un écoulement est rotationnel** si certaines lignes de courant se referment sur elles-mêmes.

Un écoulement est divergent (compressible) si le débit volumique ne se conserve pas dans tout tube de courant de l'écoulement (soit $\text{div } \vec{v} \neq 0$). Alors, le volume d'une particule de fluide varie, ce qui signifie que la masse volumique du fluide change dans l'écoulement.

• Dans un fluide au repos ($\vec{v}(M, t) = \vec{0}$), la **relation de statique des fluides** donne une loi régissant l'évolution de la pression :

$$P'(z) = -\mu g$$

avec le champ de pesanteur $\vec{g} = -g \vec{u}_z$ (le vecteur \vec{u}_z est orienté vers le haut).

• **L'équation locale de statique des fluides** s'écrit :

$$\mu \vec{g} - \overrightarrow{\text{grad}} P = \vec{0}$$

• Dans un **fluide incompressible** de masse volumique μ , le champ de pression est :

$$P(z) = P_0 - \mu g z$$

où P_0 est la pression à la surface $z = 0$.

• Dans le modèle d'**atmosphère isotherme**, le champ de pression est donné par :

$$P(z) = P_0 \exp\left(-\frac{Mgz}{RT}\right)$$

où M est la masse molaire du gaz et T sa température.

• Dans un écoulement de vitesse $\vec{v} = v_x(z) \vec{u}_x$, la force de viscosité $d\vec{F}$ exercée par la partie du fluide au-dessus de la surface élémentaire dS sur celle au-dessous s'écrit :

$$d\vec{F} = \eta \frac{\partial v_x}{\partial z} dS \vec{u}_x$$

où η est la **viscosité dynamique** du fluide appelé alors **fluide newtonien** si η ne dépend pas du taux de cisaillement $\frac{\partial v_x}{\partial z}$.

Expression volumique des forces de pression et viscosité

$$d\vec{F}_P = -\overrightarrow{\text{grad}} P dV$$

$$d\vec{F}_V = \eta \Delta \vec{v} dV$$

III. Écoulement interne incompressible et homogène dans une conduite cylindrique

1. Les régimes d'écoulement laminaire turbulent

Ressources

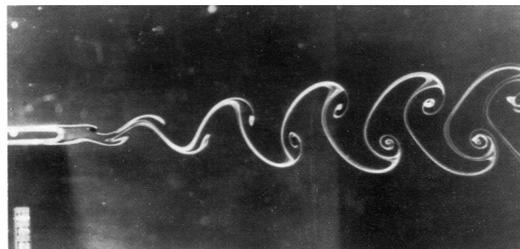
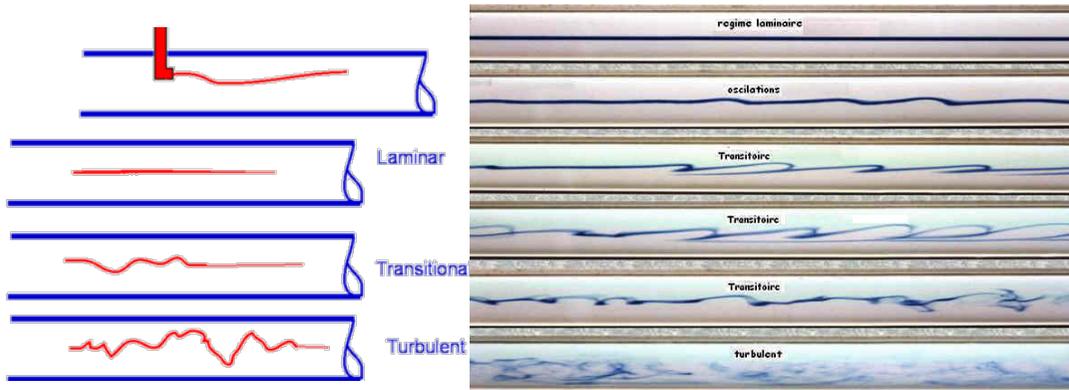
<http://culturesciencesphysique.ens-lyon.fr/la-physique-animee/forces-de-viscosite-pour-un-fluide-equation-de-navier-stokes>

<https://www.youtube.com/watch?v=P43hIF1uoVk>

projet Lutétium <https://www.youtube.com/watch?v=eD7LdS6bfOQ>

Compétence : décrire les différents régimes d'écoulement (laminaire et turbulent)

Dans le **régime dit laminaire**, correspondant à des **vitesse faibles**, les couches de fluides ne se mélangent pas, et glissent les unes sur les autres : l'**écoulement est régulier**. Lorsqu'on augmente la vitesse de l'écoulement, l'écoulement laminaire devient **irrégulier et instable**, avec mélange des couches de fluide puis formation de tourbillons... Cet **écoulement cahotique** à des **grandes vitesses** est alors qualifié de **turbulent**, caractérisé par un **fort désordre** et de **fortes et brusques variations spatio-temporelles**. On peut très simplement visualiser un écoulement turbulent lorsqu'on ouvre un robinet d'eau : aux faibles débits, la forme du jet est régulière et invariante au cours du temps alors qu'aux débits importants, la forme du jet devient irrégulière, fluctuante : l'eau devient trouble, le milieu est



opaque... (voir ressources vidéo).

2. Nombre de Reynolds

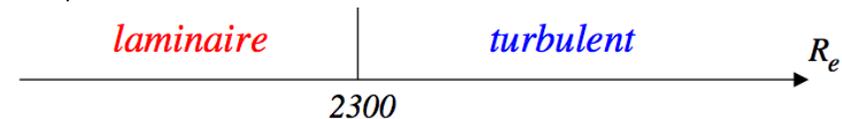
En 1883, Reynolds constate expérimentalement qu'il existe **une loi d'échelle** pour **prévoir** le caractère laminaire ou turbulent d'un écoulement : si l'on double le diamètre d'une canalisation, il faut doubler la vitesse pour obtenir un écoulement similaire. Il construit alors un **nombre sans dimension** appelé **nombre de Reynolds** pour mettre en évidence les **similarités** entre conditions expérimentales.

→ **Première approche : construction du nombre de Reynolds par analyse dimensionnelle**

On considère les **paramètres d'influence** d'un écoulement suivants : sa **vitesse mésoscopique U**, la **dimension** typique de l'**écoulement L** (par exemple le diamètre d'une canalisation), **η** la **viscosité dynamique** du fluide en écoulement, et **μ** sa **masse volumique**.

→ Construire le **nombre de Reynolds R_e** sans dimension qui compare la convection à la diffusion de quantité de mouvement

Dans cette expression, on peut déjà interpréter qualitativement les grandeurs qui influencent le régime d'écoulement : une vitesse et/ou une masse volumique élevées imposent un **fort nombre de Reynolds** : **régime turbulent** (instable), alors qu'une forte viscosité impose un **faible R_e** : **régime laminaire** (stable). On identifie ici la **compétition** entre deux phénomènes : le **transport diffusif par viscosité** piloté par **η** , et le **transport convectif** piloté par la vitesse et la masse volumique.



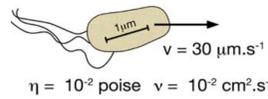
On pourra retenir **$R_e < 1$: régime laminaire, $R_e > 3000$ régime turbulent, transition pour $R_e \approx 2300$**

Compétence : évaluer le nombre de Reynolds et l'utiliser pour caractériser le régime d'écoulement

Natation à faible nombre de Reynolds

<http://www.cmap.polytechnique.fr/~alouges/nage.php>

→ Evaluer le nombre de Reynolds pour ces nageurs !



→ Pour un écoulement d'eau dans une canalisation de rayon $R = 5 \text{ cm}$, $\eta = 10^{-3} \text{ PI}$, A partir de quelle vitesse débitante l'écoulement est turbulent ($Re = 3000$) ? Quel est le débit correspondant ? Conclure.

