

DS de Physique 19 octobre 2022
PSI - Lycée du Parc des Loges
Difficulté supérieure

Durée 4H`
 Calculatrices autorisées

Partie I – Traitement des eaux usées

L'assainissement des eaux usées dans une station d'épuration nécessite de débarrasser les effluents domestiques ou industriels des sables, graisses, déchets ménagers et agents polluants. On s'intéressera ici plus spécifiquement au pré-traitement et au traitement primaire des eaux dans la station (voir figure 1). Les termes employés seront définis au fur et à mesure du problème.

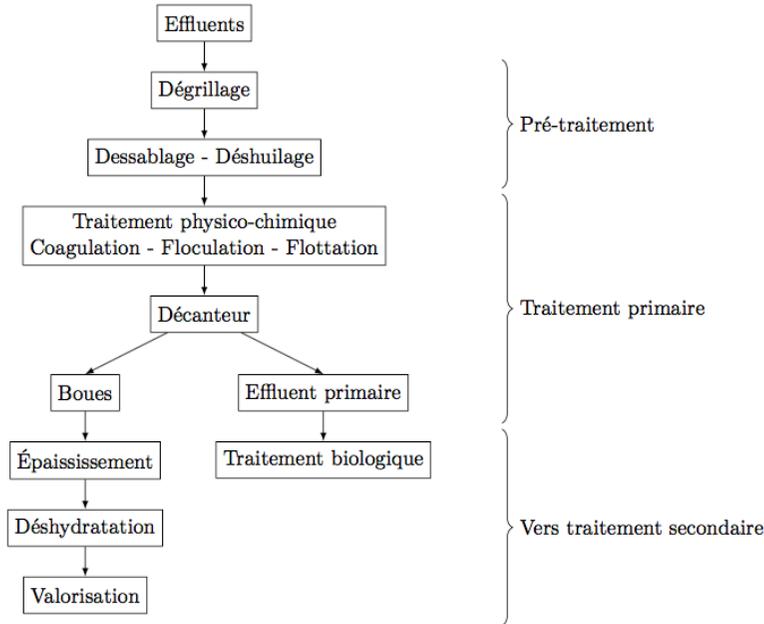


Figure 1 Traitements successifs des effluents dans une station d'épuration

La **partie I** étudie le principe de débitmètres adaptés aux conditions particulières des stations d'épuration et est complètement indépendante des parties suivantes. Les parties II et III s'intéressent à des procédés physiques de purification des eaux usées et sont largement indépendantes entre elles.

Les résultats numériques seront donnés avec un nombre de chiffres significatifs compatible avec celui utilisé pour les données.

Dans tout le problème, l'eau sera assimilée à un fluide incompressible.

II Dessablage - Déshuilage

On étudie dans cette partie la sédimentation ou la remontée à la surface de particules dans le bac de pré-traitement des eaux usées (*dessablage - déshuilage*), l'effluent ayant déjà traversé à l'entrée de la station d'épuration une grille qui retient les déchets solides les plus volumineux (*dégrillage*).

On modélise l'une de ces particules par une sphère homogène de masse volumique ρ_s et de rayon r . On note $d = \rho_s/\rho_e$ sa densité, où ρ_e est la masse volumique de l'eau. La vitesse de la bille sphérique est $\vec{v} = v(t)\vec{u}_z$.

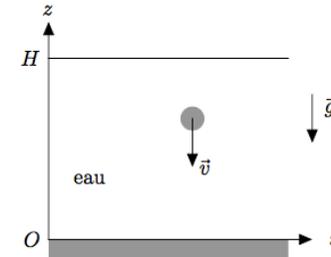


Figure 7 Particule sphérique plongée dans l'eau

II.A – On suppose que la force de traînée \vec{F}_t s'écrit sous la forme d'une force de Stokes :

$$\vec{F}_t = -6\pi\eta r\vec{v}$$

où η est la viscosité dynamique de l'eau.

