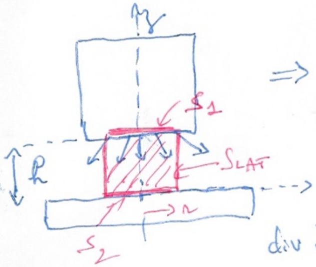
1 - Calcul du débit

$\vec v = v_0 \frac{r}{2h}\vec{u_r} - v_0 \frac{z}{h}\vec{e_z}$



1 - Vitesse normale nulle en $z=0$ (paroi immobile)

$\Rightarrow$ $\vec v\cdot\vec{e_z}(z=0)=0$ respecté par le champ proposé

(ici fluide non visqueux sinon composante radiale nulle)

2 - Ecoulement incompressible $\Leftrightarrow$ $\mathrm{div}\,\vec v = 0$

$$\mathrm{div}\,\vec v = \frac1r\frac{\partial(r v_r)}{\partial r} + \underbrace{\frac1r\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}}_{0} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{v_0}{h} - \frac{v_0}{h} = 0$$

3 - Pour un champ dont la divergence est nulle, son flux total est nul (div $\Leftrightarrow$ flux) à travers une surface fermée !

Flux entrant en $z=h$ $\Rightarrow$ $D_{v,\text{entrant}} = \iint_{S_1} \vec v\cdot\vec{dS_1}$ avec $\vec{dS_1} = dS_1(-\vec{e_z})$ (entrant)

$\boxed{D_{v,\text{entrant}}} = \iint_{S_1}\vec v\cdot dS_1(-\vec{u_z})$ ← $\vec{dS_1}$ orientée dans le sens entrant avec $z=h$ sur S_1

$= \iint_{S_1} v_0 \frac{h}{h}\, dS_1$

$= v_0 S_1 = \boxed{v_0\pi r^2}$

Pas de flux pour la surface S_2 ! (car $\vec v$ y est $\perp$ à $\vec{dS_2}$)

$D_{v,\text{sortant}} = \iint_{S_{LAT}} \vec v\cdot\vec{dS_{LAT}}$ avec $\vec{dS_{LAT}} = 2\pi r\,dz\,\vec{u_r}$

La composante selon $\vec{u_z}$ de $\vec v$ n'intervient pas ds ce calcul.

$$\boxed{D_{v,\text{sortant}}} = \int_{z=0}^{z=h} v_0\frac{r}{2h}\vec{u_r}\cdot 2\pi r\,dz\,\vec{u_r}$$

$$= v_0 \pi r^2 \frac{h}{h} = \boxed{v_0\pi r^2}$$

$\boxed{D_{v,\text{entrant}} = D_{v,\text{sortant}} \Rightarrow \text{le flux de } \vec v \text{ est conservatif}}$

Calcul de débits en régime stationnaire

a) $D_v = vS \Rightarrow \boxed{v} = \frac{D_v}{S} = \frac{6\times10^{-3}}{60\pi 10^{-4}} = \frac{1}{\pi}\ m.s^{-1} = \boxed{0,3\ m.s^{-1}}$

b) Ecoulement incompressible homogène $\Rightarrow$ $\mathrm{div}\,\vec v = 0$ $\rightarrow$ D_v se conserve

$D_v = N_a D_{v,a} \rightarrow \boxed{N_a} = \frac{D_v}{D_{v,a}} = \frac{6\times10^{-3}}{60\times2.10^{-6}} = \frac12\cdot10^2 = \boxed{50}$

c) Conservat° du débit $\rightarrow$ $D_{v,a} = N_a' D_{va}' = N_a' v_a' S_a'$

$$\boxed{N_a' = \frac{D_{va}}{v_a' S_a'} = 1,6\times10^7}$$

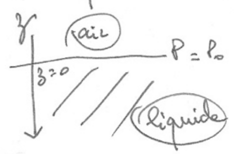
d) $\boxed{Re} = \frac{\rho L v_a'}{\eta} = \boxed{\frac{2\rho a_0' v_a'}{\eta}} = \boxed{4.10^{-2}}$ Re < 1 régime laminaire

Ex 2 : Prise en compte de la compressibilité

$$\rho(P) = \rho_0(1+\alpha(P-P_0))$$

a) $\rho(P) \nearrow$ qd $P \nearrow$ donc $\alpha > 0$

b)



$0 = -\vec{\mathrm{grad}}\,P + \rho\vec g$

$0 = -\frac{dP}{dz} + \rho g$

$0 = \frac{dP}{dz} + \rho_0(1+\alpha(P-P_0))g = 0$

$$\frac{dP}{1+\alpha(P-P_0)} = \rho_0 g\,dz$$

$\frac1\alpha \ln(1+\alpha(P-P_0)) = \rho_0 g z + C$ avec $P(z=0) = P_0$ $\rightarrow$ $0 = C$