→ **Interprétation du nombre de Reynolds selon les temps caractéristiques de diffusion et convection**

Compétence : interpréter le nombre de Reynolds comme le rapport d'un temps caractéristique de diffusion de quantité de mouvement sur un temps caractéristique de convection

Pour un transport par convection à la vitesse U , on obtient facilement le temps caractéristique de convection τ_{conv} à partir de la taille caractéristique de l'écoulement L :

$$\tau_{conv} = \frac{L}{U}$$

Pour un transport par diffusion, on peut directement raisonner par analogie avec la diffusion de particules par exemple :

Pour plus de précision, intéressons-nous à un écoulement de Couette plan selon (Ox) , et appliquons le PFD dans un champ de pression uniforme (pour simplifier la

situation) en projection sur (Ox) , à une particule de fluide de volume élémentaire dV et de masse dm :

$$dm \frac{\partial v}{\partial t} = dF_{viscosité,x} = \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} dV$$

$$\rightarrow \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\eta}{\mu} \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = 0$$

Cette expression est à rapprocher de l'équation de diffusion de particules :

$$\frac{\partial n}{\partial t} - D \frac{\partial^2 n}{\partial y^2} = 0$$

Par analyse en ordre de grandeurs de cette équation aux dérivées partielles de la vitesse, on identifie le temps typique de diffusion : $\tau_{diff} = \frac{L^2}{D} = \frac{\mu L^2}{\eta}$

On peut alors construire le nombre de Reynolds comme le rapport de ces temps caractéristiques :

$$Re = \frac{\tau_{diff}}{\tau_{conv}} = \frac{\mu U L}{\eta}$$

$$\tau_{diff} \ll \tau_{conv} \Leftrightarrow Re \ll 1$$

-> la diffusion domine la convection, écoulement laminaire

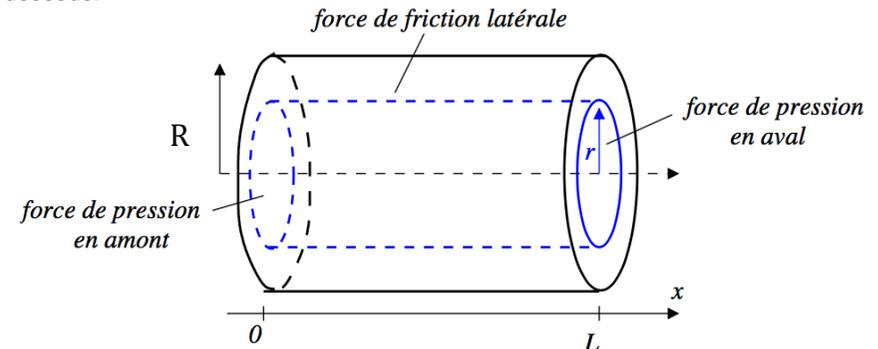
$$\tau_{diff} \gg \tau_{conv} \Leftrightarrow Re \gg 1$$

-> la convection domine la diffusion, écoulement turbulent

3. Chute de pression dans une conduite horizontale

3.1 Description du problème

On s'intéresse à l'écoulement d'un **fluide incompressible et homogène** au sein d'une **canalisation cylindrique** de rayon R , représentée sur le schéma ci-dessous.



Suite à la **viscosité du fluide** qui agit au niveau du **contact fluide/paroi latérale** de la conduite, un **gradient de pression** doit être appliqué afin de permettre l'écoulement : une **pression plus élevée** est **imposée en amont** de l'écoulement. Le but de notre modélisation sera de préciser cette **chute de pression le long de l'écoulement** en fonction des caractéristiques de la conduite.

Ressource: <http://culturesciencesphysique.ens-lyon.fr/la-physique-animee/la-physique-animee-une-serie-de-videos-de-physique>

3.2 Expression du champ de vitesse et profil de vitesse

Nous nous plaçons d'abord dans le cas d'un **écoulement laminaire** et régulier, qui autorise une modélisation plus simple qu'un écoulement turbulent.

En raisonnant sur les symétries du système étudié : **symétrie par rotation** autour de l'axe et **écoulement unidirectionnel** selon (Ox), on attend un champ de vitesse en **régime stationnaire** de la forme : $\vec{v} = v_x(r, x) \vec{u}_x$ en coordonnées cylindriques adaptées à la situation, et le champ de pression $P(M, t) = P(r, x)$.

L'écoulement est incompressible et homogène donc $div \vec{v} = 0$: le **débit volumique se conserve à travers la canalisation** qui constitue un tube de champ. La **vitesse** est donc **constante le long du tuyau de section constante** : elle ne dépend pas de x. On retrouve ce résultat en exprimant la divergence en coordonnées cylindriques :

$$div \vec{v} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0$$

Il nous reste donc à préciser la dépendance selon r pour établir le profil de vitesse.

On se place **en régime stationnaire où l'accélération d'une particule de fluide est nulle** (même vitesse au cours du temps).

Vérification : expression de la dérivée particulaire de la vitesse

→ Exprimer les forces élémentaires de pression et de viscosité selon (Ox) qui s'exerce sur une particule de fluide comprise entre x et x+dx, et entre 0 et r.

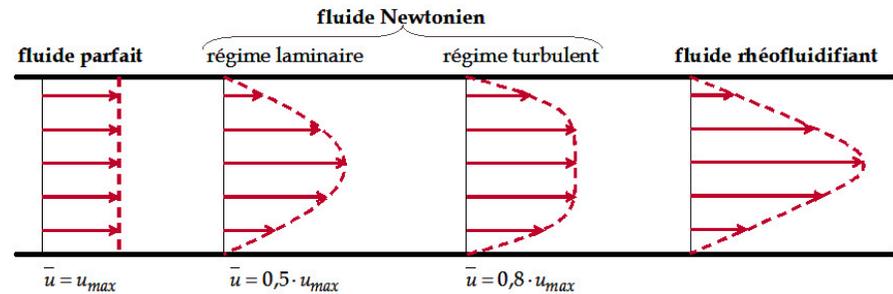
On néglige la pesanteur du fluide car les lignes de courant sont horizontales pour une conduite -> alors $P(r, x) = P(x)$

→ Exploiter le caractère stationnaire de l'écoulement pour obtenir une première équation différentielle reliant les champs de pression et de vitesse pour ensuite obtenir le profil de vitesse :

$$v_x(r) = \frac{\Delta P}{4\eta L} (R^2 - r^2) \quad \text{avec } \Delta P = P(x=0) - P(x=L) \text{ la chute de pression}$$

Résoudre en faisant apparaître $dP/dx = \text{cste}$ et tracer son évolution

Le champ de vitesse présente donc un **profil parabolique**, avec vitesse maximale au centre, et nulle au contact de la paroi latérale (ci-contre en haut).
En revanche **en régime turbulent**, le profil tend vers l'allure ci-dessous : le champ est quasi-uniforme, sauf au voisinage des parois. Précisons que ce profil est établi après un moyennage temporel pour filtrer les effets de la turbulence.



3.3 Écoulement à bas nombre de Reynolds : débit volumique et résistance hydraulique selon la loi de Hagen-Poiseuille

Compétence : dans le cas d'un écoulement à bas nombre de Reynolds établir la loi de Hagen-Poiseuille et en déduire la résistance hydraulique

→ **Loi de Hagen-Poiseuille**

→ Établir la loi de Hagen-Poiseuille qui relie le **débit volumique D_V** à la **chute de pression ΔP** pour un écoulement laminaire, incompressible et homogène, dans une conduite :

$$D_V = \frac{\pi R^4 \Delta P}{8\eta L}$$

Retrouvons cette loi en ordre de grandeurs !!!

- bilan global des forces pressantes : $F_{\text{pression}} \sim \Delta P S_{\text{section}} = \Delta P \pi R^2$
- bilan global des forces de viscosité :

$$F_{\text{viscosité}} \sim \eta \left| \frac{\partial v}{\partial r} \right| S_{\text{LAT}} \sim \eta \frac{U}{R} 2\pi R L = 2\pi \eta U L = 2\pi \eta \frac{D_V}{R^2} L$$

Réalisons l'égalité des forces à l'équilibre : $F_{\text{pression}} \sim F_{\text{viscosité}}$

$$\Delta P \pi R^2 \sim 2\pi \eta \frac{D_v}{R^2} L$$

Donc

$$D_v \sim \frac{R^4}{\eta} \frac{\Delta P}{L}$$

→ Calculer la surpression (en bar) à appliquer en amont d'un écoulement d'huile $\eta \approx 1$ Pl, pour une conduite de 1 cm de diamètre, et pour un débit volumique visé de 0,1 L.s⁻¹ pour une longueur de conduite L = 1 m.

Vérifier le caractère laminaire de l'écoulement après avoir estimé la vitesse débitante ($\mu = 900$ kg.m⁻³ pour l'huile).

