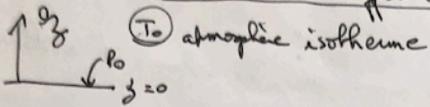


1. Quelle est la différence entre aérostat et sous-marin ?



→ Cas de l'aérostat :

• Déf. du système : ballon + nacelle + enveloppe du ballon seulement
 masse m avec volume V constant pour le ballon (la pression varie peu entre le sol et l'altitude max.)

Le ballon est rempli d'un gaz de densité ρ que l'air, comme de l'hélium de même molaire M_{He} .

L'hélium comme l'air st considérés comme des g.p.

Masse molaire de l'air → $\rho_{air} = \frac{P M_{air}}{R T_0}$

$\rho_{He} = \frac{P M_{He}}{R T_0}$

La pression varie avec l'altitude → $P = P(z)$ ↓ qd z ↑ sans supposer ici de modèle particulier.

• Evolution de l'altitude de l'aérostat

Bilan des forces → $-mg \vec{e}_z + \underbrace{\rho_{air} V g \vec{e}_z}_{\text{force d'Archimède pour le volume d'air déplacé}} - \underbrace{\rho_{He} V g \vec{e}_z}_{\text{force du gaz dans le ballon}}$

Rq) On considère le fluide à l'éq. pdr la montée du ballon.

Le ballon monte si : $-mg - P(z) \frac{M_{He}}{R T_0} V g + P(z) \frac{M_{air}}{R T_0} V g > 0$

→ $-m + P(z) \times \frac{V}{R T_0} (M_{air} - M_{He}) > 0$

$P(z) > \frac{m R T_0}{V (M_{air} - M_{He})}$ → condition respectée au décollage

Puis z ↑ et $P(z)$ ↓ l'altitude d'équilibre sera z_{max}

$P(z_{max}) = \frac{m R T_0}{V (M_{air} - M_{He})}$

→ Cas du sous-marin :

• Déf. du syst : sous-marin de masse m , de volume V évoluant à une profondeur h
 fluide incompressible → $P(h) = p_0 + \rho_{eau} g h$

• Evolution de la profondeur du sous-marin

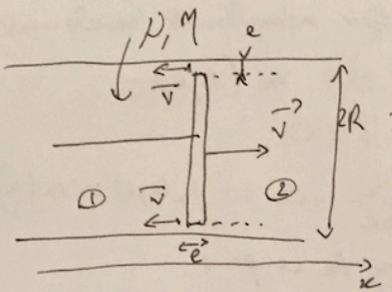
Bilan des forces $-\underbrace{mg \vec{e}_z}_{\text{poids}} + \underbrace{m_f g \vec{e}_z}_{\text{m fluide}}$

Le sous-marin coule naturellement (balastes vidées)

car $m > m_{fluide} \rightarrow -mg + m_f g < 0$

La profondeur h n'intervient pas ! Cette condition est satisfaite (si les balastes sont remplies pour le stabiliser à une profondeur donnée)

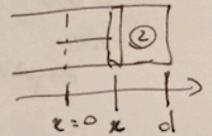
Amortisseur hydraulique pour aller + loin



$\vec{v} = v\vec{x}$ fluide incompressible
 $e \ll R$

- a) Le volume d'huile entre piston et fond de l'amortisseur varie. Le fluide incompressible se déplace donc vers la gauche car il est chassé \rightarrow \vec{v} avec \vec{v} vitesse débitante de ② \rightarrow ①
- b) En se déplaçant le piston entraîne un écoulement à la même vitesse du côté ② avec un débit $v \times S = v \pi (R-e)^2 \approx v \pi R^2$

On peut aussi raisonner avec un schéma



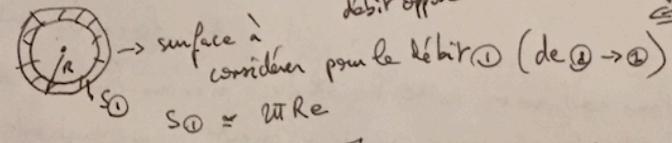
Volume ② = $\pi R^2 (d-x)$

$D_t V_{②} = - \frac{d \text{Volume}_{②}}{dt} = - \pi R^2 \frac{dx}{dt} = - \pi R^2 v$

En prenant un débit positif du fluide dans ②

Le débit se conserve pour le fluide incompressible ($\text{div} \vec{v} = 0$)

Donc $D_t V_{①} = D_t V_{②} \rightarrow - \frac{v_{①} \pi R^2}{e} = - \pi R^2 v$



donc $\vec{v} = - \frac{R}{e} v \vec{x}$

\rightarrow la vitesse débitante est bien + grande entre le piston et la paroi!