$\boxed{P = P_0 + \frac1\alpha\left(e^{\alpha\rho_0 g z}-1\right)}$ $\rightarrow$ la pression croît + vite que linéairement suite à la compressibilité

c) Faibles profondeurs $z \ll \frac{1}{\alpha\rho_0 g}$ alors $e^x \simeq 1+x$

donc $\boxed{P} \simeq P_0 + \frac1\alpha(\alpha\rho_0 g z) \overset{DL\ x\to0}{=} \boxed{P_0+\rho_0 g z}$ les effets de la compressibilité sont négligeables

Ex4 : Critique de l'atmosphère isotherme en équilibre

1)a) Eq. gp -> $PV = nRT_0$ -> $\boxed{\rho} = \frac{m}{V} = \frac{nM_e}{V} = \boxed{\frac{PM_e}{RT_0}}$

b) Stat. des fluides $\vec{u_z}$ vers le haut -> $\frac{dP}{dz} = -\rho g = -\frac{PM_e}{RT_0}$

$P(z) = A e^{-\frac{M_e g z}{RT_0}}$ avec $P(0) = P_0$

$\boxed{P(z) = P_0 e^{-z/H}}$ $\boxed{H = \frac{RT_0}{M_e g}}$

c) $M_e = 0{,}8 \times 28 + 0{,}2 \times 32 = 28{,}8 \text{ g.mol}^{-1}$ -> $\boxed{H = 8{,}5 \text{ km}}$

$P(z) = \frac{P_0}{2}$ -> $P_0 e^{\left(-\frac{z^{iso}_{50\%}}{H}\right)} = \frac{P_0}{2}$

$\boxed{z^{iso}_{50\%} = H \ln 2 = 5{,}9 \text{ km}}$

↳ les ordres de grandeur sont corrects même si le modèle est simple.

2)a) Loi de stat. -> $\frac{dP}{dz} = -\frac{PM_e g}{RT} = -\frac{PM_e g}{RT_0(1-\alpha z)}$

$\frac{dP}{P} = -\frac{M_e g}{RT_0} \frac{1}{1-\alpha z}$

$\ln P = \frac{M_e g}{\alpha R T_0} \ln(1-\alpha z) + C$

avec $P(0) = P_0$ -> $\ln\left(\frac{P(z)}{P_0}\right) = \frac{M_e g}{\alpha R T_0} \ln(1-\alpha z)$

$\boxed{\frac{P(z)}{P_0}} = (1-\alpha z)^{\frac{M_e g}{\alpha R T_0}} = \boxed{(1-\alpha z)^{\beta}}$

$\boxed{\beta} = \frac{M_e g}{\alpha R T_0} = \frac{1}{H\alpha} = \boxed{\frac{z_0}{H}}$

donc $\rho(z) = \frac{P(z) M_e}{RT(z)} = \frac{P_0 M_e}{RT_0}(1-\alpha z)^{\beta-1}$

$\boxed{\rho(z) = \rho_0 (1-\alpha z)^{\beta-1}}$

b) Il faut résoudre $\left(1 - \alpha z^{pol}_{50\%}\right)^{\beta} = \frac{1}{2}$

$\beta \ln(1 - \alpha z^{pol}_{50\%}) = -\ln 2$

$1 - \alpha z^{pol}_{50\%} = 2^{-1/\beta}$

$\boxed{z^{pol}_{50\%} = z_0 (1 - 2^{-1/\beta}) = 5{,}4 \text{ km}}$

↳ valeur proche du modèle isotherme mais inférieure -> le T ↓ qd z ↗

donc agitat thermique + faible

Le modèle isotherme surévalue l'agitat thermique et la pression à hte altitude.

c) La T varie linéairement avec l'altitude comme dans la modélisat proposée. T(sol) = 288,14 K -> ≃ $T_0 = 288$ K.

$z_0 = \frac{288{,}14}{6{,}94} = 41{,}5$ km -> énoncé 33 km étonnant.

$T = T_0(1-\alpha z)$
$T = 288{,}14 - 6{,}94 z$

$P = 1{,}01 (T/288{,}08)^{5{,}26}$ -> $\beta = 5{,}26$ à comparer à $\beta = \frac{z_0}{H} = \frac{41{,}5}{8{,}5} = 4{,}9$ ↗ courbes

donc compatibilité avec modèle polytropique ($\beta = 4{,}9$ au lieu de 5,2)

Rq) Altitude pour $P_0/2$ -> 5,5 km (courbes) ≃ $z^{pol}_{50\%} = 5{,}4$ km