→ Résistance hydraulique

Le **débit volumique** et la **différence de pression** étant **proportionnels**, on peut définir la notion de résistance hydraulique par analogie avec l'électrocinétique :

électrocinétique	écoulement laminaire
intensité I	débit volumique D_v
différence de potentiel ΔV	différence de pression ΔP
Résistance électrique $R = \frac{\Delta V}{I} = \frac{L}{\sigma S}$	Résistance hydraulique $R_{hyd} = \frac{\Delta P}{D_v} = \frac{8\eta L}{\pi R^4}$

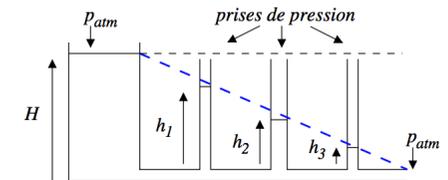
Remarque : la différence de dépendance concernant le rayon R s'explique par une vitesse non uniforme dans le cas de l'écoulement hydraulique.

3.4 Cas général : coefficient de perte de charge selon le régime d'écoulement

→ Chute de pression et coefficient de perte de charge en régime laminaire

La loi de Hagen-Poiseuille montre que la pression chute linéairement avec la longueur du tube : $\Delta P = \frac{8\eta D_v L}{\pi R^4}$

Cette chute de pression, ou perte de charge, serait nulle en l'absence de viscosité.



Nous allons alors chercher à ré-exprimer cette chute de pression en fonction de **nombres sans dimension caractéristiques de l'écoulement**.

On remarque d'abord que le travail des forces de pression $\delta W = -P dV$ montre que la **pression est homogène à une énergie volumique**. Nous allons donc chercher à comparer la chute de pression à l'énergie cinétique volumique de l'écoulement s'effectuant à la vitesse débitante U :

A partir de l'énergie cinétique $E_c = \frac{1}{2} m U^2$ « classique », on construit donc **l'énergie cinétique volumique** : $E_{c,v} = \frac{1}{2} \mu U^2$

On définit alors un premier nombre sans dimension le **coefficient de perte de charge Λ** , ou **coefficient de friction f** (selon la rugosité de la conduite), pour exprimer la relation entre la perte de charge et cette énergie cinétique :

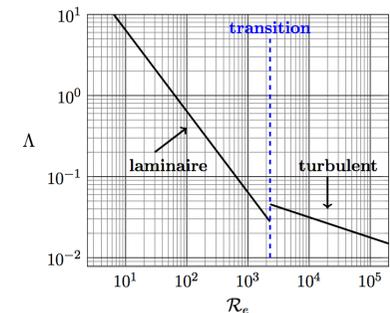
$$\Delta P = \Lambda \left(\frac{L}{D} \right) \frac{1}{2} \mu U^2$$

Il intervient dans cette expression le **nombre sans dimension L/D**, qui est le rapport de la longueur de la conduite par son diamètre. La **chute de pression** est ainsi bien définie : **proportionnelle à la longueur** de la conduite.

→ Montrer que dans le cas du régime laminaire, le coefficient de perte de charge s'exprime « simplement »

$$\text{par : } \Lambda = \frac{64}{Re}$$

On représente alors la courbe de ce coefficient en fonction du nombre de Reynolds. En représentation log-log, on identifie une pente de -1 pour le régime laminaire, décrit par la loi de Hagen-Poiseuille.

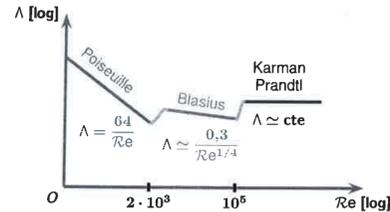


→ Chute de pression et coefficient de perte de charge en régime turbulent

En régime turbulent, aucune théorie générale n'est applicable mais des comportements expérimentaux ont pu être dégagés pour $Re > 2000$.

Quand on néglige la rugosité de la surface de la conduite, le coefficient de perte de charge est assez bien décrit par la formule de Blasius :

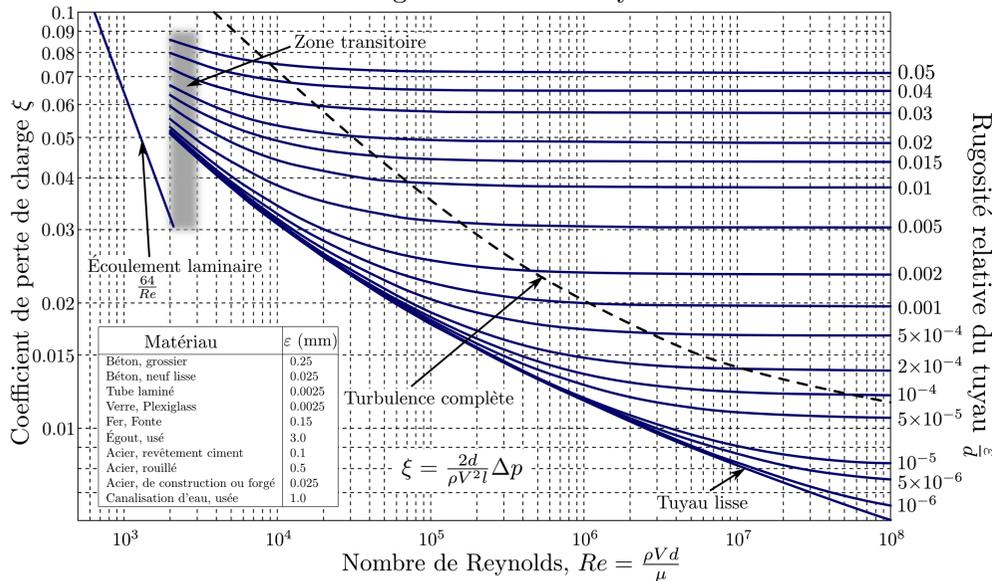
$$\Lambda \cong \frac{0,316}{Re^{1/4}} \text{ pour } Re < 10^5 \text{ (voir graphe ci-contre).}$$



Lorsqu'on intègre la rugosité de la conduite avec une hauteur typique ε des aspérités, on définit un nouveau **nombre sans dimension ε/D** qui représente la **rugosité relative**, avec D le diamètre de la conduite.

Pour $Re > 2300$, on peut utiliser le diagramme de Moody (1944 ci-dessus), qui repose sur l'équation de Colebrook (1939).

Diagramme de Moody



L'analyse de cette courbe conduit aux conclusions suivantes :

- plus le tuyau est rugueux, plus le coefficient de friction est élevé : il faut un gradient de pression supérieur pour mettre le fluide en mouvement
- on peut aussi y remarquer un coefficient de friction environ constant pour des rugosités non négligeables : la perte de charge est alors proportionnelle à U^2 et donc à DV^2 , alors qu'en régime laminaire elle est proportionnelle au débit. Il faut **diminuer le débit pour diminuer le différentiel de pression** nécessaire, et diminuer les coûts de fonctionnement des pompes assurant l'écoulement.

Remarque : on parle de **perte de charge régulière** dans les cas traités ici, où la conduite est rectiligne (section constante). Dans le cas de coudes, robinets, de changement de section, on parle de **pertes de charge singulières**.

Compétence : exploiter le graphe de la chute de pression en fonction du nombre de Reynolds pour un régime d'écoulement quelconque

→ Evaluer la chute de pression pour un tuyau de longueur $L = 100$ m, de rayon $R = 10$ cm, pour un écoulement de vitesse débitante $U = 1$ m.s⁻¹. La viscosité de l'eau est $\eta = 10^{-3}$ Pa.s avec $\rho = 1000$ kg.m⁻³, avec une rugosité de $\varepsilon = 0,26$ mm. Estimer la puissance nécessaire pour maintenir cette écoulement.

3.5 Similarité : transposition des conditions expérimentales

Compétence : exploiter un paramétrage adimensionné permettant de transposer des résultats expérimentaux ou numériques sur des systèmes similaires réalisés à des échelles différentes

Des écoulements sont similaires si leurs nombres de Reynolds sont identiques.

