

DS de Physique 19 octobre 2022

PSI - Lycée du Parc des Loges

Durée 4H

Calculatrices autorisées

Partie I – Ecoulement d'un glacier (durée conseillée 1H45)

Un glacier est une masse de glace qui se forme par le tassement de couches de neige accumulées ; écrasée sous son propre poids, la neige expulse l'air qu'elle contient, se soude en une masse compacte et se transforme en glace.

Du fait de sa plasticité, un glacier s'écoule lentement sous l'effet de la gravité le long d'une pente avec une vitesse d'écoulement très variable selon la pente, la topographie du lit rocheux ou l'épaisseur de la glace. Sa vitesse moyenne est de l'ordre de quelques centimètres à quelques dizaines de centimètres par jour, le record revenant au glacier Kangerdlugssuaq dans le Groenland où la vitesse moyenne atteinte est de 14 kilomètres par an.

A / ETUDE PRELIMINAIRE (ECOULEMENT D'UNE COUCHE DE MIEL)

En préambule à l'étude d'un glacier, intéressons nous à l'écoulement d'un fluide visqueux, par exemple une couche de miel, sur une plaque plane inclinée.

Une couche d'épaisseur constante h , d'un fluide visqueux newtonien incompressible, de viscosité dynamique η et de masse volumique ρ , s'écoule dans le champ de pesanteur supposé uniforme, sur un plan incliné faisant un angle α avec l'horizontale (Figure 1).

La viscosité cinématique est définie comme le rapport $\nu = \eta / \rho$.

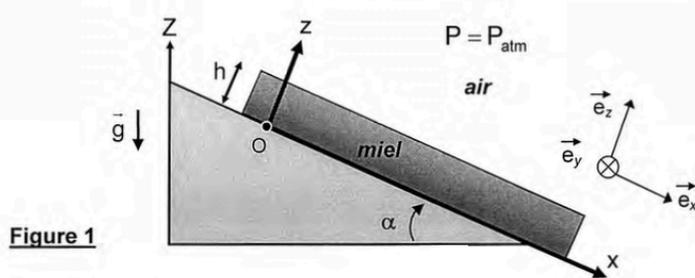


Figure 1

Le support plan incliné a pour équation $z = 0$ et la surface libre correspond à $z = h$. Les forces de viscosité exercées par l'air sur la surface supérieure de la couche de miel sont négligées. A l'interface air-miel, la pression est uniforme et égale à la pression atmosphérique. Les dimensions du système dans les directions Ox et Oy sont très supérieures à l'épaisseur h de la couche de miel.

Hypothèse : l'écoulement est réalisé en régime permanent.

A1. Préciser l'orientation des lignes de courant dans la couche de miel.

A2. Montrer alors que pour un écoulement incompressible et uniforme le champ de vitesse s'écrit sous la forme : $\vec{v} = v(z) \vec{e}_x$, en précisant vos hypothèses.

A3. Dans les conditions qui viennent d'être décrites, simplifier l'équation générale de NAVIER-STOKES : $\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\text{grad } P + \rho \vec{g} + \eta \Delta \vec{v}$. (D désigne la dérivée particulaire)

A4. Projeter l'équation locale de la dynamique qui en résulte sur la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. En déduire les expressions des composantes du vecteur $\text{grad } P$ sur cette base.

A5. Justifier que la répartition de pression dans le miel s'écrit $P = P(z)$, puis l'exprimer.

A6. Etablir l'équation différentielle $\frac{d^2v(z)}{dz^2} + k \sin \alpha = 0$ vérifiée par la vitesse $v(z)$ et identifier k .

A la surface libre, sur le plan d'équation $z = h$, la contrainte tangentielle exercée à la surface libre par la couche d'air sur la couche de miel est nulle.

A7. Ecrire, en les justifiant, les conditions aux limites relatives à la vitesse v , en $z = 0$ et à sa dérivée $\frac{dv(z)}{dz}$, en $z = h$.

A8. Résoudre l'équation différentielle et montrer que le profil de vitesse dans la couche de miel vérifie la relation : $v(z) = \beta z(2h - z)$. Identifier β .

Localiser le point où cette vitesse est maximale et préciser l'expression correspondante de la vitesse v_{MAX} . Calculer v_{MAX} sachant que $h = 3,0 \text{ mm}$, $\alpha = 10^\circ$, $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$ et que, pour le miel, $\rho = 1,4 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$ et $\eta = 10,0 \text{ Pa.s}$.