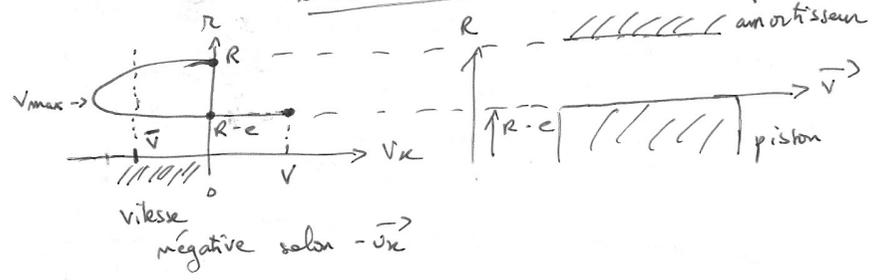
\hookrightarrow son sens est opposé à la vitesse du piston. $\frac{R}{e} \gg 1$

- c) On choisit $\vec{v} = v_x(r) \vec{x}$ en effet naturellement écoulement selon \vec{x} . Par symétrie $v_x(r, \theta, x) = v_x(r, x)$ avec fluide incompressible $\text{div} \vec{v} = 0$

$\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0 \rightarrow v_x(r, x) = v_x(r)$

Représenter $v_x(r)$ selon un schéma de coupe :

Points remarquables : $\frac{v_x(r=R)}{v_x(r=R-e)} = \frac{0}{v}$ } condit d'adhérence

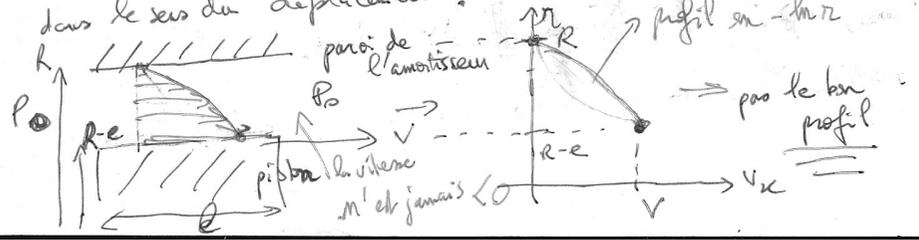


- d) Comme dans le cas d'un écoulement dans une conduite cylindrique, il faut un gradient de pression pour associer un débit à l'écoulement



Δ La force motrice de l'écoulement n'est pas un gradient de pression comme dans Poiseuille mais le déplacement du piston (paroi intérieure cylindrique) qui impose le gradient de pression pour l'équilibre des forces de viscosité.

Pour confirmer cette hypothèse prenons le cas d'un fluide visqueux en écoulement sans gradient de pression dans le sens du déplacement :



En effet, alors PFD selon \vec{e}_r avec $P(r) = P(r)$ et $\vec{v} = v(r)\vec{e}_r$

$$0 = (-\vec{\text{grad}}P + \vec{f}_v, \text{viscosité}) \cdot \vec{e}_r$$

$$0 = -\frac{dP}{dr} + \Delta \vec{v} \cdot \vec{e}_r = -\frac{dP}{dr} + \frac{1}{r} \frac{d(r \frac{dv}{dr})}{dr}$$

Si le gradient de pression le long de l'axe est nul :

$$\frac{dP}{dr} = 0 \rightarrow \frac{d(r \frac{dv}{dr})}{dr} = 0 \xrightarrow{\text{intég.}} r \frac{dv}{dr} = \text{cste} = K_1$$

$$\text{donc } dv = K_1 \frac{dr}{r} \rightarrow v = K_1 \ln r + K_2$$

$$\text{avec } \begin{cases} v(r=R) = 0 \\ v(r=R-e) = V \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 0 = K_1 \ln R + K_2 \\ V = K_1 \ln(R-e) + K_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow K_1 [\ln(R-e) - \ln R] = V$$

$$K_1 \ln R [\ln(1 - \frac{e}{R}) - 1] = V$$

$$\text{DL pour } \frac{e}{R} \ll 1 \rightarrow -K_1 \frac{e}{R} \ln R = V$$

$$\boxed{K_1 = -\frac{R}{e} V \ln R}$$

$$\text{et } 0 = -\frac{R}{e} V \ln R \frac{V}{e} \text{ pour } K_2 = \frac{R}{e} V (\ln R)^2$$

$$v = \frac{R}{e} V \ln R (-\ln r + \ln R) \rightarrow \frac{e}{R} \ln \left(\frac{R}{r} \right) \text{ ou } \ln \left(\frac{R}{r} \right)$$

$$\boxed{v \approx \frac{R}{e} V \ln R \ln \left(\frac{R}{r} \right)}$$



il sera impossible d'avoir des vitesses \ominus selon $-\vec{e}_r$!

avec ce type de profil

si on peut satisfaire aux conditions

en effet sans résoudre $r \frac{dv}{dr} = \text{cste}$ limites : $\frac{dv}{dr}$ garde un signe \ominus pour $v < 0$ avec ces conditions limites!

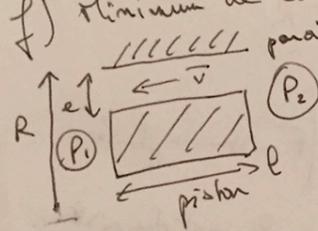
e) En l'absence de gradient, on est dans le cas de la plaque glissant sur un support lubrifié.

Ici on a une variation spatiale de vitesse forte : de $-V$ à \bar{v} ($\frac{\bar{v}}{V} \gg 1$) sur une faible distance e , bien \oplus forte. Donc fort gradient $\frac{dv}{dr}$ \Rightarrow donc on a une forte de viscosité (de cisaillement) très élevée

qui crée une forte différence de pression.

Cette force de pression engendrée est répartie sur toute la section du piston et permet de "modérer" son mouvement.

f) Minimum de calcul \rightarrow ordre de grandeurs



considérons un bilan global pour le fluide compris entre le piston et la paroi de l'amortisseur.