II.A.1) Effectuer un bilan des forces s'exerçant sur la bille dans le référentiel du fluide au repos supposé galiléen.

II.A.2) Déterminer la vitesse limite de chute v_ℓ de la bille en fonction de r , d , g et $\nu = \eta/\rho_e$, viscosité cinématique de l'eau. À quelle condition y aura-t-il sédimentation, ou remontée en surface ?

II.B – Pour les différentes particules proposées dans le tableau 1, calculer la vitesse limite v_ℓ et le temps t_c nécessaire pour parcourir une hauteur $H = 2$ m, en supposant que la vitesse limite est immédiatement atteinte.

On prendra $\nu = 1,0 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ et $d = 2,65$ (densité du quartz) et on présentera les résultats sous la forme d'un tableau.

	Sable grossier	Sable fin	Limon	Argile	Colloïde
Rayon r	1 mm	100 μm	10 μm	1 μm	0,1 μm

Tableau 1 Taille typique de différentes particules

II.C – Exprimer le nombre de Reynolds Re caractéristique de l'écoulement autour de la bille en fonction des paramètres introduits. Sachant que l'expression de la force de traînée introduite en II.A peut être utilisée pour $Re \leq 5$, commenter les résultats de la question précédente.

II.D – Le temps de chute t_c des particules ne peut dépasser 2 heures, afin d'éviter la remontée de sédiments provoquée par la sédimentation des boues. En déduire la taille minimale r_{\min} des particules solides éliminées dans le dessableur.

II.E – Dimensionnement du dessableur

Le débit à traiter est $Q = 20 \text{ L}\cdot\text{s}^{-1}$, soit environ 1700 m^3 par jour. Le dessableur longitudinal est un bac de profondeur $H = 2,0 \text{ m}$, de longueur L et de largeur $\ell = L/6$. Les eaux usées traversent le bac dessableur avec une vitesse $\vec{v}_{\text{eau}} = v_{\text{eau}} \vec{u}_x$.

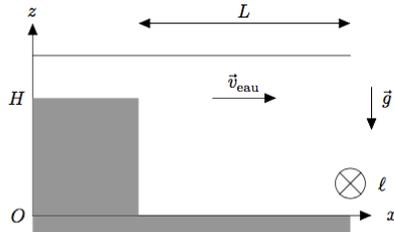


Figure 8 Vue de profil d'un bac dessableur

II.E.1) Quelle est la forme de la trajectoire des particules solides dans le référentiel du sol ? Estimer, en régime permanent, le temps Δt mis par l'eau, support des particules, pour traverser le dessableur.

II.E.2) Quelle relation doit exister entre $t_c(r_{\min})$ et Δt pour que toutes les particules de rayon supérieur à r_{\min} sédimentent ? Déterminer numériquement la longueur minimale L_{\min} du bac dessableur.

III Décantation des boues résiduelles

Cette partie s'intéresse à la modélisation des processus de sédimentation au sein du décanteur primaire, sous l'action du champ de pesanteur uniforme $\vec{g} = -g\vec{u}_z$. L'eau à traiter est assimilée à une suspension dans l'eau de particules sphériques identiques de rayon $r \leq 1 \mu\text{m}$ et de densité d . On note $n^*(z, t)$ la densité volumique de particules, exprimée en particules- m^{-3} .

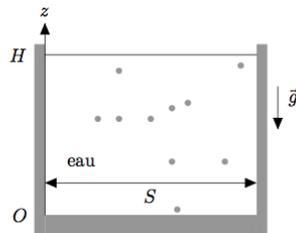


Figure 9 Particules en suspension dans un bac décanteur

III.A – Profil de concentration à l'équilibre dans un modèle convecto-diffusif

On assimile le bac décanteur à une cuve de hauteur $H = 2 \text{ m}$ et de section S .