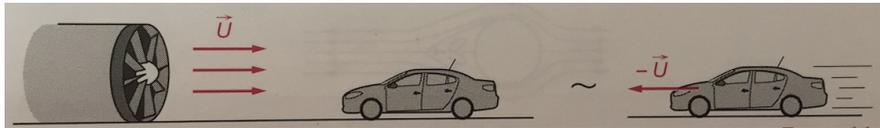
→ Des conditions expérimentales différentes (fluide, vitesse, diamètre) peuvent conduire à des écoulements similaires à condition que le nombre de Reynolds reste le même

→ Ainsi pour une maquette à l'échelle 1/100, on peut, par rapport à la situation réelle, multiplier la vitesse par environ 10, si on remplace l'air par de l'eau

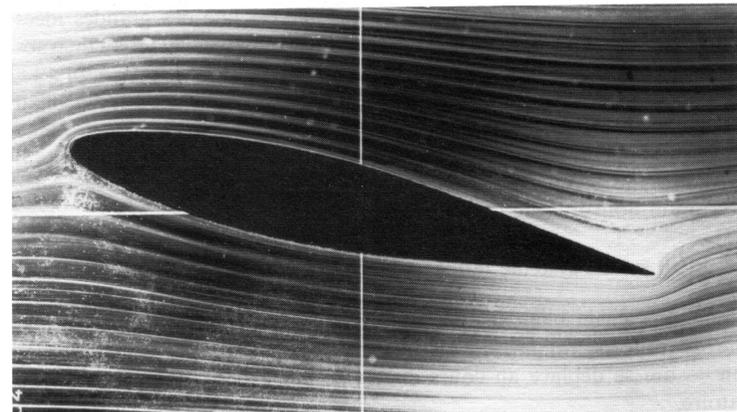
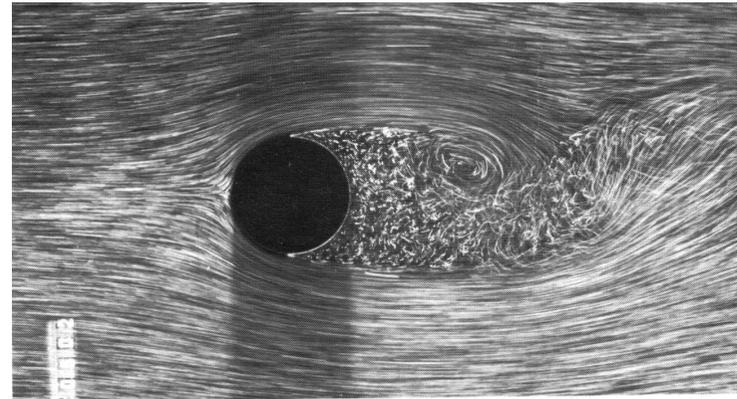
IV. Écoulement externe incompressible et homogène autour d'un obstacle

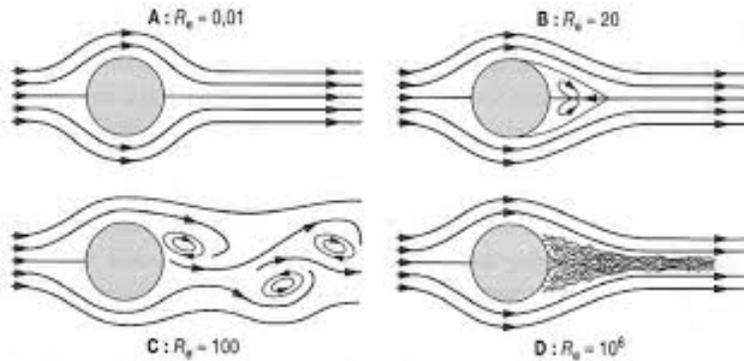
1. Description de l'écoulement, forces de traînée et de portance

On s'intéresse maintenant à l'écoulement d'un **fluide incompressible autour d'un obstacle** : il est qualifié d'**écoulement externe**, car il est libre, sans contrainte avec une quelconque paroi, au loin de l'obstacle.
Par principe de relativité galiléenne, la situation d'un écoulement de vitesse (uniforme à l'infini) autour d'un obstacle immobile est équivalente à un obstacle en mouvement à la vitesse $-U$ dans un fluide immobile à l'infini. Pour étudier l'aérodynamisme d'un véhicule, on effectuera donc des mesures en soufflerie sur ce véhicule immobile, plutôt que de déplacer le véhicule.



→ Les différents régimes d'écoulement en fonction du nombre de Reynolds



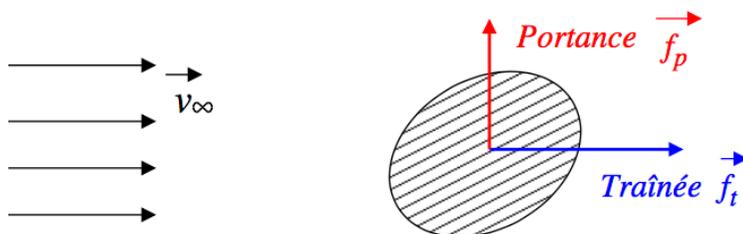


On distingue **différents comportements** d'écoulement **en fonction du nombre de Reynolds**, comme indiqué par l'allure des lignes de courant ci-dessus pour un écoulement autour d'une sphère fixe (comportement similaire pour des objets de formes différentes) :

- (A) à **faible R_e** , typiquement $R_e < 1$: l'écoulement est **laminaire** et symétrique
- (B) pour $R_e \approx 20$, la symétrie entre amont et aval de l'écoulement est rompue, un **sillage apparaît** derrière la sphère, composé d'un anneau tourbillonnaire
- (C) pour $R_e \gtrsim 100$, des structures plus complexes apparaissent dans le sillage, la **dimension des tourbillons augmente**, ils se détachent de la sphère, formant une allée de Bénard-Von Karman
- lorsque $R_e \gtrsim 1000$, le **sillage** devient complètement **turbulent** avec un fort caractère aléatoire des fluctuations spatio-temporelles, l'écoulement n'est **aucunement stationnaire**. Pour $R_e > 10^6$ (D), le sillage finit par se réduire notablement en taille, dissipant moins d'énergie

→ Définitions des forces de traînée et de portance

Le fluide en écoulement exerce sur l'obstacle une action de contact, dont l'origine sont les forces de pression et de viscosité. La force de traînée qui en résulte a déjà été introduite dans le cours de mécanique de PCSI lors de la chute visqueuse d'un objet. Dans le cas le plus général, cette force de contact est modélisée par deux composantes : la **traînée parallèle à la vitesse** de l'écoulement, et la **portance perpendiculaire à la vitesse** (représentées ci-dessous).



Notons ici que la **force de portance est nulle** dans le cas d'un écoulement **autour d'une sphère par symétrie**.

→ Coefficients de traînée et de portance

En l'absence de solution analytique simple pour les écoulements autour d'un obstacle (notamment en régime transitoire ou turbulent), on définit **deux coefficients empiriques, sans dimension, pour modéliser ces forces** :

- le **coefficient de traînée C_x** : $F_t = C_x \frac{1}{2} \mu U^2 S$

- le **coefficient de portance C_z** : $F_p = C_z \frac{1}{2} \mu U^2 S$

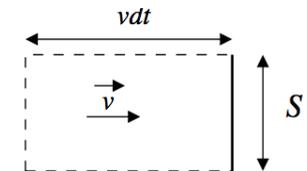
La surface S , appelée maître-couple, représente la surface de contact de l'obstacle avec l'écoulement, il s'agit de la surface projetée de l'obstacle : par exemple perpendiculairement à la vitesse pour C_x . Elle est déterminée en fonction du profilage de l'obstacle.

Le terme $\frac{1}{2} \mu U^2$ est appelé **pression dynamique**, puisque le terme $\mu U^2 S$ est homogène à une force. Cette force peut être interprétée comme la force exercée par le fluide venant frapper une plaque de section S et y étant arrêté (point d'arrêt à vitesse nulle).

En effet, la variation de quantité de mouvement pour le fluide incompressible qui passe d'une vitesse U à 0 est :

$$\delta p = 0 - dm U = -\mu dV U = -\mu (U dt S) U$$

D'où $F_{fluide \rightarrow S} = -\frac{\delta p}{dt} = \mu U^2 S$



2. Notion de couche limite

Compétence : pour les écoulements à grand nombre de Reynolds décrire qualitativement la notion de couche limite

→ Nécessité de la couche limite

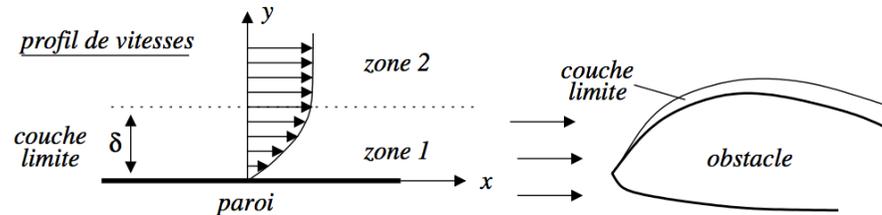
Pour les écoulements à **nombre de Reynolds élevé**, les **effets de la viscosité apparaissent négligeables**. Il est donc légitime de se placer dans le **modèle de l'écoulement parfait au loin de l'obstacle**.

