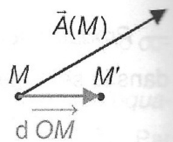
1.4 Circulation d'un champ de vecteur

On définit la circulation d'un champ de vecteur à un instant t si le champ n'est pas stationnaire. On omettra le temps t dans $\vec{A}(M,t)$ pour ne pas alourdir les notations. Considérons un déplacement élémentaire $\mathrm{d}\,\overrightarrow{OM}$ à partir du point M.



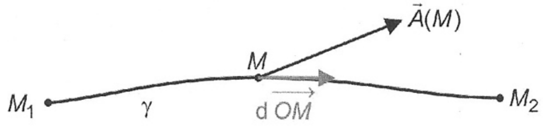
Par définition, la *circulation élémentaire* du champ de vecteur $\vec{A}(M)$ le long de ce déplacement élémentaire est le produit scalaire $\delta\mathscr{C} = \vec{A}(M)\cdot\mathrm{d}\,\overrightarrow{OM}$.

Attention ! Ce n'est pas *a priori* une différentielle, c'est-à-dire la variation élémentaire d'une fonction du point f : $\delta\mathscr{C} \neq \mathrm{d}f = f(M') - f(M)$, avec $\overrightarrow{MM'} = \mathrm{d}\,\overrightarrow{OM}$.

Par exemple, le travail élémentaire d'une force $\vec{F}(M)$ s'exerçant sur un point matériel qui se déplace de $\mathrm{d}\,\overrightarrow{OM}$ est une circulation : $\delta W = \vec{F}(M)\cdot\mathrm{d}\,\overrightarrow{OM}$.

La circulation d'un champ de vecteur le long d'un contour orienté γ allant de M_1 à M_2 est la somme des circulations élémentaires sur ce chemin, et dépend *a priori* du chemin γ choisi pour aller de M_1 à M_2 : $\mathscr{C}^{\gamma}_{M_1\to M_2} = \int_{M_1}^{M_2} \vec{A}(M)\cdot\mathrm{d}\,\overrightarrow{OM}$.

On a en conséquence $\mathscr{C}^{\gamma}_{M_1\to M_2} = -\mathscr{C}^{\gamma}_{M_2\to M_1}$.

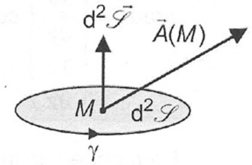


Si γ est fermé, on note $\mathscr{C}^{\gamma} = \oint_{\gamma} \vec{A}(M)\cdot\mathrm{d}\,\overrightarrow{OM}$ la circulation, *a priori* $\neq 0$.

1.5 Flux d'un champ de vecteur

On définit le flux d'un champ de vecteur à un instant t si le champ n'est pas stationnaire. On omettra de nouveau le temps t dans $\vec{A}(M,t)$ pour alléger les notations.

Considérons une surface élémentaire $\mathrm{d}^2\mathscr{S}$ autour d'un point M. Cette surface est limitée par un contour élémentaire fermé γ dont l'orientation détermine, grâce à la règle du tire-bouchon, celle du *vecteur surface* $\mathrm{d}^2\vec{\mathscr{S}}$ (de norme $\mathrm{d}^2\mathscr{S}$ et orthogonal à l'élément de surface).



Le *flux élémentaire* du champ $\vec{A}(M)$ à travers $\mathrm{d}^2\mathscr{S}$ est égal au produit scalaire $\mathrm{d}^2\Phi = \vec{A}(M)\cdot\mathrm{d}^2\vec{\mathscr{S}}$. Son signe dépend de l'orientation de $\mathrm{d}^2\vec{\mathscr{S}}$.

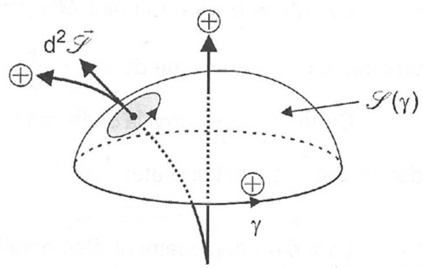
Le flux $\Phi_{\mathscr{S}}$ d'un champ de vecteur à travers une surface finie $\mathscr{S}$ est défini de la façon suivante :

— Si la surface *s'appuie sur un contour fermé* γ orienté :

$\Phi_{\mathscr{S}} = \iint_{\mathscr{S}(\gamma)} \vec{A}(M)\cdot\mathrm{d}^2\vec{\mathscr{S}}$.