III.A.1) On s'intéresse ici à l'évolution de la densité volumique de particules n^* au cours du temps, sous l'effet de la diffusion et de la gravité.

a) La diffusion de particules se traduit par l'existence d'un flux de particules \vec{j}_D . De la même façon que la diffusion thermique dans un milieu se traduit par un flux thermique \vec{j}_Q proportionnel et opposé au gradient de température $\vec{j}_Q = -\lambda \text{grad} T$ (loi de Fourier), la diffusion de particules se traduit par un flux de particules

proportionnel et opposé au gradient de concentration, soit ici $\vec{j}_D = -D \overline{\text{grad}} n^*$. La constante D est le coefficient de diffusion des particules sphériques dans l'eau.

Exprimer \vec{j}_D en fonction de D , $\frac{\partial n^*}{\partial z}$ et d'un vecteur unitaire.

b) En l'absence de diffusion, les particules ont un mouvement rectiligne uniforme dirigé vers le fond du bac, à la vitesse v_ℓ . Déterminer l'expression du flux de particules \vec{j}_C associé à la convection, en fonction de $n^*(z, t)$ et v_ℓ . En déduire le flux total de particules $\vec{j} = \vec{j}_D + \vec{j}_C$.

c) Montrer que l'évolution de $n^*(z, t)$ est régie par l'équation de Mason-Weaver :

$$\frac{\partial n^*}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n^*}{\partial z^2} + v_\ell \frac{\partial n^*}{\partial z}$$

III.A.2) On cherche le profil de concentration $n_\infty^*(z)$ en régime stationnaire.

a) Donner la forme de la solution générale pour $n_\infty^*(z)$, en introduisant une longueur caractéristique λ . Écrire la condition limite pour le flux total \vec{j} en $z = 0$, et en déduire la nouvelle forme de $n_\infty^*(z)$, que l'on exprimera en fonction de $n_0^* = n_\infty^*(z = 0)$, λ et z .

b) La relation de fluctuation-dissipation d'Einstein relie le coefficient de diffusion D au coefficient de frottement de la force de Stokes :

$$D = \frac{k_B T}{6\pi\eta r}$$

Montrer que la répartition des particules $n_\infty^*(z)$ peut s'interpréter à l'aide du facteur statistique de Boltzmann, qui stipule qu'à l'équilibre thermodynamique, $n_\infty^*(z)$ est proportionnelle au facteur $\exp\left(-\frac{e_p}{k_B T}\right)$, e_p étant l'énergie potentielle associée à une particule et k_B la constante de Boltzmann.

On pourra utiliser le résultat de la question II.A.

c) Pour $T = 300 \text{ K}$, estimer numériquement λ pour $r = 1 \mu\text{m}$, $r = 0,1 \mu\text{m}$ et $r = 0,01 \mu\text{m}$. Conclure quant à la nécessité de prendre en compte la diffusion dans la modélisation de la sédimentation.

III.B – Sédimentation d'une suspension concentrée

On néglige les effets diffusifs. À concentration élevée, la vitesse de sédimentation v_ℓ décroît avec la densité volumique de la boue. Ce phénomène est décrit par la loi empirique de Richardson-Zaki : $v_\ell(x) = v_0(1-x)^n$ où x est la fraction volumique en particules solides dans la boue, v_0 une constante et $n \simeq 5,1$.

III.B.1)

a) Relier $x(z, t)$ à la densité volumique en particules solides $n^*(z, t)$ et au volume $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ d'une particule solide. Tracer l'allure de la courbe $v_\ell = f(n^*)$.

b) Que représente la constante v_0 ? Quelle est la conséquence pour le mouvement macroscopique de l'eau de la chute d'un grand nombre de sédiments ? Expliquer alors qualitativement pourquoi v_ℓ décroît lorsque la concentration en particules augmente.