La force de viscosité dans le fluide est selon \vec{v}_x (tangentielle)
La surface à considérer est $S_{\text{laterale}} = 2\pi R e$ (tangentiellement)
 $|F_{\text{visc}}| \approx \eta \left| \frac{dv_x}{dr} \right| S \approx \eta \frac{\bar{v}}{e} 2\pi R e$

Cette force de cisaillement impose la force de pression qui vaut globalement \Rightarrow la pression s'exerce sur la colonne d'épaisseur e ($\perp \bar{v}$)

$$|F_{\text{piston}}| = \Delta P \times S = \Delta P \times 2\pi R e \quad (\Delta P = P_2 - P_1)$$

$$\text{donc à l'équilibre } |F_{\text{visc}}| \approx |F_{\text{pression}}|$$

$$\eta \frac{\bar{v}}{e} 2\pi R e = \Delta P \times 2\pi R e$$

$$\boxed{\Delta P = \eta \frac{\bar{v}}{e} l}$$

→ Force de pression subie par le piston :

$$\boxed{F_{\text{pression} \rightarrow \text{piston}} \approx \frac{\Delta P \pi R^2}{\eta l \frac{\bar{v}}{e^2} R^2} \approx \eta l v \left(\frac{R}{e}\right)^3}$$

A titre de comparaison

→ $\boxed{F_{\text{piston} \rightarrow \text{fluide}}}$

$$\approx \eta \frac{\partial v_z}{\partial r} \times \pi R l = \eta \frac{\bar{v}}{e} R l \approx \boxed{\eta l v \left(\frac{R}{e}\right)^2}$$

La force est directement liée à l'écoulement par v

$$\text{donc } |F_{\text{piston} \rightarrow \text{fluide}}^{(\text{viscosité})}| = \frac{e}{R} |F_{\text{pression} \rightarrow \text{piston}}|$$

↳ moten
du champ
de pression

↓
 $e \ll R$

$$\text{donc } |F_{\text{pression} \rightarrow \text{piston}}| \gg |F_{\text{piston} \rightarrow \text{fluide}}|$$

Le dispositif est très efficace, le mouvement du piston engendre une force de pression importante sur le piston par l'intermédiaire de la viscosité.

II - Système auto-actif

A - Mécanisme de fusion

1 - $F = \Delta P A \rightarrow \Delta P = \frac{F}{A} = \frac{mg}{10^{-3} \times 3} = \frac{75 \times 9.8}{3} = 2.5 \cdot 10^6 \text{ Pa} = 25 \text{ bar}$

2 - $L \text{ points} \rightarrow \text{point triple } 0^\circ\text{C} \rightarrow 273,16 \text{ K} \rightarrow 0,611 \text{ bar}$
 si on $\frac{dP}{dT} = \frac{L_f}{T(v_l - v_s)} = \frac{L_f}{T(\frac{1}{\rho_l} - \frac{1}{\rho_s})} = \alpha$
 Formule Laplace $\alpha = \frac{3,5 \cdot 10^5}{273,16 \times (\frac{1}{10^3} - \frac{1}{9,2 \cdot 10^2})} = -1,39 \cdot 10^7 \text{ Pa.K}^{-1}$
 $\Delta T = \frac{\Delta P}{\alpha} = \frac{-2,5 \cdot 10^6}{-1,39 \cdot 10^7} = 0,18^\circ\text{C}$

3 - $P_s = -v T_c = -10^7 \text{ W.m}^{-2}$
 ↳ puissance surfacique

4 - $\Delta T = 2 \frac{P_s \sqrt{r}}{e \sqrt{\pi}}$ 5 - $\dot{Q} = \pi (e \frac{\Delta T}{2 P_s})^2 = 3,5 \cdot 10^{-6}$
 ↳ échauffement de 10°C

6 - Si $v \rightarrow 0$ \dot{Q} augmente car $\propto (\frac{1}{P_s})^2$ et $P_s \rightarrow 0$. Il faut beaucoup de temps pour le transfert thermique. Changer la base en cuivre, change la conductivité qui \uparrow pour le cuivre. L'efficacité $e = \sqrt{\frac{P_s}{\rho}}$ et \uparrow grande pour le cuivre elle augmente la T_p du cuivre qui absorbe une partie des transferts thermique par dissipation.

B - Frottement visqueux et dissipation dans la couche lubrifiée

1 - $\vec{v} = v(x, y) \vec{e}_x$
 fluide incompressible : $\text{div } \vec{v} = 0 \rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \rightarrow v \text{ indépendant de } x$

2 - $d\vec{F}_v = \left[\eta \left(\frac{dv}{dy} \right)_{z+z_2} - \eta \left(\frac{dv}{dy} \right)_z \right] dy dz \vec{e}_x$
 $d\vec{F}_v = \eta \left(\frac{dv}{dy} \right) dx dy dz \vec{e}_y$
 $d\vec{F}_v = \eta \left(\frac{dv}{dy} \right) dV \vec{e}_y$

$$\frac{d\vec{F}_v}{dV} = \vec{f}_v = \eta \left(\frac{dv}{dy} \right) \vec{e}_y$$

en régime stationnaire $\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0}$

pu $(\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} = \left(v \frac{\partial}{\partial x} \right) v \vec{e}_x = v \frac{dv}{dx} \vec{e}_x = \vec{0}$

donc en proj. sur \vec{e}_x avec $\frac{dP}{dx} = 0$ et $\vec{g} \cdot \vec{e}_x = 0$

$$0 = \vec{f}_v \cdot \vec{e}_x \Rightarrow \left(\frac{dv}{dy} \right) = 0 \Rightarrow v = A y + B$$

condit aux limites : $v(z=0) = 0 \rightarrow B = 0$
 condit d'adhérence $v(z=h) = v \rightarrow A = \frac{v}{h}$ $\left. \begin{array}{l} \vec{v} = \frac{v}{h} z \vec{e}_x \\ \text{profil de vitesse linéaire} \end{array} \right\}$