A9. Représenter le champ des vitesses de cet écoulement, en respectant sa configuration géométrique (figure 1).

La couche de miel possède une largeur W (selon Oy) qui demeure très grande par rapport à l'épaisseur h .

A10. Exprimer le débit volumique Q_V du miel. En déduire la vitesse moyenne $\langle v \rangle$ de l'écoulement et l'exprimer en fonction de v_{MAX} .

A11. Exprimer le nombre de Reynolds comme le rapport de deux temps typiques qu'il conviendra de justifier. En déduire son expression littérale et sa valeur numérique. Qualifier la nature de l'écoulement.

B / DYNAMIQUE D'UN GLACIER

Les mouvements d'un glacier peuvent être modélisés par l'écoulement d'un fluide newtonien extrêmement visqueux. Afin d'adopter une géométrie simple, la vallée glaciaire est assimilée à une canalisation de section rectangulaire en forme de U dont le fond est incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale (Figure 2). La masse de glace occupant cette vallée possède une largeur moyenne a et une épaisseur moyenne h , avec $a = 2h$.

Compte tenu de la géométrie proposée, la nouvelle répartition de la vitesse dans les couches du glacier s'écrit : $\vec{v}(M) = v(y, z) \vec{e}_x$.

Compte tenu de la géométrie proposée, la nouvelle répartition de la vitesse dans les couches du glacier s'écrit : $\vec{v}(M) = v(y, z) \vec{e}_x$.

B1. Etablir, à partir des résultats obtenus dans l'étude préliminaire, l'équation différentielle décrivant l'écoulement du glacier en régime permanent.

Afin de simplifier la description de cet écoulement, réalisons les changements de variables suivants : $y = y' a$, $z = z' a$. Les grandeurs y' et z' sont adimensionnées.

B2. Transformer l'équation différentielle précédente en introduisant une vitesse caractéristique v_0 , et en posant $v = v' v_0$, de façon à obtenir une équation différentielle adimensionnée en $v'(y', z')$, pouvant s'écrire : $\frac{\partial^2 v'}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial z'^2} + 1 = 0$. Expliciter v_0 .

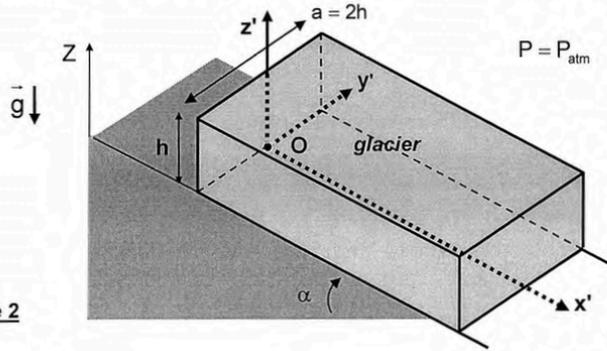


Figure 2

B3. Préciser les conditions aux limites vérifiées par la solution $v'(y', z')$, en $z' = 0$ et $y' = \pm 1/2$, puis par sa dérivée $\frac{dv'}{dz'}$, en $z' = 1/2$.

La résolution informatique de cette équation différentielle permet d'obtenir le tracé de v' en fonction de y' (Figure 3) pour différentes valeurs du paramètre z' (compris entre 0 et 1/2).

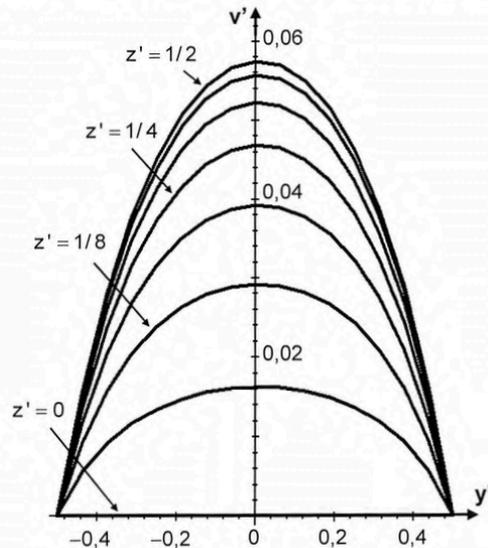


Figure 3

B4. Evaluer la valeur maximale v'_{MAX} atteinte par la vitesse adimensionnée v' à la surface supérieure du glacier.