III.B.2) On note le flux de particules \vec{j} (qui s'assimile au flux convectif \vec{j}_C déterminé à la question III.A.1). Les particules se déplaçant uniquement vers le bas, on note $\vec{j} = -j(z, t)\vec{u}_z$.

Déterminer $j(z, t)$ en fonction de v_0 , V , n et $n^*(z, t)$.

En vous aidant de la courbe de la figure 10, déterminer la valeur maximale j_{\max} du flux de particules, en fonction de v_0 et V .

Que représente la pente du segment OM ?

III.B.3) Une suspension initialement homogène de densité volumique n_0^* laissée à décanter présente rapidement trois zones distinctes : une zone transparente (1) en haut du décanteur, une zone opaque (3) en bas, et une zone trouble (2) qui les sépare (voir figure 11).

a) En vous aidant de la figure 10, déterminer la valeur de n^* dans chacune de ces trois zones.

b) Par un bilan de particules entre les instants t et $t + dt$, montrer que la vitesse de déplacement \vec{v}_F d'une frontière séparant deux zones de densités volumiques de particules respectives n_-^* et n_+^* (voir figure 11) s'écrit :

$$\vec{v}_F = -\frac{j(n_+^*) - j(n_-^*)}{n_+^* - n_-^*} \vec{u}_z$$

c) La frontière entre (1) et (2) se déplace à une vitesse \vec{v}_{12} . Déterminer \vec{v}_{12} pour une fraction volumique $x = 10\%$ en sédiments, en fonction de v_0 .

d) La frontière entre (2) et (3) se déplace à une vitesse \vec{v}_{23} . Déterminer \vec{v}_{23} en fonction de v_0 .

Partie II – Conception technique d'une éolienne Darrius

Ce problème étudie les contraintes techniques liées à la conception des éoliennes, en accordant — sauf en partie I — une attention particulière aux éoliennes dites de Darrius de type H (Figure 1b).



a) Éoliennes à axe horizontal
b) Éolienne Darrius de type H

Figure 1 Différents types d'éoliennes

II Conversion énergie éolienne en énergie mécanique – éolienne type Darrius

On considère une éolienne à axe vertical, type Darrius H, FAIRWIND 10 kW, implantée sur un site d'essais dans l'Aude. Celle-ci a fait l'objet d'une étude de contrôle et a donc été instrumentée pour relever :

- la production de l'éolienne sur une période de 6 mois,
- la vitesse du vent à proximité de l'éolienne.

Les mesures effectuées sont reportés sur la figure 2 et synthétisées dans le tableau 1.

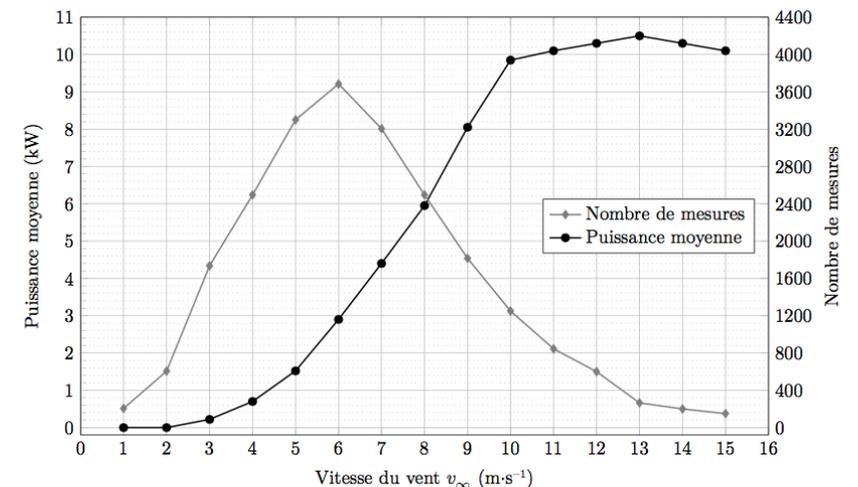


Figure 2 Mesures de contrôle sur site de l'éolienne FAIRWIND 10 kW.

