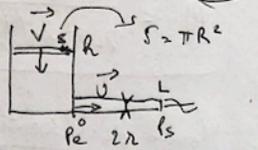


5. Viscosimétre de Poiseuille

→ Modélisation de l'écoulement

- a) Fluide incompressible → $\text{div } \vec{v} = 0$
 ↑ vitesse débit → le débit volumique se conserve
 dans la capillaire
- avec $v = -\frac{dh}{dt}$ et $Dv = U \times \pi R^2$



$$-\frac{dh}{dt} \pi R^2 = Dv$$

- b) Fluide au repos → $P_e = P(P) + \rho g(h-r) \approx P_0 + \rho g h$
 L'hypothèse du fluide à l'éq. est justifiée car $R \gg r$, la vitesse d'évolution de h est suffisamment faible pour considérer le fluide proche d'un état d'éq. (v.t.).

$$P_s = P_0 \rightarrow \Delta P = (P_e - P_s) = \rho g h$$

↳ face motrice de l'écoulement

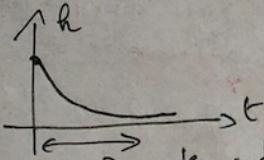
- c) En exploitant la loi de Hagen-Poiseuille

$$Dv = \frac{\pi r^4}{8\eta L} \frac{\Delta P}{L} \rightarrow -\frac{dh}{dt} \pi R^2 = \frac{\pi r^4}{8\eta L} \frac{\rho g h}{L}$$

$$\frac{dh}{dt} + \frac{\rho g r^4}{8\eta L R^2} h = 0 \Leftrightarrow \frac{dh}{dt} + \frac{h}{\tau} = 0$$

$$\tau = \frac{8\eta L R^2}{\rho g r^4}$$

$$h(t) = h(t=0) e^{-\frac{t}{\tau}}$$



$\tau \rightarrow$ temps de vidange du réservoir.

- d) $\left. \begin{aligned} h(t_1) &= h(t=0) e^{-\frac{t_1}{\tau}} \\ h(t_2) &= h(t=0) e^{-\frac{t_2}{\tau}} \end{aligned} \right\} \frac{h(t_1)}{h(t_2)} = e^{\frac{(t_2-t_1)}{\tau}}$
- $$t_2 - t_1 = \Delta t = \tau \ln\left(\frac{h(t_1)}{h(t_2)}\right)$$
- $$\Delta t = \frac{8\eta L R^2}{\rho g r^4} \ln\left(\frac{h_1}{h_2}\right) \text{ avec } h_1 > h_2$$

$$M = \frac{\rho g r^4}{8 L R^2 \ln\left(\frac{h_1}{h_2}\right)} \Delta t$$

→ Mesure de viscosité et validation de la modélisation

- a) $S = 8 \cdot 10^3 \text{ cm}^2 \rightarrow R = \sqrt{\frac{8 \cdot 10^3}{\pi}} = 50,5 \text{ cm} \gg r = 5 \text{ mm}$

$$M = \frac{5 \times 10^2 \times 9,81 \times 5^4 \times 10^{-12}}{8 \times 1 \times (50,5)^2 \times 10^{-4} \times \ln\left(\frac{1}{0,9}\right)} (32 \times 60) = 4,9 \cdot 10^{-2} \text{ Pl}$$

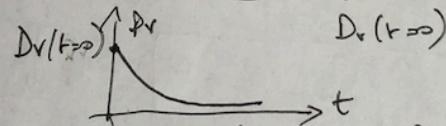
$\Delta t = 32 \text{ minutes}$

- b) $\tau = \frac{8\eta L R^2}{\rho g r^4} = \frac{8 \times 4,9 \times 10^{-2} \times 1 \times (50,5)^2 \times 10^{-4}}{5 \times 10^2 \times 9,81 \times 5^4 \times 10^{-12}}$

$$\tau = 1,8 \times 10^4 \text{ s} \rightarrow \tau \approx 5 \text{ h}$$

$\Delta t \ll \tau$ suf!

- c) $Dv(t) = \frac{\pi \rho g r^4}{8\eta L} h = \frac{\pi \rho g r^4}{8\eta L} h(t=0) e^{-\frac{t}{\tau}}$



le débit volumique donc la vitesse débitante v dans la capillaire $\text{dép. de } t$!
 de régime n'est pas stationnaire pour cet écoulement de Poiseuille !!