De tout temps, les glaciologues ont tenté d'évaluer la déformation des glaciers et leur écoulement (autrefois à l'aide de pierres posées sur le glacier, plus récemment à l'aide de balises GPS et par interférométrie radar, comme étudié en seconde partie).

Etablie pour le glacier du Rhône près du col de la Furka dans le Valais suisse, la figure 4 présente, en superposition à une carte IGN, l'évolution d'une ligne d'environ 50 balises au cours d'une décennie (années référencées A, A+1, ..., A+9). A l'instant de référence (année A), les balises sont alignées sur la largeur a du glacier, entre deux moraines latérales.

B6. Estimer le déplacement de la balise centrale sur la durée de 9 années. Calculer la vitesse moyenne de déplacement en $m.an^{-1}$, puis en $m.s^{-1}$. En déduire la valeur de la vitesse caractéristique v_0 .

B7. Déterminer, puis calculer, la viscosité cinématique de la glace. Commenter.

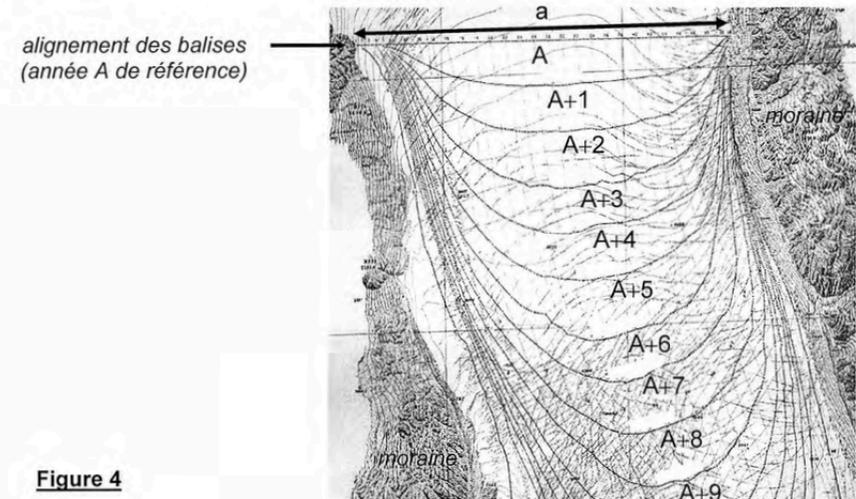


Figure 4

Écoulement du glacier du Rhône

Données : $a = 2h = 800$ m, angle moyen $\alpha = 14^\circ$ et $g = 10 m.s^{-2}$.

Partie II – Séchage des sols (durée conseillée 1H30)

On se propose ici de déterminer le temps de séchage complet d'un sol saturé en eau (**photo 4**).



Photo 4 - Sol saturé en eau

On travaille en coordonnées cartésiennes (x, y, z) de base orthonormée $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. Le sol (**figure 10**) est considéré comme infini dans les directions \vec{e}_x et \vec{e}_y . Le plan $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$ est ici considéré comme imperméable. Le sol s'étend depuis la côte $z = 0$ jusqu'à la côte H .

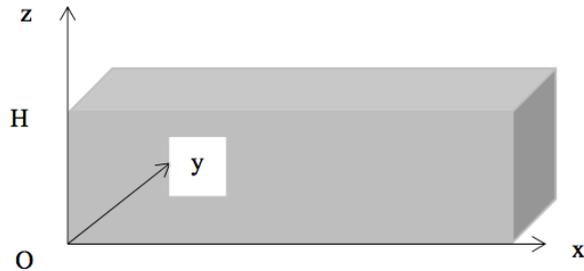


Figure 10 - Modèle du sol

On note T la température, supposée uniforme, de l'air extérieur situé en $z > H$ et assimilable à un gaz parfait ; R désigne la constante des gaz parfaits et N_A la constante d'Avogadro. La pression partielle de l'eau dans l'atmosphère est notée P_{ext} .

On admet que, sous l'action de l'air extérieur, le sol s'assèche par sa partie supérieure. On adopte un modèle dans lequel $z_m(t)$ délimite la partie mouillée du sol. On a $z_m(t=0) = H$. On note n_{liq} le nombre de molécules d'eau liquide par unité de volume de sol. n_{liq} est supposé constant dans la partie mouillée du sol.