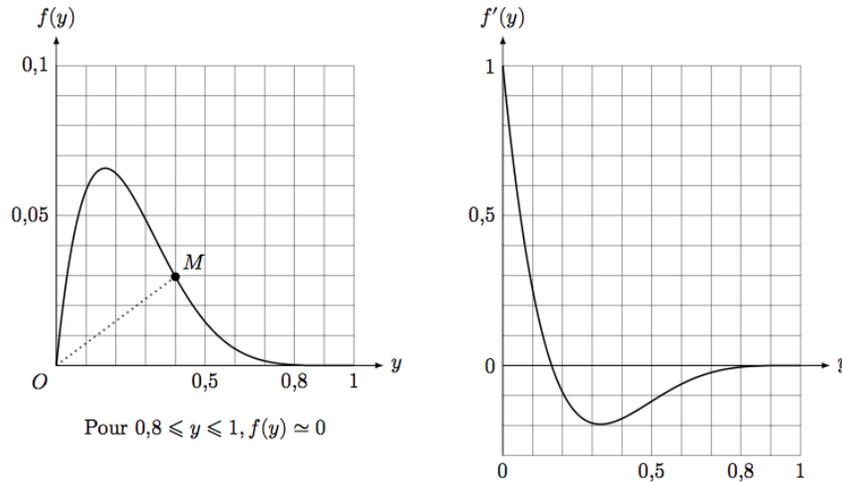


Figure 10 Tracé de la fonction $f(y) = y(1-y)^{5,1}$ et de sa dérivée



Figure 11 Décantation d'une suspension

III.B.4) On cherche à comprendre pourquoi de tels fronts de variation brusque de la concentration apparaissent quel que soit le profil initial de la concentration dans le décanteur.

a) On note $\vec{v}_{\text{iso}} = v_{\text{iso}}\vec{u}_z$ la vitesse de déplacement d'une surface horizontale de densité volumique n^* fixée.

Relier v_{iso} à $\frac{dj}{dn^*}$, puis tracer l'allure de $v_{\text{iso}}(n^*)$.

b) En déduire comment, à partir d'une suspension où la fraction volumique varie linéairement de 0 en surface à 0,80 au fond du décanteur, un front où la concentration varie brutalement peut se former dans le décanteur. On pourra représenter l'allure de l'évolution de $n^*(z, t)$ au cours du temps.

Données numériques

Perméabilité magnétique du vide

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H}\cdot\text{m}^{-1}$$

Accélération du champ de pesanteur terrestre

$$g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$$

Masse volumique de l'eau

$$\rho_e = 1000 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$$

Constante des gaz parfaits

$$R = 8,31 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$$

Constante d'Avogadro

$$\mathcal{N}_A = 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$$

Constante de Boltzmann

$$k_B = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}$$

Vitesse du vent ($\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$)	Puissance moyenne (W)	Nombre de mesures	% du temps
1 à 5	867	8350	37 %
6 à 10	5320	12460	54 %
11 à 15	10236	2060	9 %

Tableau 1 Synthèse des mesures de contrôle sur site de l'éolienne FAIRWIND 10 kW.

Q 3. Quelle est l'énergie produite par cette éolienne sur une année ? Justifier votre raisonnement. Quelle est la puissance moyenne produite sur une année.

On s'intéresse à la conversion de l'énergie éolienne en énergie mécanique sur cet exemple simple d'éolienne Darrieus. Pour ce type d'éolienne, les pales sont verticales. La surface qu'elles décrivent lors de leur rotation est un cylindre, appelé « cylindre éolien », de rayon R et de hauteur L .

L'étude suivante porte sur une éolienne à trois pales identiques.

L'éolienne est soumise à un vent constant de vitesse $\vec{v}_\infty = v_\infty \vec{e}_x$. Après un régime transitoire, les pales tournent à la vitesse angulaire $\omega = \dot{\theta} > 0$ constante autour de l'axe Oz . Dans toute la suite de l'étude, le régime est supposé permanent.