Il faut faire l'approximation des régimes quasi-stationnaire pour valider la loi de Hagen-Poiseuille. Nous allons le vérifier + tard.

d) la vitesse débitante ↓ au cours du temps comme D_v .
 Pour calculer le nombre de Reynolds le + défavorable pour valider le régime laminaire, on prend donc la vitesse débitante au début $h = 1 \text{ m}$ pour $t = 0^+$ qui est la + grande.

$$\underline{D_v(t=0)} = -\pi R^2 \left(\frac{dh}{dt} \right)_{t=0} = + \frac{\pi R^2}{\tau}$$

$$U \times \pi R^2 = D_v \rightarrow \boxed{U = \left(\frac{R}{\tau} \right)^2 \frac{1}{\tau}}$$

$$U = \left(\frac{0,05}{5} \right)^2 \frac{1}{4,8 \times 10^{-4}} \approx \frac{10^4}{1,8 \times 10^4} = \frac{1}{1,8}$$

$$\boxed{U \approx 0,55 \text{ m.s}^{-1}}$$

$$Re = \frac{\rho U (2r)}{\mu} = \frac{3 \cdot 10^2 \times 0,55 \times 10^{-2}}{4,9 \cdot 10^{-2}} = 101 \approx 100$$

$Re < 2 \cdot 10^3$
 α l'écoulement est laminaire

$$e) \tau_{\text{convection (capillaire)}} = \frac{L}{U} = \frac{1}{0,55} \approx 1,8 \text{ s}$$

$$\tau_{\text{diffusion}} = \frac{(2R)^2}{\nu} = \frac{4R^2}{\nu} = \frac{4 \mu R^2}{\rho} \approx 1,8 \text{ s}$$

(comme convection)

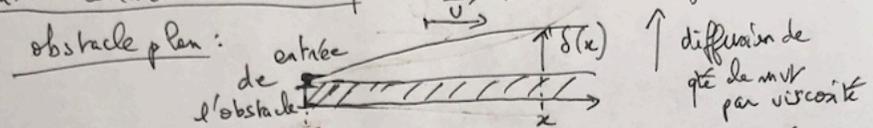
Le temps de diffusion est ≪ τ convection → la diffusion s'établit bien + vite que les variations temporelles de D_v et U donc l'ARQS est justifiée.

(le régime réagit bien + vite que les variations temporelles de D_v donc $D_v \approx \text{const}$ le temps)

4 - longueur d'établissement de la couche limite

Rappel sur la couche limite : autre méthode d'établissement qu'on cours → exploitat des temps caractéristiques

• Evolution de la couche limite pour un écoulement le long d'un obstacle plan :



Soit le temps caractéristique associé à la diffusion de qte de mouvement par viscosité $\tau \approx \frac{L^2}{\nu} \approx \frac{\delta^2}{\nu}$

C'est le temps nécessaire pour avoir une diffusion de quantité de mouvement sur une épaisseur égale à la couche limite δ .

Pdt de temps, le fluide a été entraîné par convection dans la direction de l'écoulement \vec{U} avec un temps caractéristique

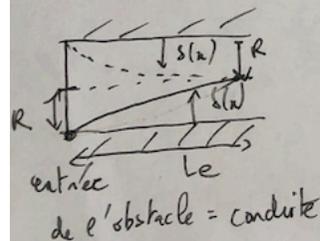
$$\tau \approx \frac{x}{U} \text{ avec une distance parcourue } x$$

On a donc $\frac{x}{U} \approx \frac{\delta^2(x)}{\nu} \rightarrow \delta^2(x) \approx \frac{\nu x}{U}$

$$\boxed{\delta(x) = \frac{\mu x}{\rho U}}$$

α l'épaisseur $\delta(x)$ augmente bien le long de la plaque. qd l'écoulement « avance » (pas uniforme sur la plaque) ($\delta(x) \propto \sqrt{x}$)

• Exploiterons ce modèle dans le cas de la conduite :



L_e est la longueur pour laquelle la diffusion de qte de mvt a atteint R

$$\text{soit } \boxed{\delta(L_e) = R}$$

$$R^2 = \frac{\mu L_e}{\rho U} \rightarrow \frac{D^2}{4} = \frac{\mu L_e}{\rho U}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{L_e}{D} = \frac{Re}{4} \\ \frac{L_e}{D} \approx 0,25 Re \end{array} \right\} \text{comparable à } \frac{L_e}{D} \approx \frac{96 Re}{4}$$

Exercice 2 – Sténose

On note ν la viscosité cinématique du sang : $\nu = \frac{\eta}{\rho} = 6 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$.

1) Par définition : $R_e = \frac{2r_0 v}{\nu} = 2.33$.

L'écoulement est donc bien laminaire dans le vaisseau.

2) Par définition : $R = \frac{\Delta P}{Q}$

$$R = \frac{8\eta L}{\pi r_0^4} = 4.5 \times 10^5 \text{ Pa} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-3}$$

$$\text{et } Q = \pi r_0^2 v = 1.5 \times 10^{-7} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$$

On en déduit la différence de pression :

$$\Delta P = R \times Q = 6.9 \times 10^{-2} \text{ Pa}$$

3) On a : $R_1 = \frac{8\eta(l/3)}{\pi r_0^4} = \frac{R}{3}$;

$$R_2 = \frac{8\eta(l/3)}{\pi r_1^4} = \frac{16R}{3}$$

$$\text{et } R_3 = \frac{8\eta(l/3)}{\pi r_0^4} = \frac{R}{3}$$

$$\text{D'où : } R' = \frac{R}{3} + \frac{16R}{3} + \frac{R}{3} + \frac{R}{3} = 6R$$