À la date t , dans la zone $z < z_m(t)$, le sol est mouillé et contient de l'eau liquide. Dans la zone $z > z_m(t)$, le sol est sec mais contient de la vapeur d'eau assimilée à un gaz parfait. On fait l'hypothèse que cette vapeur d'eau est également à la température uniforme T . Elle diffuse vers l'extérieur suivant la loi de Fick de coefficient de diffusion D .

À l'interface sol-atmosphère, en $z = H$, le vecteur densité de courant en molécules d'eau est de la forme : $\vec{j} = h(P(H) - P_{ext})\vec{e}_z$ où $P(H)$ est la pression partielle de l'eau en $z = H$.

À la date t , pour $z > z_m(t)$, on note $n_{vap}(z, t)$ la densité locale en molécules d'eau sous forme vapeur et $\Phi_s(z, t)$ le débit ascendant en molécules d'eau qui traversent une section horizontale S , orientée vers le haut et située à la côte z .

Q31. Rappeler la définition de la pression de vapeur saturante.

Soit $P_{sat}(T)$ la pression saturante de l'eau et P_{ext} la pression partielle de l'eau dans l'atmosphère, la condition pour que le sol puisse effectivement sécher est : $P_{ext} < P_{sat}(T)$, sans quoi l'eau est à l'équilibre et ne s'évapore pas.

Q32. Pourquoi un sol sèche-t-il plus vite lorsqu'il y a du vent ?

Q33. Rappeler la loi de Fick et préciser les unités, dans le Système International, des grandeurs qui interviennent.

Q34. On considère une diffusion de particules unidimensionnelle et unidirectionnelle, en régime stationnaire, pilotée par un vecteur densité de courant $\vec{j}(z) = j(z)\vec{e}_z$. Réaliser un bilan de particules pour une tranche élémentaire de sol dz comprise entre $z_m(t)$ et H pour justifier que le débit ϕ_s est uniforme.

Q35. Pour $z_m(t) < z < H$, déterminer l'expression de $n_{vap}(z)$ en fonction de $n_{vap}(z_m(t))$, Φ_s , D , S , z et $z_m(t)$.

$$n_{vap}(z) = n_{vap}(z_m) - \frac{\phi_s}{DS}(z - z_m)$$

Q36. La vapeur d'eau est considérée comme un gaz parfait.

Q36. En considérant qu'en $z = z_m(t)$, la vapeur d'eau est en équilibre thermodynamique avec l'eau liquide, exprimer $n_{vap}(z_m(t))$ en fonction de N_A , $P_{sat}(T)$, R et T .

Q37. En déduire l'expression de $n_{vap}(z)$ en fonction de N_A , $P_{sat}(T)$, R , T , Φ_s , D , S , z et $z_m(t)$.

Q38. Exprimer alors $P(H)$ en fonction de $P_{sat}(T)$, N_A , R , T , Φ_s , D , S , H et $z_m(t)$.

Q39. En utilisant la condition à l'interface sol-atmosphère, montrer que :

$$\phi_s = \frac{hS(P_{sat} - P_{ext})}{1 + \frac{hRT}{N_A D}(H - z_m)}$$

Q40. Etablir l'équation différentielle d'évolution de $z_m(t)$ sous l'effet de l'évaporation des molécules d'eau à l'interface en $z = z_m(t)$:

$$\frac{dz_m}{dt} = - \frac{\phi_s}{n_{liq} S}$$

Q41. A l'aide des deux équations établies aux questions précédentes, en déduire l'équation différentielle vérifiée par $z_m(t)$.

Exprimer alors le temps de séchage $\tau_{\text{séchage}}$ en fonction de h , $P_{\text{sat}}(T)$, P_{ext} , n_{liq} , R , T , H , N_A et D .

Quelle condition permet ici d'utiliser les résultats des questions précédentes Q34. à Q39. pour le régime variable d'évolution de $z_m(t)$? Etablir littéralement et numériquement un critère de validité qui le justifie.

Q42. Le temps de séchage des sols dépend du phénomène de diffusion de la vapeur d'eau dans le sol et du phénomène d'évaporation à l'interface sol-atmosphère. On peut définir asymptotiquement deux zones, délimitées par une hauteur notée H_{lim} , dans lesquelles soit le phénomène de diffusion, soit le phénomène d'évaporation est déterminant. Préciser l'expression de H_{lim} en fonction de h , R , T , N_A et D .