Cependant, la condition d'adhérence impose la nullité de la vitesse tangentielle au contact de l'obstacle, quelque soit R_e . Ainsi **au voisinage immédiat des parois**, il existe une zone, appelée **couche limite**, dans laquelle la **viscosité** est

dominante, imposant une **diminution de la vitesse** de l'écoulement jusqu'à sa **nullité au contact**.

L'**épaisseur de cette couche limite augmente avec la viscosité** du fluide, et **diminue à Re élevé**, elle s'étend fortement en régime laminaire jusqu'à « envahir » l'écoulement.

En résumé, sur l'illustration de la couche limite ci-dessous, dans la zone 1 -> modèle de l'écoulement parfait, et dans la zone 2 -> fort gradient de vitesse : la viscosité domine.



→ Estimation de l'épaisseur de la couche limite

Il est possible d'estimer en ordre de grandeurs l'**épaisseur δ de la couche limite**. Nous allons comparer l'énergie cinétique volumique de l'écoulement, qui représente l'énergie transportée par convection, à l'énergie volumique dissipée par les forces de viscosité :

- **énergie cinétique volumique, transport par convection** (ou pression dynamique) : $E_{c,v} \sim \mu U^2$

- **énergie volumique dissipée par viscosité** sur l'ensemble de la couche limite, **transport par diffusion**, soit pour une particule de fluide qui parcourt cette couche le long de l'obstacle de taille caractéristique L :

$$dE_{viscosité,v} = \vec{F}_{visc,v} \cdot d\vec{l} \rightarrow E_{viscosité,v} \sim F_{visc} L$$

avec $F_{visc,v} = \eta \Delta v \sim \eta \frac{U}{\delta^2}$: pour la couche limite, la vitesse varie entre U et 0 , sa distance caractéristique de variation spatiale est δ .

A la frontière de la couche limite, les effets de convection et de diffusion par viscosité en compétition sont du même ordre : $E_{viscosité,v} \sim E_{c,v}$

$$\text{Soit } \eta \frac{U}{\delta^2} L = \mu U^2 \rightarrow \delta^2 \sim \frac{\eta}{\mu U} L = \frac{\eta}{\mu U L} L^2 = \frac{L^2}{Re} \rightarrow \boxed{\delta = \frac{L}{\sqrt{Re}}}$$

→ Estimer l'épaisseur de la couche limite pour une voiture qui roule à la vitesse $U = 100 \text{ km.h}^{-1}$, avec une viscosité de l'air $\eta = 1,8 \cdot 10^{-5} \text{ Pa.s}$.



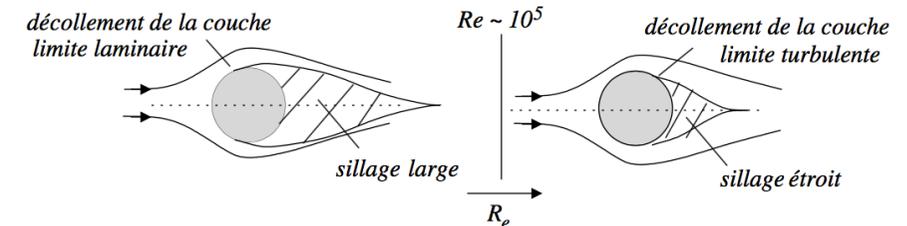
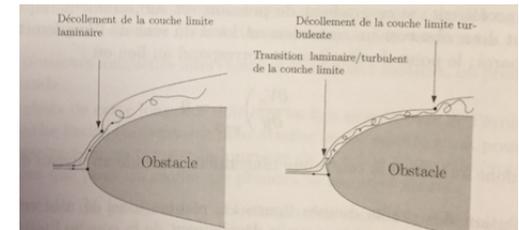
La **couche limite** est très mince par rapport à la taille de l'obstacle, elle demeure **localisée au voisinage immédiat des parois pour un écoulement turbulent**.

Remarque : dans la réalité, cette épaisseur varie sur le contour de l'obstacle (avec le chemin parcouru par exemple).

→ Comportement de la couche limite à grand nombre de Reynolds

Lorsque le **nombre de Reynolds augmente**, la **couche limite s'affine**. A l'apparition du sillage complètement turbulent en aval de l'écoulement correspond un **décollement de la couche limite pour $Re = 10^3$** . Elle se décolle d'abord en arrière de l'obstacle. Puis, lorsque Re augmente, les points de décollement migrent en amont de l'obstacle. Le sillage s'élargit (entre (C) et (D) cf paragraphe IV.1), **la force de traînée augmente**.

Enfin, lorsque $Re \approx 10^6$ l'**écoulement laminaire dans la couche limite devient turbulent**. Ce changement brusque de régime dans la couche limite s'accompagne d'une diminution de la taille du sillage (voir ci-dessous), la couche limite turbulente tient mieux à l'obstacle **réduisant fortement la force de traînée** (diminution du C_x).



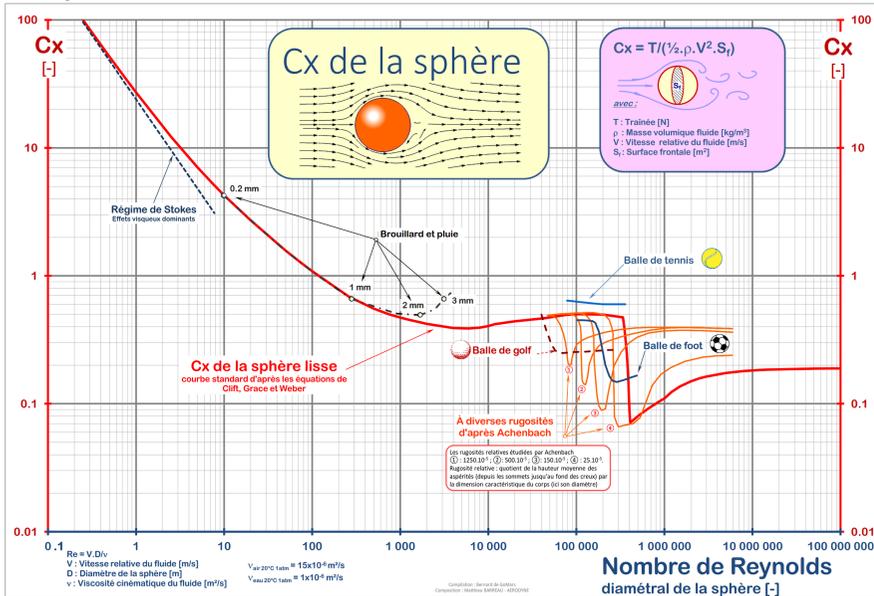
3. Force de traînée subie par une sphère solide

Notions :

- force de traînée subie par une sphère solide en mouvement rectiligne uniforme
- coefficient de traînée C_x
- graphe de C_x en fonction du nombre de Reynolds

→ Résultats expérimentaux : évolution du C_x en fonction de Re

La courbe ci-dessous, résultant de données expérimentales, représente l'évolution du C_x pour une sphère solide dans un écoulement uniforme, en fonction du nombre de Reynolds.



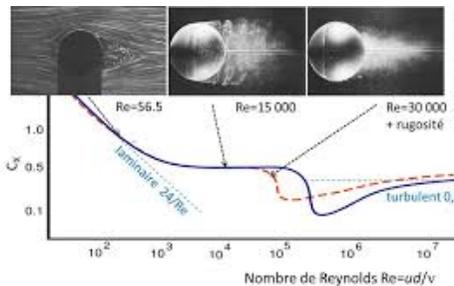
On peut dégager principalement **deux comportements** asymptotiques pour l'évolution du coefficient de traînée :

- en régime laminaire à faible nombre de Reynolds $R_e < 1$: $C_x = 24/R_e$ (pente -1 en log-log).