4) On souhaite, pour une différence de pression constante, rétablir le même débit : on doit donc obtenir la même résistance hydraulique. En notant R'' la résistance du pontage, et sachant que R' et R'' sont en parallèle, on obtient :

$$R = \frac{R' R''}{R' + R''}, \text{ où } R' = 6R \text{ et}$$

$$R'' = \frac{8\eta l}{\pi r_2^4} = R \left(\frac{r_0}{r_2} \right)^4$$

$$\text{Après simplifications : } r_2 = \sqrt[4]{\frac{5}{6}} r_0$$

$$r_2 = 0.96 r_0 = 0.67 \text{ cm}$$

Pour aller plus loin exercice sur les foils

$$\vec{D} = \frac{1}{2} \rho S C_D V^2 \vec{e}_x,$$

$$\text{portance : } \vec{L} = \frac{1}{2} \rho S C_L V^2 \vec{e}_y.$$

b) Le poids de l'aile \vec{P} et la force exercée par l'embarcation $\vec{F}_{e \rightarrow a}$ agissent également sur l'aile. Si l'on raisonne sur le système {embarcation, aile} (et non sur l'aile seule) et qu'on le suppose en translation rectiligne uniforme, $\vec{F}_{e \rightarrow a}$ est remplacée par la somme de la force du vent sur la voile : $\vec{F} = F \vec{e}_{x'}$ et du poids de l'embarcation \vec{P}' . On obtient alors :

$$\vec{P} + \vec{P}' + \vec{F} + \vec{D} + \vec{L} = \vec{0}.$$

Si le bateau avance horizontalement sans giter, on a en norme :

$$F = D \text{ et } P + P' = L.$$

c) La courbe (1) présente l'évolution de la traînée d'un catamaran classique, et la courbe (2), celle d'un catamaran équipé d'hydrofoils. En effet, tant que l'hydrofoil ne décolle pas, la traînée est plus importante du fait de la présence des hydrofoils. Par contre, dès que l'embarcation sort de l'eau, la résistance à l'avancement du bateau diminue considérablement (notamment en présence de vagues).

2) a) i) Dans la plage d'angle considérée, la portance augmente considérablement tandis que la traînée reste constante : « la portance ne coûte rien » ! La configuration idéale serait de se placer sous l'incidence α_2 .

ii) Le risque de décrochage commence à partir du maximum de portance, c.-à-d. pour $\alpha = 14^\circ$.

b) Dans le cas où le bateau, avançant à la vitesse $V = V_d$ constante, a décollé, c.-à-d. où la portance compense le poids du bateau et de son équipage, notant m la masse totale de l'embarcation, on doit avoir :

$$L = \frac{1}{2} \rho S C_L V_d^2 = mg$$

où S est la surface alaire des foils.

On obtient : $S = \frac{2mg}{\rho C_L V_d^2}$. En pre-

nant $m \approx 100 \text{ kg}$ et $C_L = 0.5$ (cas le plus favorable), on trouve :
 $S = 28 \times 10^{-3} \text{ m}^2$.

3) a) En statique des fluides incompressibles, on obtient : $P_\infty = P_0 + \rho gh$.

b) Concernant la portance d'une aile, conditionnée par l'écoulement le long de l'aile, la longueur caractéristique est celle de la corde c et $Re = \frac{cV}{\nu}$.

c) La courbe supérieure correspond à l'intrados et la courbe inférieure correspond à l'extrados. En effet, C_p et P évoluent de la même manière et les zones de basses pression correspondent à l'extrados. L'extrados correspond donc aux faibles valeurs des coefficients C_{p_i} .

4) a) La cavitation apparaît là où la pression est la plus faible, c.-à-d. sur l'extrados au niveau du bord d'attaque.

b) i) La poche de cavitation se repère par sa pression constante au niveau de l'extrados : elle commence proche du bord d'attaque ($x_i \approx 0.1$), s'arrête pour $x_i \approx 0.4$ et couvre donc un tiers de l'aile.

ii) La portion de courbe en pointillés correspond à ce que l'on aurait obtenu en l'absence de cavitation.

iii) Pour déterminer la vitesse V , on utilise l'expression des coefficients C_{p_i} au niveau de la poche de cavitation. Avec $P = P_v$ et $C_{p_i} \approx -1.6$, on peut écrire :

$$C_{p_i} = \frac{P_v - P_\infty}{\frac{1}{2}\rho V^2}$$

$$\Rightarrow V = \sqrt{\frac{P_v - P_\infty}{\frac{1}{2}\rho C_{p_i}}}$$

De plus : $P_\infty = P_0 + \rho gh$.

AN : $V = 11.3 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} = 21.9 \text{ nds}$.

c) Le phénomène de cavitation limite les performances de l'hydrofoil : il entraîne une perte de portance et induit des vibrations pouvant endommager

le foil. Les performances de l'hydrofoil sont limitées par la cavitation. Une solution simple serait de disposer de foils à des profondeurs plus importantes.