Éolienne Fairwind 10 kW

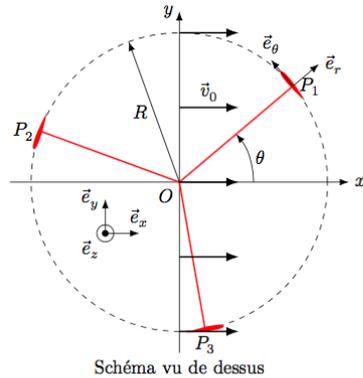


Schéma vu de dessus

Figure 3 Paramétrage de l'éolienne type Darrieus H

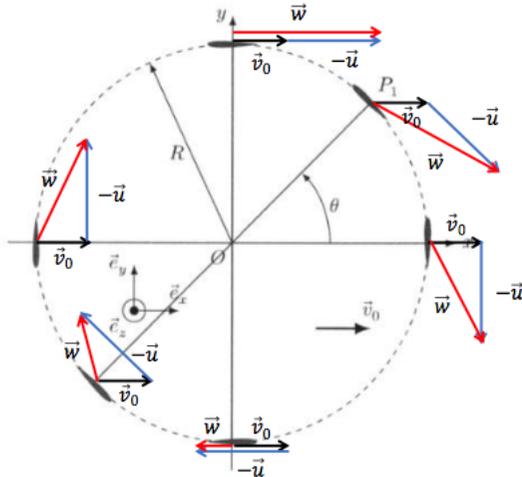


Figure 3 bis Champs de vitesse

On définit de plus (figure 3) :

- le centre de poussée P_i où s'appliquent les forces subies par la pale numéro i ;
- le référentiel $\mathcal{R}_0 = (O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ associé au sol auquel est ancré le mât de l'éolienne ;
- le référentiel $\mathcal{R}_1 = (P_1, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ associé à la pale n°1.
- la vitesse du vent au niveau de l'éolienne dans le référentiel \mathcal{R}_0 est supposée uniforme et vaut \vec{v}_0 avec $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_x = (1-a)v_\infty \vec{e}_x$ où a est appelé facteur d'interférence entre le vent et l'éolienne ;
- la vitesse de P_1 dans le référentiel \mathcal{R}_0 est notée \vec{u} ;
- la vitesse apparente du vent dans le référentiel \mathcal{R}_1 au voisinage de P_1 est notée \vec{w} et est donnée par $\vec{w} = \vec{v}_0 - \vec{u}$.

On définit le coefficient de vitesse de l'éolienne (TSR pour Tip Speed Ratio en anglais) comme $\lambda = \frac{R\omega}{v_\infty}$. Pour l'étude suivante, on prendra $\lambda = 2,4$, $a = 0,37$ et $v_\infty = 6,0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

Nous étudions dans un premier temps la pale n°1.

Q4. La fig 3 bis représente, pour chaque position de la pale, les vecteurs \vec{v}_0 , $-\vec{u}$ et \vec{w} . Expliciter la composition des vitesses qui a permis de l'établir.

Q 5. Montrer que la norme de \vec{w} s'exprime par

$$w = v_0 \sqrt{1 + 2\lambda_0 \sin \theta + \lambda_0^2}$$

avec $\lambda_0 = \lambda/(1-a)$.

On note α l'angle d'attaque, l'angle entre l'opposé de la direction du vent et de la direction tangente à la pale, tel que $\alpha = (\vec{e}_\theta, -\vec{w})$. La vitesse relative du vent définit l'angle d'attaque (figure 4).

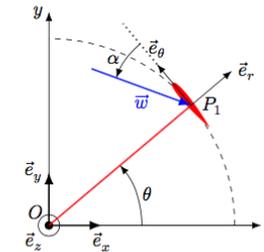


Figure 4 Définition de l'angle d'attaque α

Q 6. Montrer que $\tan \alpha = \frac{\cos \theta}{\sin \theta + \lambda_0}$.