- en régime turbulent à fort nombre de Reynolds pour $10^3 < R_e < 10^5$: $C_x \approx 1/2$ constant

→ **Modèle de traînée linéaire en régime laminaire**

Compétence : associer une gamme de nombre de Reynolds à un modèle de traînée linéaire ou un modèle quadratique



→ A partir de l'expression de $C_x = 24/R_e$, établir l'expression de l'intensité de la force de traînée F_t .

A faible R_e : $R_e < 1$, la force de traînée vérifie la formule de Stokes, valable en l'absence de transport par convection : $\vec{F}_t = 6\pi \eta R \vec{U}$
C'est le **modèle de traînée linéaire** que nous retiendrons pour un écoulement laminaire.

Pour une sphère se déplaçant à la vitesse \vec{v} dans un fluide, la force de traînée exercée sur la sphère est $\vec{F}_t = -6\pi \eta R \vec{v}$

Nous remarquons que la force de traînée est alors indépendante de la masse volumique du fluide : les **effets inertiels, transport par convection**, sont dominés par la viscosité, transport par diffusion. Le fluide n'est pas « arrêté » par l'obstacle mais glisse autour de celui-ci, la force de traînée est associée au frottement du fluide sur la sphère : on parle de **traînée de frottement**.

Remarque : la résultante des forces de pression est nulle car l'écoulement est symétrique entre amont et aval.

→ **Modèle de traînée quadratique en régime turbulent**

Compétence : associer une gamme de nombre de Reynolds à un modèle de traînée linéaire ou un modèle quadratique

A fort R_e la force de traînée s'exprime par $\vec{F}_t = C_x \frac{1}{2} \rho U \vec{U} S$
C'est le **modèle de traînée quadratique** que nous retiendrons pour un écoulement turbulent.

En régime turbulent, la traînée est donc proportionnelle au carré de la vitesse, et à la masse volumique, intégrant les **effets inertiels dominants** (la viscosité n'intervient plus). La force a pour origine une pression plus faible dans la zone de sillage qu'en amont, l'écoulement n'est plus symétrique. Dans la pratique, le coefficient C_x peut être ajusté par modification du profil aérodynamique, notamment pour diminuer la traînée des véhicules, des ailes d'avion....

Compétence : évaluer un nombre de Reynolds pour choisir un modèle de traînée linéaire ou un modèle quadratique

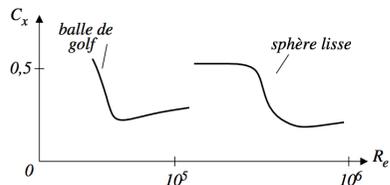
Application : force de traînée sur une balle de tennis

Une balle de tennis est servie à $v = 200 \text{ km.h}^{-1}$. Son rayon est $R = 3,3 \text{ cm}$, la viscosité dynamique de l'air est de $1,8.10^{-5} \text{ Pl}$.

Evaluer le nombre de Reynolds de cet écoulement, puis la force de traînée subie par la balle. On prendra $C_x = 0,6$ (voir graphe de C_x en fonction de Re).

Evaluer la puissance nécessaire à développer pour le serveur. Puis comparer la force de traînée au poids de la balle, de masse $m = 58 \text{ g}$.

➔ **Focus sur une singularité à Re élevé : la crise de traînée**

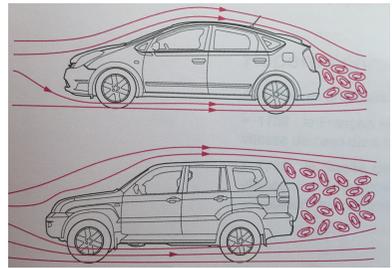
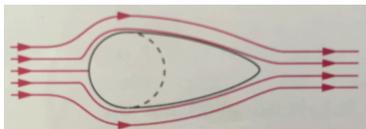


Pour une sphère lisse et $Re > 3.10^5$, on observe une chute brutale du coefficient de traînée. L'écoulement au sein de la couche limite devient turbulent, le sillage est donc réduit comme la zone de faible pression, ce qui **diminue brutalement la force de traînée**. C'est la **crise de traînée**.

Les irrégularités de surface amplifient ce phénomène, et pour des sphères rugueuses, cette transition se produira pour un nombre de Reynolds plus faible (voir ci-dessus). Cette crise de traînée est mise à profit dans le cas des balles de golf pour réduire leur traînée et augmenter leur portée !

➔ **Influence du profilage sur la traînée : au-delà de l'obstacle sphérique**

Nous avons vu que le coefficient de traînée augmente lorsque le sillage en aval augmente. Une solution pour limiter ce décollement de la couche limite, et la force de traînée, est le **profilage de l'obstacle** : on peut l'allonger en direction de l'aval de l'écoulement pour limiter l'étendue du sillage (ci-contre). La forme des casques des cyclistes adopte cette solution.



Prenons le cas des deux véhicules présentés ci-contre.

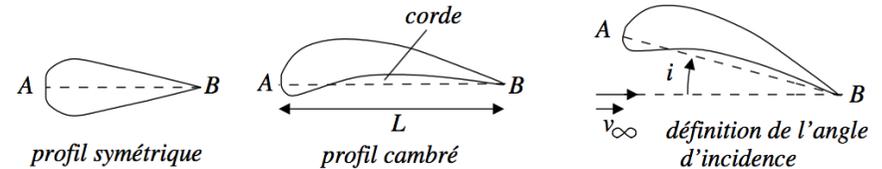
La voiture du haut est assez bien profilée : on parle d'une carrosserie du type « fastback », descendant assez continuellement depuis le toit jusqu'à son arrière.

En revanche, l'autre véhicule est mal profilé : carrosserie « hatchback », engendrant un décollement plus fort de la couche limite, et une traînée supérieure.

4. Traînée et portance d'une aile d'avion

➔ **Description du profil d'une aile et de son angle d'incidence**

Une aile d'avion est un **obstacle profilé** pour lequel on attend une **faible traînée** et une **portance notable**. Les coefficients de traînée C_x et de portance C_z dépendent du nombre de Reynolds mais aussi de **l'inclinaison de l'aile** (voir ci-



dessous). En vol stationnaire, la force de portance devra compenser le poids. On définit aussi la **finesse $F = C_z / C_x$** : on aura intérêt à obtenir la finesse la plus élevée possible.

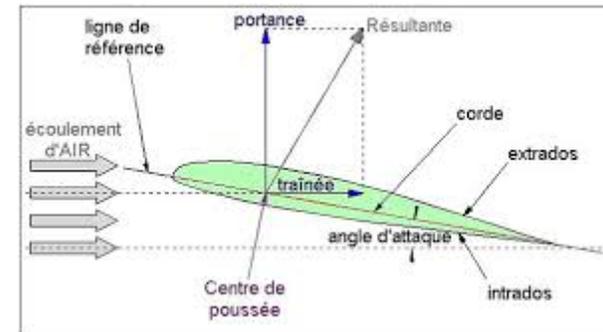
Pour un **angle d'incidence nul** et un **profil symétrique**, la **portance est nulle**.

La partie dorsale de l'aile est appelée **extrados**, sa partie ventrale l'**intrados**. L'**extrados** est toujours plus convexe que l'extrados, qui peut être concave ou plane. La partie de l'aile de courbure maximale et faisant face à l'écoulement est le **bord d'attaque**, l'autre est le **bord de fuite**, reliés par un segment, la **corde**. L'**angle d'incidence** (ou d'attaque, positif ou négatif) est l'angle entre la direction du vent relatif et la corde.

Le **maître couple S** intervenant dans la définition des coefficients de traînée et de portance est le produit de la corde par l'envergure : $S = \text{corde} * L_{env}$.

➔ **Forces de traînée et de portance**

Ces forces sont orientées selon le schéma ci-dessus. Leur point

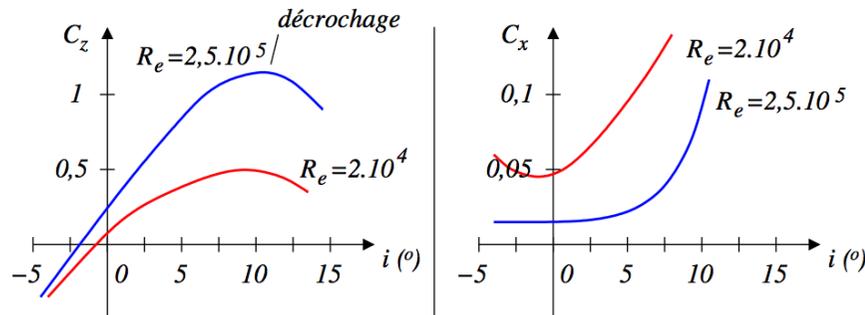


d'application est le centre de poussée de l'aile. Dans le cas d'un profil cambré ou d'une incidence non-nulle, on constate que l'écoulement est dévié par la présence de l'aile (voir illustration en IV. 1). Il existe donc une accélération verticale du fluide, et, par le théorème des actions réciproques (3^{ème} loi de Newton), une force qui s'exerce sur l'aile de sens opposé, dirigée vers le haut : la portance.