Q43. Les figures 11 et 12 représentent le temps de séchage en fonction de la hauteur H pour $T = 300 \text{ K}$, $D = 5 \cdot 10^{-6} \text{ SI}$, $h = 5 \cdot 10^{17} \text{ molécules} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Pa}^{-1}$, $P_{\text{ext}} = 600 \text{ Pa}$ et $n_{liq} = 1,2 \cdot 10^{18} \text{ molécules} \cdot \text{m}^{-3}$. Déterminer à l'aide de ces courbes (échelles différentes) la valeur numérique de H_{lim} et préciser le positionnement de chacune de ces zones.

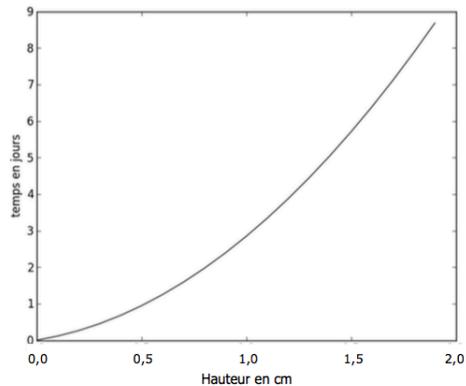


Figure 11 - Temps de séchage en fonction de la hauteur H

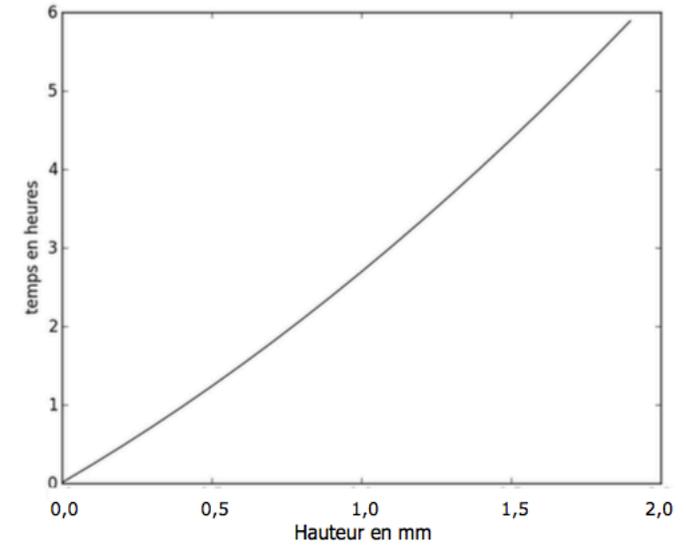


Figure 12 - Temps de séchage en fonction de la hauteur H

Constantes physiques

$$R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$$

$$N_A = 6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$$

Données physicochimiques

Densités et masse volumique

$$\text{Masse volumique de l'air dans les conditions ambiantes : } \rho_0 = 1,2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

Partie III – Décantation dans le traitement des eaux (durée conseillée 45 min)

La clarification par décantation est une des étapes réalisées dans le traitement des eaux des stations d'épuration. Elle consiste à éliminer les particules polluantes en suspension dans l'eau polluée.

L'eau polluée, c'est-à-dire chargée en particules non désirées, circule en continu dans le bassin de décantation (**figure 4**), à faible vitesse horizontale \vec{u} . Les particules ont le temps de se déposer au fond du bassin et l'eau de sortie est ainsi clarifiée.

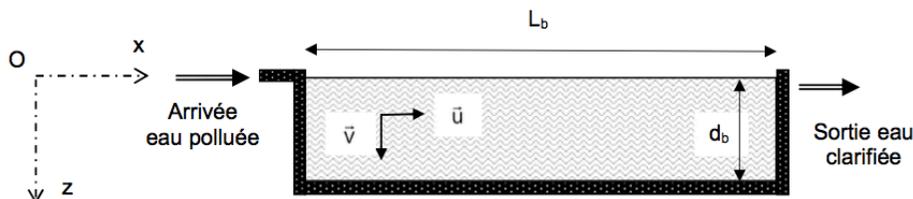


Figure 4 - Bassin de décantation

Le bassin de décantation est de longueur L_b et de profondeur d_b , sa largeur est indifférente. On note respectivement η et ρ_e la viscosité dynamique et la masse volumique de l'eau polluée. η et ρ_e sont supposées constantes.