Q 7. De façon qualitative, tracer α en fonction de θ . Obtenir numériquement l'intervalle des variations de α . Chaque pale a un profil d'aile symétrique de type NACA 0012.

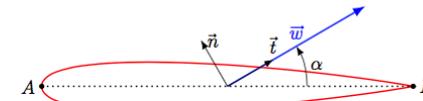


Figure 5 Définition de la corde $AB = \ell$ (en pointillés), de \vec{n} et de \vec{t} pour le profil NACA 0012.

La résultante des forces exercées par le vent sur la pale est notée \vec{F} et se décompose en une force de traînée \vec{F}_D (Drag) dans la direction de l'écoulement et une force de portance \vec{F}_L (Lift) dans la direction perpendiculaire à l'écoulement :

$$\vec{F} = \vec{F}_L + \vec{F}_D.$$

Les coefficients aérodynamiques de portance C_L et de traînée C_D sont définis par

$$\begin{cases} \vec{F}_L = \frac{1}{2} C_L \rho S w^2 \vec{n} \\ \vec{F}_D = \frac{1}{2} C_D \rho S w^2 \vec{t} \end{cases}$$

où \vec{l} est le vecteur unitaire dans la direction et le sens de la vitesse relative du vent \vec{w} et \vec{n} est le vecteur normal à \vec{l} dans le plan perpendiculaire à l'axe Oz , orienté vers l'extérieur de l'éolienne. On note ρ_{air} la masse volumique de l'air et S est la surface alaire de l'aile, c'est-à-dire la projection de l'aile sur le plan contenant la corde.

Les coefficients aérodynamiques dépendent de l'angle d'attaque. Les courbes donnant $C_L(\alpha)$ et $C_D(\alpha)$ sont données figure 6 pour différentes valeurs du nombre de Reynolds Re . Pour une aile, on précise que la distance caractéristique intervenant dans le nombre de Reynolds est la corde ℓ .

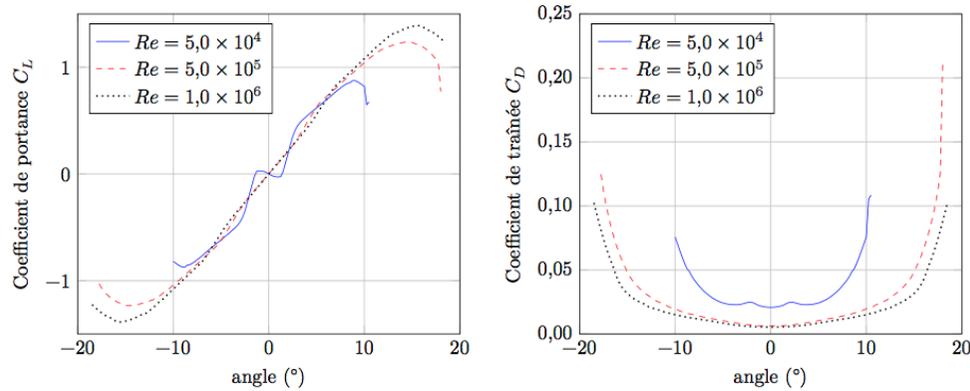


Figure 6 Coefficients de portance (*Lift*) et de traînée (*Drag*) en fonction de l'angle d'attaque exprimé en degrés pour trois valeurs du nombre de Reynolds

Q 8. Justifier que, dans le cas des pales de l'éolienne et pour la valeur de λ_0 considérée, on peut écrire en première approximation que $C_L(\alpha) \approx k\alpha$ et $C_D \ll C_L$. Estimer k .

Sauf mention contraire, on prendra dans la suite $C_D = 0$ et $C_L(\alpha) = k\alpha$.