4. $R_{ex} = -\eta \left(\frac{dv}{dy} \right)_{z=h} = -\eta \frac{v}{h}$

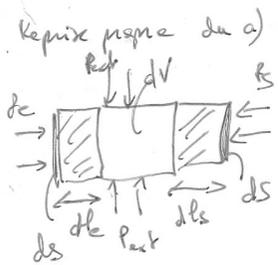
5. $P_x = \frac{\eta v^2}{h}$ $R_x = \vec{F} \cdot \vec{v}$

6. $R_e = \frac{\rho v L}{\eta} = \frac{10^3 \times 10^{-7}}{10^{-3}} = 10^{-1} = 0,1 \rightarrow$ écoulement laminaire

7 - $\dot{Q}_2 = [P_2 S \cdot dl_2 - P_1 S \cdot dl_1]$
 $\dot{Q}_2 = [P_2 S \cdot v_2 dt - P_1 S \cdot v_1 dt]$
 fluide incomp avec $D\rho = 0$ et fluide incomp. $D\rho = -\rho \frac{dv}{v}$
 Pas de gradient de pression, donc l'action résultante des forces de pression est nulle. $\dot{Q}_2 = (P_2 - P_1) S v dt$

b) En régime stationnaire, puissance absorbée = puissance restituée

car $dE = \dot{Q}_2 + P_{\text{absorbé}} - P_{\text{restitué}} dt = 0$ $P_2 \times A_2 = P_{th}$
 énergie échangée $P_{th} = \frac{\eta A_2 v^2}{h}$



Force presante solide \rightarrow fluide \perp à \vec{v}
 $\rightarrow \delta W(\vec{F}_{\text{Pres}}) = 0$

$$\begin{aligned} \text{et } \delta W_p &= p_e ds \cdot dl_e - p_s ds \cdot dl_s \\ &= p_e dy dy v_e dt - p_s dy dy v_s dt \\ &\rightarrow = p_e dt \int_S v_e dy dz - p_s dt \int_S v_s dy dz \\ \text{ici } v(z) \text{ d'pd de } z &= p_e dt D_{re} - p_s dt D_{rs} \end{aligned}$$

avec régime stable $\rightarrow D_{me} = D_{ms}$ et fluide incompressible
 $D_m = \rho \cdot DV$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow D_{re} &= DV_s = \frac{D_m dt}{\rho} \\ &= (p_e - p_s) \frac{D_m dt}{\rho} \end{aligned}$$

III - Détermination de l'épaisseur de la couche lubrifiante

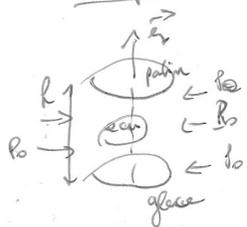
A - Croissance du film d'eau contrôlée par les frotts.

1^{er} principe appliqué à dh l'augmentation du film d'eau de la jonction A1
 \rightarrow plus lente
 $dh = dV = \delta h + \delta W_p = \delta h = -\delta h_s + \delta h_e$
 $\hookrightarrow 0 = -L_f \frac{dh}{dt} + \int h dh dt \Rightarrow -L_f \times \rho \frac{A_1 dh}{dt} + \eta \frac{v^2 A_1}{R} dt = 0$

transformé à T constante

$$\boxed{\frac{dh}{dt} = \frac{\eta v^2}{\rho L_f} \frac{1}{R}}$$

B - Expulsion du film d'eau



$$\vec{v} = v_r(r, z) \vec{e}_r + v_z(r, z) \vec{e}_z$$

a) Incompressibilité : $\text{div } \vec{v} = 0$

$$\hookrightarrow \frac{1}{r} \left(\frac{\partial r v_r}{\partial r} \right) + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

$$\left(\frac{U}{R} + \frac{W}{R} \right) = 0 \rightarrow \boxed{U \propto \frac{R}{h} W} \rightarrow \boxed{U \gg W}$$

$$b) \left| \frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} \right| \ll \frac{U}{R^2} \quad \left| -\frac{v_r}{r^2} \right| \ll \frac{U}{R^2}$$

$$\left| \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} \right| \ll \frac{U}{R^2} \quad \left| \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right| \ll \frac{U}{R^2}$$

$$\frac{\left| \frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} \right|}{\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right)} = \left(\frac{R}{h} \right)^2 \gg 1 \rightarrow \text{donc } \left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} \right) \text{ négligeable.}$$

$$c) \left| v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} \right| \ll \frac{U^2}{R}$$

$$\left| v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right| \ll \frac{UW}{R} \ll \frac{U^2}{R} \text{ d'après a) } W \ll \frac{h}{R} U \gg W$$

$$\text{Composons } \rho \frac{U^2}{R} \text{ et } \eta \frac{U}{R^2} \rightarrow \frac{\eta \left| \frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} \right|}{\rho \frac{U^2}{R}} = \frac{\eta U}{\rho R^2} = \frac{\eta R}{\rho U R^2} = \frac{\eta R}{\rho \frac{R}{h} \times h^2}$$

$$\text{avec } U \propto \frac{R}{h} \times \frac{h}{R} = \frac{R}{h} \rightarrow$$

$$= \frac{\eta R}{\rho h^2} = \frac{10^{-4} \times 10^{-3}}{(10^{-7})^2 \times 10^3} = 10^4 \gg 1$$

donc termes convectifs négligeables!