On définit le repère $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ lié au bassin. L'axe Oz est vertical descendant. Le niveau d'entrée de l'eau dans le bassin correspond à la cote $z = 0$.

On suppose que les particules polluantes sont sphériques, de rayon r , et qu'elles sont soumises à la force de frottement fluide : $\vec{F} = -6\pi\eta r\vec{v}$, où \vec{v} est la vitesse des particules.

On note ρ_0 la masse volumique des particules polluantes, supposée constante. On a : $\rho_0 > \rho_e$.

On considère que l'eau arrive en amont du bassin avec une densité en particules polluantes notée N_0 .

II.1 - Décantation statique

Dans un premier temps, l'eau ne circule pas horizontalement, $\vec{u} = \vec{0}$, et les particules polluantes qu'elle contient chutent verticalement.

Compte tenu des phénomènes de transport des particules polluantes dans le bassin, la densité en particules polluantes n'est pas uniforme sur la hauteur du bassin. Elle dépend de la profondeur z . Dans le bassin, on note $n(z)$ la densité en particules polluantes à l'altitude z et n_0 la valeur associée à l'altitude $z = 0$, soit $n_0 = n(z = 0)$.

Q14. À partir de l'équation différentielle du mouvement, issue de la seconde loi de Newton, établir, en fonction de ρ_0 , ρ_e , r , η et de l'accélération g de la pesanteur, la vitesse limite $\vec{v}_1 = v_1\vec{e}_z$ atteinte par ces particules. Quel est le signe de v_1 ? Exprimer en fonction de ρ_0 , r et de η , le temps caractéristique τ_c d'établissement de cette vitesse limite.

On supposera par la suite que la constante de temps τ_c est très faible devant le temps de sédimentation (*i.e.* le temps de chute dans le bassin) de sorte que le mouvement des particules est considéré comme uniforme à la vitesse \vec{v}_1 .

Q15. Cette chute des particules est à l'origine d'un courant convectif vertical des particules. On note $\vec{j} = j(z)\vec{e}_z$, le vecteur densité de courant de particules associé. Préciser l'unité de \vec{j} . Puis exprimer le vecteur \vec{j} en fonction de $n(z)$ et de \vec{v}_1 .

En plus du courant précédent, on observe l'existence d'un second courant qui résulte d'un phénomène de diffusion. On note D le coefficient de diffusivité des particules dans l'eau et $\vec{j}_D = j_D(z)\vec{e}_z$ le vecteur densité de courant de particules associé à ce second courant.

Q16. Rappeler la loi de Fick. Justifier qualitativement l'existence de ce courant de diffusion. Préciser s'il est ascendant ou descendant.

Q17. En régime permanent, ces deux courants se compensent. En déduire, en fonction de n_0 , D et de v_1 l'expression de la densité de particules $n(z)$. Représenter graphiquement la fonction $n(z)$ en fonction de z .

Q18. Par conservation du nombre de particules sur une tranche verticale du bassin, exprimer n_0 en fonction de N_0 , D , d_b et de v_1 .

Q19. Définir en fonction de d_b , D et de v_1 , un temps caractéristique τ_s de sédimentation, ainsi qu'un temps caractéristique τ_D de diffusion des particules sur la hauteur du bassin.

Q20. Exprimer n_0 en fonction de N_0 , τ_s et de τ_D . À quelle condition portant sur τ_s et τ_D , la décantation statique permet-elle une clarification de l'eau ?

II.2 - Clarification dynamique de l'eau polluée

Dans un second temps, l'eau polluée est mise en mouvement et s'écoule avec une vitesse horizontale constante \vec{u} . Un aspirateur situé au fond du bassin aspire maintenant les particules polluantes.

Un modèle simple considère que le mouvement des particules polluantes est la combinaison d'un mouvement horizontal de vitesse \vec{u} dû à l'entraînement de l'eau et d'un mouvement vertical de chute à la vitesse constante \vec{v}_1 déterminée précédemment dans l'étude de la décantation statique. L'eau sera clarifiée si les particules polluantes introduites à l'entrée du bassin ont le temps de tomber au fond avant que l'eau d'entraînement, injectée à l'entrée du bassin en $x = 0$, ne soit parvenue à l'autre extrémité de sortie du bassin, située en $x = L_b$.

Q21. Définir en fonction de L_b et de u , un temps de traversée τ_T du bassin. À quelle condition, portant sur τ_T et τ_s , la clarification dynamique est-elle efficace ?