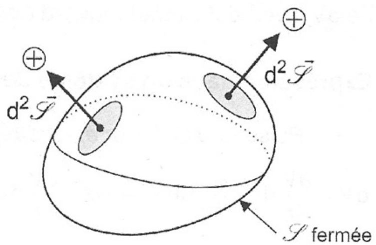
Ce flux dépend *a priori* de la surface $\mathscr{S}$ choisie s'appuyant sur γ.

Comme le montre la figure ci-contre, les vecteurs surface élémentaires sont orientés grâce à la règle du tire-bouchon dès que le contour γ l'est.



— Si la surface $\mathscr{S}$ est *fermée*, tous les vecteurs surface élémentaires sont orientés par convention *de l'intérieur vers l'extérieur*. Le flux du champ $\vec{A}(M)$ est alors noté ainsi :

$\Phi_{\mathscr{S}} = \oiint_{\mathscr{S}} \vec{A}(M)\cdot\mathrm{d}^2\vec{\mathscr{S}}$.



2. LES OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS LINÉAIRES

2.1 Gradient

Définition dans un système de coordonnées cartésiennes

L'opérateur gradient, noté $\overrightarrow{\text{grad}}$, est un opérateur linéaire qui s'applique à un champ de *scalaire* $V(M)$ et le transforme en champ de *vecteur* : $\overrightarrow{\text{grad}}\,V \in \mathbb{R}^3$.

$$\overrightarrow{\text{grad}}\,V = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial V}{\partial x} \\ \dfrac{\partial V}{\partial y} \\ \dfrac{\partial V}{\partial z} \end{pmatrix} \text{ sur la base de coordonnées cartésiennes } (\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z).$$

Remarque : on introduit parfois l'opérateur « *nabla* », noté $\vec{\nabla}$, dont l'expression en coordonnées cartésiennes est $\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$, si bien que $\overrightarrow{\text{grad}}\,V = \vec{\nabla} V$.

Définition intrinsèque

Lorsqu'on passe du point $M(x,y,z)$ au point $M'(x+\mathrm{d}x, y+\mathrm{d}y, z+\mathrm{d}z)$ infiniment proche, la fonction V varie de $\mathrm{d}V = \dfrac{\partial V}{\partial x}\mathrm{d}x + \dfrac{\partial V}{\partial y}\mathrm{d}y + \dfrac{\partial V}{\partial z}\mathrm{d}z = \overrightarrow{\text{grad}}\,V \cdot \mathrm{d}\,\overrightarrow{OM}$.

Cette relation fournit la définition *intrinsèque* (indépendante du système de coordonnées choisi) de l'opérateur $\overrightarrow{\text{grad}}$:

Lors d'un déplacement élémentaire $\mathrm{d}\,\overrightarrow{OM}$ au voisinage d'un point M, V varie de $\mathrm{d}V$, avec $\mathrm{d}V = (\overrightarrow{\text{grad}}\,V)(M) \cdot \mathrm{d}\,\overrightarrow{OM}$.

Expression dans un système de coordonnées cylindriques

Puisque $\mathrm{d}\,\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}r\,\vec{e}_r + r\,\mathrm{d}\theta\,\vec{e}_\theta + \mathrm{d}z\,\vec{e}_z$, on a :

$$\mathrm{d}V = \frac{\partial V}{\partial r}\mathrm{d}r + \frac{\partial V}{\partial \theta}\mathrm{d}\theta + \frac{\partial V}{\partial z}\mathrm{d}z = \frac{\partial V}{\partial r}\mathrm{d}r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta} r\mathrm{d}\theta + \frac{\partial V}{\partial z}\mathrm{d}z = \overrightarrow{\text{grad}}\,V \cdot \mathrm{d}\,\overrightarrow{OM}.$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}\,V = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial V}{\partial r} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial V}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial V}{\partial z} \end{pmatrix} \text{ sur la base } (\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z).$$