$$d) \frac{\rho \left| \frac{\partial v_r}{\partial t} \right|}{\eta \left| \frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} \right|} = \frac{\rho \frac{U}{t}}{\eta \frac{U}{R^2}} = \frac{\rho R^2}{\eta t} = \frac{10^3 \times 10^{-14}}{10^{-3} \times 10^{-4}} = 10^{-4} \ll 1$$

donc terme instationnaire négligeable!

$$e) 0 = -\frac{dp}{dz} + \eta \frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2}$$

avec $\frac{\partial v}{\partial \theta} = 0 \rightarrow$
$$0 = -\frac{dp}{dz} + \eta \frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2}$$

$$P(r, z) = P(r)$$

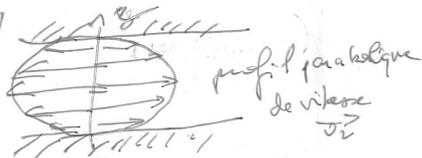
$$2 - \frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} = \frac{1}{\eta} \frac{dp}{dz} \rightarrow v_z(r, z) = \frac{1}{\eta} \frac{dp}{dz} \frac{z^2}{2} + K_1(r)z + K_2(r)$$

Symétrie de l'écoulement par rapport à $z = \frac{h}{2}$ (tr) et conditions aux limites $K_1(r)$ et $K_2(r)$ ne dépend pas de r !! et $K_2(r) = 0$

Conditions (tr)

$$v_z = 0 \text{ à } r = 0 \text{ et } z = R$$

$$v_z(r, z) = \frac{1}{2\eta} \frac{dp}{dz} z(z-h)$$



3 -



$$ds = 2\pi r dz \vec{e}_z$$

⚠ $\frac{dp}{dz} < 0$ pour pousser le liquide vers l'ab!

$$Dv = \int_S \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_{z=0}^{z=h} v_z \times 2\pi r dz = 2\pi r \int_{z=0}^{z=h} v_z(z) dz$$

débit sortant d'un cylindre de rayon $r \leq \frac{D}{2}$

$$\int_{z=0}^{z=h} \frac{1}{2\eta} \frac{dp}{dz} z(z-h) dz = \frac{1}{2\eta} \frac{dp}{dz} \times \left[\frac{z^3}{3} - \frac{z^2}{2} h \right]_0^h = \frac{1}{2\eta} \frac{dp}{dz} \times \left[\frac{h^3}{3} - \frac{h^2}{2} h \right] = \frac{1}{2\eta} \frac{dp}{dz} \times \left[\frac{h^3}{3} - \frac{h^3}{2} \right] = \frac{1}{2\eta} \frac{dp}{dz} \times \left[-\frac{h^3}{6} \right]$$

$$Dv = -\frac{\pi r}{6\eta} \frac{dp}{dz} r^3$$

4 - Autre expression:

$$Dv = \frac{dv}{dt} = -\pi r^2 \frac{dh}{dt}$$

→ ce débit provoque une $\frac{dh}{dt}$ de h !!

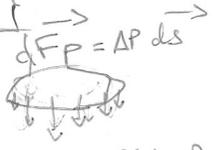
$$\frac{\pi}{6\eta} \frac{dp}{dz} r^3 = r^2 \frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dp}{dz} = \frac{1}{r^3} \frac{dh}{dt} \times 6\eta \pi r$$

$$P(r) = \frac{1}{R^3} \frac{dh}{dt} 3\eta r^2 + K = ar^2 + K$$

avec $P(r = \frac{R}{2}) = P_0 \rightarrow K = -\frac{a}{4} R^2 + P_0$

$$P(r) = P_0 + 3\eta \times \frac{1}{R^3} \frac{dh}{dt} \left(r^2 - \frac{D^2}{4} \right)$$



$$dR_p = \Delta P(r) \cdot ds \text{ avec } ds = 2\pi r dr$$

$$dR_p = a \left(r^2 - \frac{D^2}{4} \right) 2\pi r dr$$

$$R_p = 2\pi a \int_{r=0}^{r=\frac{D}{2}} \left(r^2 - \frac{D^2}{4} \right) r dr$$

$$\left[\frac{r^4}{4} - \frac{D^2}{4} \frac{r^2}{2} \right]_0^{\frac{D}{2}}$$

$$\frac{1}{4} \times \left[\left(\frac{D}{2} \right)^4 - \frac{D^4}{2 \times 4} \right] = \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{16} - \frac{1}{8} \right) = \frac{1}{32} \times \left(\frac{1}{2} - 1 \right)$$

$$= -\frac{1}{32} \times \frac{1}{2}$$

$$R_p = \pi a D^4 \times \frac{1}{32}$$

$$R_p = \frac{3\pi \eta D^4}{32} \frac{1}{R^3} \frac{dh}{dt}$$

$$7 - R_{p1} = \frac{3\pi \eta D^4}{32} \times \frac{1}{R^3} \frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dh}{R^3} = \frac{32 R_{p1}}{3\pi \eta D^4} dt \rightarrow \int_{R_0=R(t=0)}^R \frac{dh'}{R'^3} = \int_0^t dt' \times \frac{32 R_{p1}}{3\pi \eta D^4}$$