→ **Influence de l'angle d'incidence et du nombre de Reynolds**

Les courbes ci-dessous montrent l'allure des coefficients de traînée et de portance en fonction de l'angle d'incidence pour différentes valeurs du nombre de Reynolds. Pour un avion, les valeurs de R_e sont élevées.

• **influence du nombre de Reynolds**

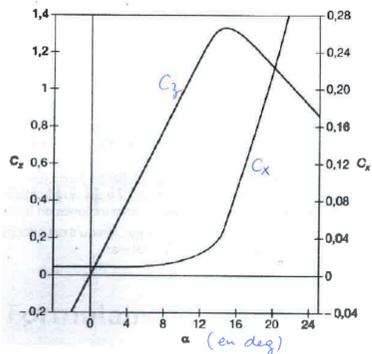


- le coefficient de portance C_z a tendance à augmenter avec R_e
- le coefficient de traînée C_x est faible, et il diminue quand R_e augmente
- C_z est supérieur à C_x aux angles d'incidence faibles

• **influence de l'angle d'incidence**

Compétence : exploiter les graphes de C_x et de C_z en fonction de l'angle d'incidence

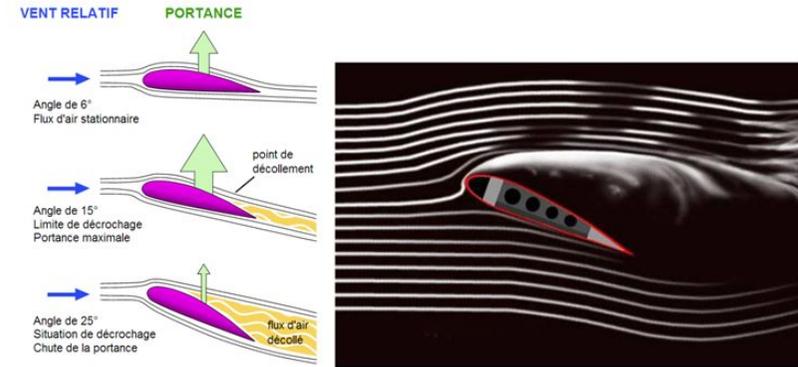
Le graphe ci-contre présente les variations des coefficients en fonction de l'angle, pour $R_e \approx 10^6$.



- pour des angles faibles, la **traînée est très faible** $C_x \approx 0,01$ grâce au profilage, elle augmente faiblement et quasi linéairement avec l'incidence, on note un changement brusque de comportement pour une incidence supérieure à 15°
- la **portance augmente nettement avec l'angle d'incidence**. La vitesse est en fait plus élevée sur

l'extrados que l'intrados, provoquant une différence de pression par circulation de la vitesse autour de l'aile, ce qui engendre la portance. Mais **au-delà de 15°** , on observe aussi un **changement de régime avec diminution forte de la portance**. http://web.mit.edu/13.021/13021_2003/Lifting%20surfaces/lectureC.htm

On parle alors de **décrochage**, à éviter absolument, car il conduit à la **chute de**



Décrochage de l'aile en soufflerie et schéma explicatif

l'avion difficile à maîtriser. Le décrochage est caractérisé par un décollement de la couche limite, directement en aval du bord d'attaque (voir illustration précédente). Un sillage turbulent apparaît sur la quasi-totalité de l'extrados. Pour retarder l'apparition du décrochage, et permettre des portées importantes à plus faibles vitesses, il faut contrôler la couche limite. Les techniques utilisées sont :

- optimiser la forme et la rugosité de la surface de l'aile
 - utiliser des volets de bord d'attaque (fig 28) pour injecter de l'air à haute vitesse sur l'extrados et retarder le décollement
 - utiliser des volets de bord de fuite (fig 28) pour réorienter une plus grande quantité d'air vers l'intrados, et augmenter la portance
- Les volets sont surtout déployés à l'atterrissage pour obtenir une portance plus élevée à faible vitesse.

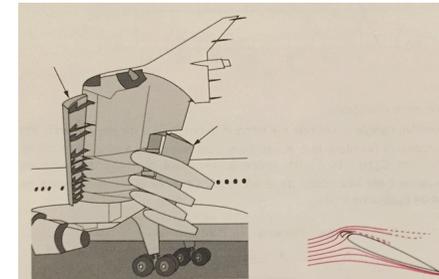
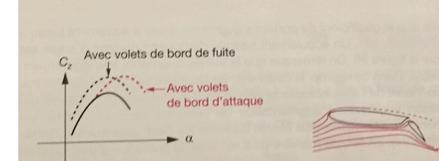


Figure 28

→ **Exemples illustrant la mécanique d'un vol**

Compétence : définir et orienter les forces de portance et de traînée

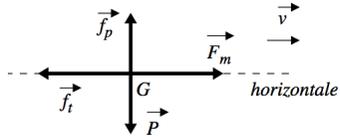




La trajectoire et la configuration de vol de l'avion dans l'espace sont définis à l'aide de trois angles orientés représentés sur la figure ci-après :

- la pente p , angle entre l'horizontale et la trajectoire de l'avion
- l'assiette A , angle entre l'horizontale et l'axe longitudinal de l'avion
- l'incidence i , angle entre la trajectoire de l'avion et son axe longitudinal

L'avion est soumis à quatre forces : son poids, la force motrice selon l'axe longitudinal de l'avion, la traînée opposée à la trajectoire et la portance perpendiculaire à la trajectoire.



Dans le cas d'un vol horizontal ($p = 0$) à vitesse constante, et avec une incidence nulle ($i = 0$), le schéma des forces prend alors la forme simplifiée :

Le vol à vitesse constante impose :

$$\vec{f}_t + \vec{f}_p + \vec{F}_m + \vec{P} = \vec{0}$$

Et en particulier, par projection et en norme : $F_m = f_t$ et $P = f_p$, ce qui donne pour la force motrice :

$$F_m = \frac{mg}{C_z/C_x} = \frac{mg}{f}$$

où $f = C_z / C_x$ est la finesse

La **force motrice nécessaire est donc d'autant plus faible** que la **finesse** de l'avion est **grande**. La finesse d'un planeur est d'environ 50, celle d'un avion de ligne environ 15.

Connaissant les graphes des coefficients C_z et C_x en fonction de l'incidence, on peut tracer **la polaire donnant C_z en fonction de C_x** . Il est alors possible de lire la valeur de la finesse sur la polaire.

Ci-contre la polaire

$$C_L = C_z = f(C_D = C_x)$$

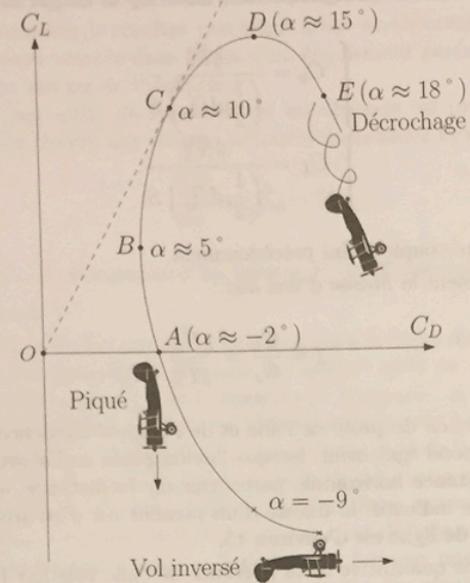


FIGURE 18 - Allure classique d'une polaire

- Le point A de la polaire, correspond à $C_L = 0$. L'angle α correspondant est presque toujours négatif.
- Le point B de la polaire est le point de traînée minimale. Une aile positionnée sous cette incidence permettra d'obtenir une vitesse maximale.
- Le point C de la polaire, tel que (OC) soit tangent à la polaire est le point de finesse maximum, correspondant à une incidence idéale. L'angle correspondant (d'environ 10°), est l'angle sous lequel l'avion doit voler, par vent nul, pour obtenir un rayon d'action maximal.
- Le point D de la polaire, correspondant à un maximum de C_L , détermine l'angle permettant, pour une vitesse donnée, d'emporter une charge maximale. Attention ; au delà de ce point, il y a risque de décrochage !
- Le point E de la polaire, correspond à l'angle de décrochage qui est environ de 18° .
- Si la polaire représentée est celle d'une aile, la polaire de l'aéronef correspondant est décalée vers la droite : en effet, lorsque l'aile est fixée à l'aéronef, vont venir s'ajouter des traînées supplémentaires dues au fuselage, aux empennages, aux moteurs, etc., ainsi qu'aux interactions entre tous ces éléments.