Q 9. Exprimer la force \vec{F}_1 exercée par le vent sur la pale n°1 dans la base ($\vec{e}_r, \vec{e}_\theta$). Commenter l'effet de chacune des composantes sur la rotation de l'éolienne.

Q 10. Exprimer $\mathcal{M}_{z,1}$, moment de la force \vec{F}_1 par rapport à l'axe Oz et montrer que

$$\mathcal{M}_{z,1} = \kappa f(\theta)$$

où $f(\theta) = (1 + 2\lambda_0 \sin \theta + \lambda_0^2) \frac{\cos^2 \theta}{(\lambda_0 + \sin \theta)^2}$. En déduire κ .

Q 11. Exprimer le couple Γ_z engendré par les trois pales sur le rotor de l'éolienne.

Le tracé de la courbe $F(\theta) = \sum_{n=0}^2 f\left(\theta + n \frac{2\pi}{3}\right)$ est fourni figure 7.

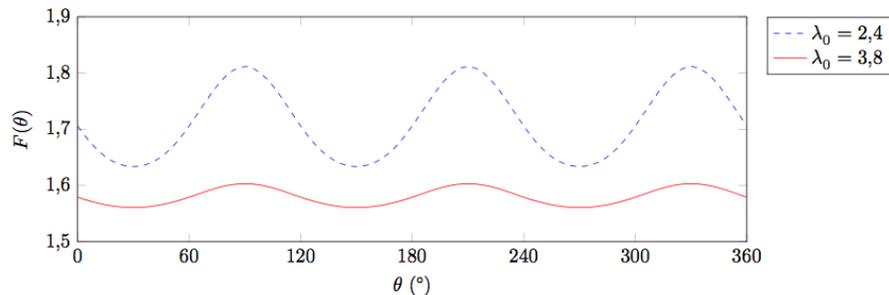


Figure 7 Tracé de $F(\theta) = \sum_{n=0}^2 f\left(\theta + n \frac{2\pi}{3}\right)$

Q 12. La puissance moyenne du couple est $\mathcal{P} = \langle \Gamma_z \rangle \omega$. En déduire la puissance moyenne transférée au rotor dans ce modèle. En donner une estimation numérique dans le cas considéré jusqu'ici. Donner un exemple concret d'objet ou d'installation électrique susceptible d'être alimenté par cette éolienne.

Donnée : $k = 6,3 \text{ rad}^{-1}$.

Q 13. Définir puis déterminer le débit d'énergie cinétique D_{E_c} traversant le cylindre éolien si l'éolienne était absente.

Q 14. Définir le coefficient de puissance η de l'éolienne qui représente le rendement moyen de l'éolienne en énergie. L'exprimer en fonction de k, λ, a et des données géométriques de l'éolienne. Faire l'application numérique. Commenter.

Q 15. Quelle sera(seront) la(les) fréquence(s) des composantes sinusoïdales du couple ? Donner leurs valeurs dans la plage de fonctionnement nominale, pour v_∞ allant de 0 à $16 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$?

Q 16. Montrer que la puissance de la force de traînée sur un tour est négative. Discuter de l'influence de C_D sur la puissance moyenne que peut fournir une éolienne.

Données et formulaire

Données numériques

Masse volumique de l'air

$$\rho_{\text{air}} = 1,2 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$$

Viscosité dynamique de l'air

$$\eta = 1,8 \times 10^{-5} \text{ Pa}\cdot\text{s}$$

Caractéristiques de l'éolienne Darrieus H

Rayon $R = 4,0 \text{ m}$

Corde $\ell = 0,45 \text{ m}$

Hauteur des pales $L = 8,0 \text{ m}$

Nombre de pales $N = 3$

Formules trigonométriques

$$\cos a + \cos b = 2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$\cos a - \cos b = -2 \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$\sin a + \sin b = 2 \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$\sin a - \sin b = 2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$$