$$\left[\frac{1}{R^2} - \frac{1}{R_0^2} \right] = \frac{32 R_{31}}{3 \pi \eta D^4} t$$

$$\frac{1}{R^2} = \frac{1}{R_0^2} - \frac{64 R_{31}}{3 \pi \eta D^4} t$$

$$\frac{1}{R} = \sqrt{\frac{1}{R_0^2} - \frac{64 R_{31}}{3 \pi \eta D^4} t}$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_0} \sqrt{1 - \frac{64 R_{31} R_0^2}{3 \pi \eta D^4} t} = \frac{1}{R_0} \sqrt{1 - \frac{t}{\tau_1}}$$

$$h(t) = \frac{R_0}{\sqrt{1 - \frac{t}{\tau_1}}}$$

8 - $h(t) = 75 \text{ mm}$ et $\tau_1 = 9.13 \text{ ms}$ $R_0 = 100 \text{ mm}$

C - Croissance isotherme d'un film d'eau limitée par évaporation

1 - Résultats précédents: III - B - ? - $\frac{dh}{dt} = \frac{32 R_{31}}{3 \pi \eta D^4} R^3 \rightarrow \text{évap}$

et III - A - $\frac{dh}{dt} = \frac{\eta V^2}{\rho L_f} \frac{1}{R}$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{C_1}{R} - C_2 R^3 \rightarrow C_1 = \frac{\eta V^2}{\rho L_f} \text{ et } C_2 = \frac{32 R_{31}}{3 \pi \eta D^4}$$

2 - $\frac{dh}{dt} = 0 \rightarrow \frac{C_1}{R} - C_2 R^3 = \frac{1}{R} (C_1 - C_2 R^4) = 0$

3 - R lim $\propto \sqrt[4]{V}$ avec $f_{\text{fact}} \propto \frac{V}{R}$
 modale bar! $\leftarrow \propto \frac{V}{R^2}$

$$R_{\text{lim}} = \left(\frac{C_1}{C_2} \right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{3 \pi \eta^2 D^4 V^2}{32 \rho L_f^2 R_{31}} \right)^{\frac{1}{4}}$$

Sujet CS PSI 2013

Par la suite, la correction de la partie I du même sujet - Effets thermiques aux jonctions

autre part, $dU = \rho c dV dt$ sur tout le solide de volume élémentaire
 élévation de température qui a atteint z $dV = S dz$
 avec $dt = \delta t = G(z,t) \delta t$

$$\Delta U = U(b) - U(t_0) = \rho c \delta t S \times \int_{z=0}^{z=+\infty} G(z,t) dz$$

qté totale de chaleur reçue par le volume semi- ∞ .

$$\Delta U = \rho c \delta t S \frac{B}{\sqrt{t}} \int_{z=0}^{z=+\infty} e^{-\frac{z^2}{4Dt}} dz$$

avec $u^2 = \frac{z^2}{4Dt} \rightarrow u = \frac{z}{2\sqrt{Dt}}$

$$\Delta U = \rho c \delta t S \frac{B}{\sqrt{t}} \times \frac{1}{\sqrt{Dt}} \int_{u=0}^{u=+\infty} e^{-u^2} du$$

$\frac{1}{\sqrt{Dt}}$ $\frac{1}{\sqrt{Dt}}$

$$\Delta U = \sqrt{\pi} \rho c \delta t S B = \sqrt{\pi} \rho c \delta t S B = j_0 \delta t$$

$$B = \frac{j_0}{\sqrt{\pi} e}$$

$$\text{avec } e = \sqrt{Dt}$$

translat de t_0 de la temps.

$$d) \delta T(z,t) = \delta t \times G(z,t-t_0)$$

A-3. Milieu chauffé continuellement

$\hookrightarrow t \geq t_0$
 pour $t < t_0 - \delta t \rightarrow \delta T(z,t) = 0$

a) $\delta Q_0 = \frac{j_0 S \delta t_0}{\text{cat.}} \rightarrow$ qté de chaleur reçue entre $t_0 - \delta t_0$ et t_0

$$\delta T(z,t) = \delta t_0 \times G(z,t-t_0)$$

$$\delta T(z,t) = \int_{t_0=0}^{t_0=t} \delta T(z,t-t_0) dt_0 = \int_{t_0=0}^{t_0=t} \frac{j_0}{\sqrt{\pi} e(t-t_0)} e^{-\frac{z^2}{4D(t-t_0)}} dt_0$$

$$b) \theta(z,t) = \frac{j_0 \sqrt{t}}{e \sqrt{\pi}} f\left(\frac{z}{2\sqrt{Dt}}\right)$$

élévant à la surface

$$\Delta T = T(0,t) - T_0 = \theta(z=0,t) \rightarrow \text{en } z=0$$

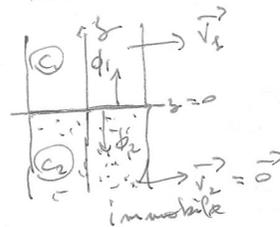
$$\Delta T = \frac{j_0 \sqrt{t}}{e \sqrt{\pi}} f(0) = \frac{j_0 \sqrt{t}}{e \sqrt{\pi}}$$

lecture graphique

$$\frac{\delta}{2\sqrt{Dt}} \approx 0,35 \rightarrow \delta \approx 0,7 \sqrt{Dt}$$

\rightarrow profondeur de pénétration en fct de t.