Ce qu'il faut retenir !!

- **Le nombre de Reynolds** Re d'un écoulement vaut :

$$Re = \frac{\mu v L}{\eta}$$

où μ est la masse volumique du fluide, η sa viscosité dynamique, v sa vitesse caractéristique et L l'échelle spatiale caractéristique.

Pour un écoulement dans une conduite cylindrique de rayon R , $L = 2R$ et $Re = \frac{\mu v(2R)}{\eta}$. Si $Re \leq 2000$, l'écoulement est **laminaire**. Il est **turbulent** si $Re \geq 3000$.

- **Le profil de vitesse** pour un écoulement laminaire dans une conduite cylindrique est parabolique. À plus grande vitesse, le profil est quasiment uniforme, sauf aux abords de la surface du tuyau.

• **La loi de Hagen-Poiseuille** exprime la différence de pression à appliquer pour maintenir un écoulement stationnaire laminaire ($Re \leq 2000$) dans une conduite cylindrique de rayon R et longueur L :

$$\Delta P = R_h D_V \quad \text{où} \quad R_h = \frac{8\eta L}{\pi R^4}$$

est la **résistance hydraulique**. La loi de Hagen-Poiseuille est l'analogie de la loi d'Ohm en électrocinétique.

Pour un écoulement turbulent, les lois sont plus complexes et font notamment intervenir la rugosité de la surface de la conduite. Des abaques permettent de réaliser des estimations des chutes de pression ayant lieu.

- Pour un écoulement d'un fluide incompressible (masse volumique μ et viscosité η) autour d'un obstacle fixe, on définit les **forces de traînée** \vec{F}_t (resp. de **portance** \vec{F}_p) comme la force due à l'écoulement et parallèle (resp. perpendiculaire) à la vitesse de l'écoulement au loin notée \vec{U} .

Les coefficients de traînée C_x et de portance C_z se définissent par :

$$F_t = \frac{1}{2} \mu C_x S U^2 \quad F_p = \frac{1}{2} \mu C_z S U^2$$

où S est la section de l'objet ($S = \pi R^2$ pour une sphère de rayon R).

C_x et C_z ne sont fonctions que du nombre de Reynolds de l'écoulement pour un obstacle donné.

À faible nombre de Reynolds ($Re \leq 1$), la force de traînée exercée sur une sphère suit la **loi de Stokes** : elle est proportionnelle à la vitesse \vec{U} , soit :

$$\vec{F}_t = 6\pi\eta R \vec{U}$$

Pour des écoulements turbulents ($10^3 \leq Re \leq 10^5$), la force de traînée est quadratique en la vitesse :

$$\vec{F}_t = \frac{1}{2} \mu C_x \pi R^2 U \vec{U}$$

avec $C_x \approx 0,4$ pour une sphère.

Au-delà, la force de traînée baisse brusquement (crise de traînée), du fait d'un détachement plus tardif de la couche limite.

Pour une sphère en mouvement à la vitesse \vec{v} dans un fluide immobile au loin, les expressions restent valables en remplaçant \vec{U} par $-\vec{v}$.

Complément de cours : polaire d'une aile d'avion

L'air exerce sur l'aile une force appelée « résultante aérodynamique » notée \vec{R} . Cette force peut s'écrire comme la somme vectorielle de deux composantes, la **traînée** \vec{R}_x colinéaire à la vitesse $\vec{V} = V \vec{e}_x$ de l'avion par rapport à l'atmosphère (et de sens opposé) et la **portance** \vec{R}_z perpendiculaire à cette vitesse.

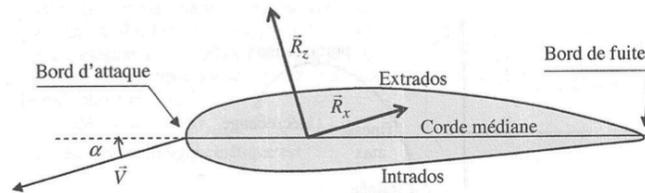
Dans la suite l'avion est supposé voler de telle sorte que la portance soit comprise dans le plan vertical.

Les coefficients sans dimension C_x (de traînée) et C_z (de portance) sont définis par :

$$C_x = \frac{\|\vec{R}_x\|}{\frac{1}{2}\rho S V^2} \quad \text{et} \quad C_z = \frac{\|\vec{R}_z\|}{\frac{1}{2}\rho S V^2}$$

où ρ est la masse volumique du fluide (de l'air ici) et S la **surface alaire** c'est-à-dire l'aire de la projection de l'aile sur un plan parallèle à sa corde médiane, qui va du bord d'attaque au bord de fuite (voir le schéma).

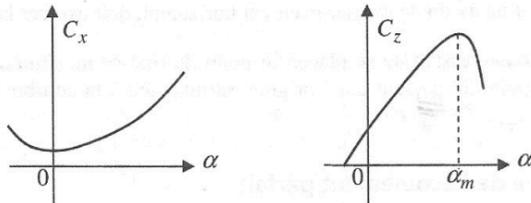
L'angle α est appelé angle d'incidence.



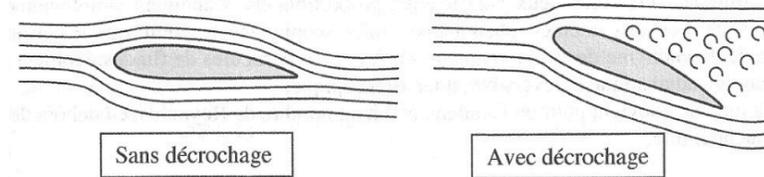
La traînée résulte des forces de viscosité et des forces de pression s'exerçant sur l'aile. Elle est minimale au voisinage de l'incidence α nulle, c'est-à-dire quand l'aile se glisse dans l'écoulement. Elle augmente avec l'incidence, de plus en plus vite (courbe croissante de concavité tournée vers le haut).

La portance est très faible à incidence nulle (elle est même nulle si le profil de l'aile est symétrique) puis elle augmente de façon pratiquement linéaire, jusqu'à atteindre un maximum, pour un angle d'incidence α_m généralement compris entre 15° et 20° . Ensuite la portance s'effondre très vite (décrochage).

Les courbes ont l'allure suivante :



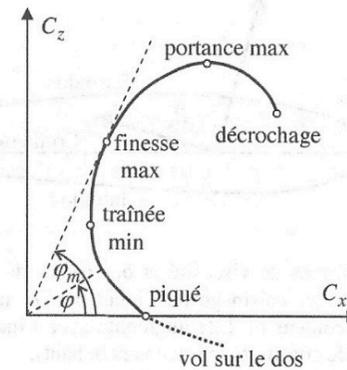
Lors du décrochage, l'allure de l'écoulement change, les lignes de courant ne suivent plus l'extrados et se disloquent en tourbillons.



La courbe $C_z = f(C_x)$ tracée pour différentes valeurs de l'angle d'incidence α est appelée **polaire**. Elle a l'allure ci-dessous.

Parmi les points remarquables, il y a les points correspondants au maximum de la portance et au minimum de la traînée, le point de portance nulle correspondant à un vol en piqué, et le point de décrochage.

On peut, en modifiant la définition de C_z , considérer une partie de courbe où $C_z < 0$, c'est-à-dire où la portance est orientée vers le ventre de l'avion, ce qui correspond à un vol sur le dos.



La finesse est le rapport $f = \frac{C_z}{C_x} = \tan \varphi$, on peut montrer () que

le moteur d'un avion de masse m en vol horizontal, doit exercer la force $\frac{mg}{f}$.

Il est donc intéressant de se placer au point de finesse maximum, obtenu quand la droite en pointillé passant par l'origine est tangente à la courbe. En ce point, on a $f_m = \tan \varphi_m$.