Expression dans un système de coordonnées sphériques

Puisque $\mathrm{d}\,\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}r\vec{e}_r + r\mathrm{d}\theta\,\vec{e}_\theta + r\sin\theta\mathrm{d}\varphi\;\vec{e}_\varphi$, on a :

$$\mathrm{d}V = \frac{\partial V}{\partial r}\mathrm{d}r + \frac{\partial V}{\partial \theta}\mathrm{d}\theta + \frac{\partial V}{\partial \varphi}\mathrm{d}\varphi = \frac{\partial V}{\partial r}\mathrm{d}r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta} r\mathrm{d}\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \varphi} r\sin\theta\mathrm{d}\varphi = \overrightarrow{\text{grad}}\,V \cdot \mathrm{d}\,\overrightarrow{OM}.$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}\,V = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial V}{\partial r} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial V}{\partial \theta} \\ \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial V}{\partial \varphi} \end{pmatrix} \text{ sur la base } (\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi).$$

Interprétation physique de l'opérateur gradient

$\left\|\overrightarrow{\text{grad}}\,V\right\|$ calculé au point M « mesure » les variations *spatiales* locales de V : plus V varie fortement au voisinage de M, plus $\left\|\overrightarrow{\text{grad}}\,V\right\|$ est grand. Le vecteur $\overrightarrow{\text{grad}}\,V$ indique la direction et le sens de la plus grande variation locale de V.

2.2 Rotationnel

Définition dans un système de coordonnées cartésiennes

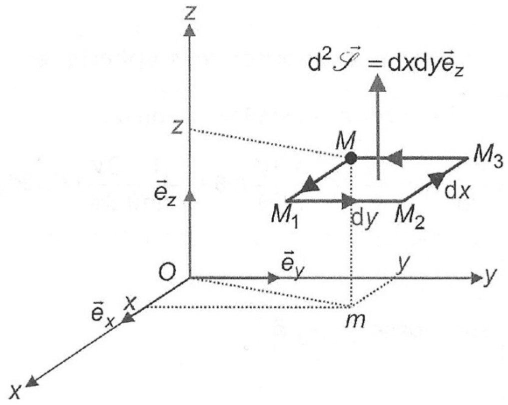
L'opérateur rotationnel, noté $\overrightarrow{\text{rot}}$, est un opérateur linéaire qui s'applique à un champ de *vecteur* $\vec{A}(M)$ et le transforme en champ de *vecteur* : $\overrightarrow{\text{rot}}\;\vec{A} \in \mathbb{R}^3$.

$$\overrightarrow{\text{rot}}\;\vec{A} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial A_z}{\partial y} - \dfrac{\partial A_y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial A_x}{\partial z} - \dfrac{\partial A_z}{\partial x} \\ \dfrac{\partial A_y}{\partial x} - \dfrac{\partial A_x}{\partial y} \end{pmatrix} \text{ sur la base } (\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z).$$

Remarque : $\overrightarrow{\text{rot}}\;\vec{A} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$.

Définition intrinsèque

Pour donner une définition intrinsèque de $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A}$, on calcule la circulation élémentaire $\delta^2\mathscr{C}$ de $\vec{A}$ le long d'un contour fermé. Ce contour étant élémentaire, peu importe sa forme : on choisit un rectangle de côtés dx et dy.



$\delta^2\mathscr{C} = \vec{A}(M)\cdot\overrightarrow{MM_1} + \vec{A}(M_1)\cdot\overrightarrow{M_1M_2} + \vec{A}(M_2)\cdot\overrightarrow{M_2M_3} + \vec{A}(M_3)\cdot\overrightarrow{M_3M}$. Or :

$\vec{A}(M)\cdot\overrightarrow{MM_1} = \vec{A}(M_1)\cdot\overrightarrow{MM_1}$, puisque $\overrightarrow{MM_1} = dx\vec{e}_x$ est déjà d'ordre 1 en dx, et de même

$\vec{A}(M_1)\cdot\overrightarrow{M_1M_2} = \vec{A}(M_2)\cdot\overrightarrow{M_1M_2}$. On a donc :

$\delta^2\mathscr{C} = \left[\vec{A}(M_1) - \vec{A}(M_2)\right]\cdot dx\vec{e}_x + \left[\vec{A}(M_2) - \vec{A}(M_3)\right]\cdot dy\vec{e}_y$.

$\delta^2\mathscr{C} = \left[-\dfrac{\partial A_x}{\partial y}dy\right]dx + \left[\dfrac{\partial A_y}{\partial x}dx\right]dy = \left[\dfrac{\partial A_y}{\partial x} - \dfrac{\partial A_x}{\partial y}\right]dxdy$, terme d'ordre 2.