B. Product d'énergie thermique par frottement



$$\phi_1 = j_s$$

et p_s puissance surfacique

$$\phi_2 = j_s$$

negative des frottement de $C_2 \rightarrow C_1$

1. $E_i = U_i + E_{ci}$ énergie des cylindres C_i

$$dE_i = \delta W_i + \delta Q_i \Rightarrow dE_1 = \delta W_{F_2 \rightarrow 1} + \phi_1 dt$$

$$dE_1 = p_s dt + \phi_1 dt = dU_1 + \delta E_{c1}$$

en effet $p_s = -S \cdot \nabla \cdot \vec{F}_2 \rightarrow \vec{F}_2 \rightarrow 1$
 $\phi_1 = S \cdot \vec{F}_2 \cdot \vec{v}_1$

2. Ensemble isolé thermodynamiquement de l'ext:

$$dE = 0 \rightarrow S p_s + \phi_1 + \phi_2 = 0$$

$$S p_s + j_1 S + j_2 S = 0$$

$$p_s = -1(j_1 + j_2) S$$

C. Application aux jonctions :

si m² matériaux et m² k² de surface → $j_1 = j_2$

$$j_1 = j_2 = -\frac{p_s}{2}$$

2) Jonction $D = 0,1 \text{ mm}$ → durée du contact → $\tau = \frac{D}{v} = 10^{-4}$
 $\tau = 0,1 \text{ ms}$

3) a) Élévation de T: $\Delta T = \frac{2j_0 \tau}{\sqrt{p_s} \sqrt{\pi}}$

avec $p_s = -\tau_0 v$ → $j_0 = \frac{p_s}{2} = \frac{\tau_0 v}{2}$ ^{énoncé}

	acier/acier	teflon/teflon	granit/granit
ΔT	63	4,8	518
$S(\tau)$	$3,2 \cdot 10^{-5} \text{ m}$ 32 μm	$4,1 \cdot 10^{-6} \text{ m}$ 7,1 μm	$6,7 \cdot 10^{-6} \text{ m}$ 6,7 μm

b) $S \approx 10 \text{ nm}$ → milieu très juste.

7 - Écoulement de Couette cylindrique - TPC CCNP 2018
 Physique de l'œuf - Partie I Œuf dur
 ou dur

1.1. Phase d'immobilisation et redémarrage :

Q26 - Pour la plupart des fluides $\rho \approx 1000 \text{ kg.m}^{-3}$ (huile 900 kg.m^{-3})
 viscosité dynamique eau 10^{-3} Pa.s et huile $\approx 10^{-2} \text{ Pa.s}$
 donc œuf dur \approx huile!

Q27 - La veine S_1 est \ominus rapide que la veine S_2 elle a donc tendance à freiner la veine S_2 avec une force de viscosité tangentielle sur la surface de contact selon $-\vec{v}_x$. Cette force s'exprime donc par

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\eta \frac{dv_x}{dy} S \vec{v}_x$$

$\frac{dv_x}{dy}$ représente le taux de cisaillement de la vitre

et η est la viscosité dynamique du fluide

$$\eta = \text{Pa.s} = \text{Pa} \cdot \text{s} = \text{kg.m}^{-1} \text{s}^{-1}$$

(la force est \propto à η , S et au taux de cisaillement)

Q28 - $\vec{v}(r) = r \dot{\omega} \vec{e}_\theta = r \omega \vec{e}_\theta$

$w(r, r) \downarrow$ avec r de la figure 3b.

En effet, avec une distance parcourue identique pour les 2 veines pddr dr (en contact)

$$v(r) dr = v(r+dr) dr$$

$$\Rightarrow r \omega = (r+dr) \omega(r+dr) = (r+dr) \left[\omega(r) + \frac{d\omega}{dr} dr \right]$$

donc $0 = dr \omega + \frac{d\omega}{dr} r dr + \frac{d\omega}{dr} dr^2$ (ordre 2 négligeable)

$$\frac{d\omega}{\omega} = -\frac{dr}{r} \rightarrow \ln \omega = \ln \frac{1}{r} + k = \ln \frac{k}{r}$$

Q29 - $d\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\eta r \frac{d(v/r)}{dr} ds \vec{e}_\theta = -\eta ds \left[\frac{dv}{dr} - \frac{1}{r} v \right] \vec{e}_\theta$

si $\left| \frac{v}{r} \right| \ll \left| \frac{dv}{dr} \right| \rightarrow d\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\eta \frac{dv}{dr} ds \vec{e}_\theta$

On retrouve une expression de la force de viscosité similaire à l'écoulement unidirectionnel (selon r)
 Cette condition $\left| \frac{v}{r} \right| \ll \left| \frac{dv}{dr} \right|$ est satisfaite (pour $r \rightarrow +\infty$ par exemple); on assimile alors l'écoulement en arc de cercle à sa tangente.

Q30 - $\left| \frac{v}{r} \right| \times \left| \frac{r\omega}{r} \right| = \omega \ll \left| \frac{d(r\omega)}{dr} \right| = \left| \frac{d\omega}{dr} r + \omega \right| = \left| \frac{1}{r} r^2 + \omega \right|$

$\hookrightarrow 1 \ll \frac{1}{r} r \rightarrow r \text{ grad!}$

Q30 - $dM_{Oz}(r) = (\vec{O}r \wedge d\vec{F}_{1 \rightarrow 2}) \cdot \vec{e}_z$ calcul complet ou bras de levier $\times d\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$

$$dM_{Oz}(r) = -\eta r \frac{dv}{dr} ds$$

avec $ds = r d\theta dz = r d\theta dh$

$$dM_{Oz}(r) = -\eta r \frac{d(r\omega)}{dr} dh$$

Q31 - Pour le fluide sur la coquille d'œuf en $r=R$ fixe et pour $\theta \in [0; 2\pi]$

$$\Gamma = -2\pi h \eta R^3 \left(\frac{d\omega}{dr} \right)_{r=R}$$

Q32 - Condition d'adhérence fluide intérieur/coquille
 \hookrightarrow même vitesse angulaire (ou même vitesse linéaire au r!)

fluide $\rightarrow \omega(R, t) = \Omega(t)$ coquille avec $\Omega(0) = 0$
 coquille à l'arrêt qd on relâche!

Q33 - $L_{Oz}(t) = \int_{Oz} \Omega(t) = \int_{Oz} \omega(R, t)$
 moment cinétique

Q34 - TMC appliquée à la coquille

$$\frac{dL_{Oz}}{dt} = \tau + \underbrace{M_{Oz}(\vec{P}) + M_{Oz}(\vec{R})}_{\vec{0} \text{ car forces passent par l'axe}}$$

avec frottement négligés.

$$\boxed{J_{O_3} \frac{\partial \omega(r,t)}{\partial t} = - 2\pi h M R^3 \left(\frac{\partial \omega}{\partial r} \right)_{r=R}}$$

Q35 - Avec $\omega \propto \frac{1}{r} \rightarrow \left(\frac{\partial \omega}{\partial r} \right)_{r=R} < 0$

donc $\frac{\partial \omega(r,t)}{\partial t} > 0 \rightarrow$ la rotat de la coquille redimanche ds le vers initial et entraîne le contenu de l'œuf par cisaillement visqueux.

Q36 - Résultat de problème

• branche de résultat : on exploite le TMC à la coquille avec une vitesse de rotat initiale $\omega(t=0) = \omega_0$

• hypothèse : - réf. galiléen - on néglige le frottement (air) et le réact tangentielle de frottement solide avec le support

- moments du poids et de la réact normale nuls

1 - on utilise J_{O_3} pour la coquille

- on considère une vitesse nulle du fluide sur l'axe de rotation et une vitesse égale à celle de la coquille en $r=R$

- $\tau_{diff} = \frac{\mu L^2}{M} = \frac{10^{-3} \times 10^{-4}}{1}$ avec L typique ≈ 1 cm
 $\tau_{diff} \approx 0,1 s \rightarrow$ la diff est suffisamment rapide pour avoir un profil de vitesse stationnaire établi tout au long du temps.

• grandeurs d'intérêt

coquille $m = 5g$; $a = 3,0$ cm $b = 3,0$ cm (cherchez en Q33.)
 hauteur du fluide en rotat $h = a$ (d'après fig. 7a)

$\omega_0 = 5$ tours. s^{-1}

rayon du cylindre équivalent $R = \frac{1}{2}$

TMC $\Rightarrow J_{\Delta} \frac{d\Omega}{dt} = \Gamma = - 2\pi h M R^3 \left(\frac{\partial \omega}{\partial r} \right)_{r=R}$

Pour résoudre il faut alors faire une hypoth. forte sur le profil de vitesse ω pour connaître $\left(\frac{\partial \omega}{\partial r} \right)_{r=R}$.

Nous supposons que le profil $\omega(r)$ est linéaire avec r

Où à minima évalué en O.D.T. $\left(\frac{\partial \omega}{\partial r} \right)_{r=R} = -1 = \frac{\Omega}{R}$

hyp. En fait, on a un profil linéaire cylindrique $\omega(r) = \frac{\Omega(R-r)}{R}$

donc $\left[\frac{d\Omega}{dt} + \frac{\Omega}{\tau} = 0 \right]$ avec $\tau = \frac{J_{\Delta}}{2\pi h M R^2} = \frac{\Omega}{R}$

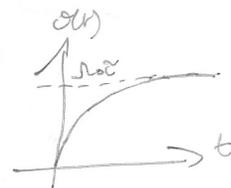
$\Rightarrow \left[\Omega(t) = \Omega_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \right]$

avec $\frac{d\sigma(t)}{dt} = \Omega(t) = \Omega_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$

$\sigma(t) = -\Omega_0 \tau e^{-\frac{t}{\tau}} + K$

C.I. $\sigma(t=0) = 0 \rightarrow K = \Omega_0 \tau$

$\sigma(t) = \Omega_0 \tau (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$



Soit N le nbre de tours pour atteindre l'arrêt en $t \rightarrow +\infty$

$\boxed{N} = \frac{\sigma(t \rightarrow +\infty)}{2\pi} = \left[\frac{\Omega_0 \tau}{2\pi} \right] = \frac{\Omega_0}{2\pi} \frac{J_{\Delta}}{2\pi h M R^2}$

AN : $N \approx 999$ tours ! en accord avec le doc 3.