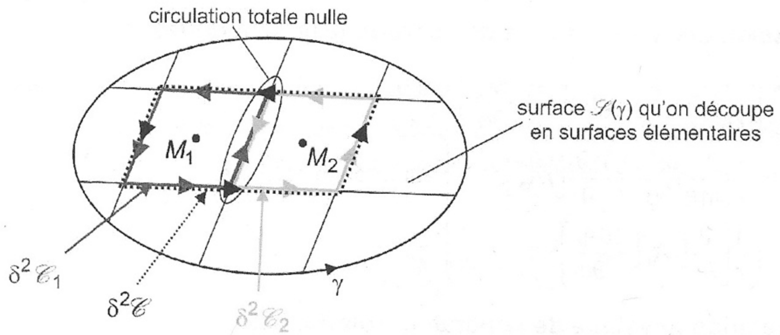
Finalement $\delta^2\mathscr{C} = \left[\left(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A}\right)\cdot\vec{e}_z\right]dxdy = \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A}\cdot dxdy\vec{e}_z = \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A}\cdot d^2\vec{\mathscr{S}}$.

Cette relation fournit la définition *intrinsèque* de l'opérateur $\overrightarrow{\text{rot}}$:

On considère un contour élémentaire orienté γ au voisinage d'un point M, et $d^2\vec{\mathscr{S}}$ le vecteur surface élémentaire d'une surface quelconque s'appuyant sur γ. La circulation du champ vectoriel $\vec{A}$ sur ce contour est $\delta^2\mathscr{C} = (\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A})(M)\cdot d^2\vec{\mathscr{S}}$.

Théorème de Stokes

On obtient la forme intégrale de cette relation, appelée théorème de Stokes, en découpant en surfaces élémentaires une surface quelconque $\mathscr{S}$ s'appuyant sur un contour fermé γ. On considère deux de ces surfaces élémentaires voisines (elles possèdent un bout de contour commun) autour de M_1 et M_2 :



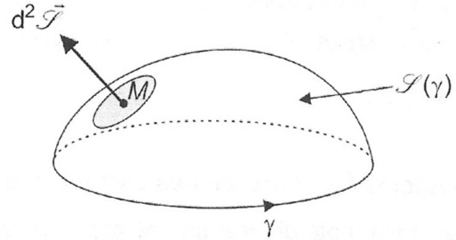
Les contours élémentaires sur lesquels elles s'appuient sont orientés dans le même sens que γ, si bien que la circulation sur le segment commun est comptée avec des signes opposés dans le calcul des circulations élémentaires $\delta^2\mathscr{C}_1$ et $\delta^2\mathscr{C}_2$.

La circulation $\delta^2\mathscr{C}$ sur le contour qui entoure les deux surfaces élémentaires vaut donc $\delta^2\mathscr{C} = \delta^2\mathscr{C}_1 + \delta^2\mathscr{C}_2 = (\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A})(M_1)\cdot d^2\vec{\mathscr{S}}_1 + (\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A})(M_2)\cdot d^2\vec{\mathscr{S}}_2$.

En sommant les circulations sur tous les contours élémentaires, on obtient :

$\displaystyle\oint_\gamma \vec{A}\cdot d\overrightarrow{OM} = \iint_{\mathscr{S}(\gamma)} \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A}\cdot d^2\vec{\mathscr{S}}$. C'est le *théorème de Stokes*.

La circulation du champ $\vec{A}$ sur un contour fermé γ est égale au flux de $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A}$ sur une surface quelconque $\mathscr{S}(\gamma)$ s'appuyant sur γ.



Grâce à la définition intrinsèque de l'opérateur rotationnel, on trouve, après calculs, les expressions de $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A}$ dans d'autres systèmes de coordonnées.

Expression dans un système de coordonnées cylindriques

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial A_z}{\partial\theta} - \dfrac{\partial A_\theta}{\partial z} \\ \dfrac{\partial A_r}{\partial z} - \dfrac{\partial A_z}{\partial r} \\ \dfrac{1}{r}\left[\dfrac{\partial}{\partial r}[rA_\theta] - \dfrac{\partial A_r}{\partial\theta}\right] \end{pmatrix} \text{ sur la base } (\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z).$$

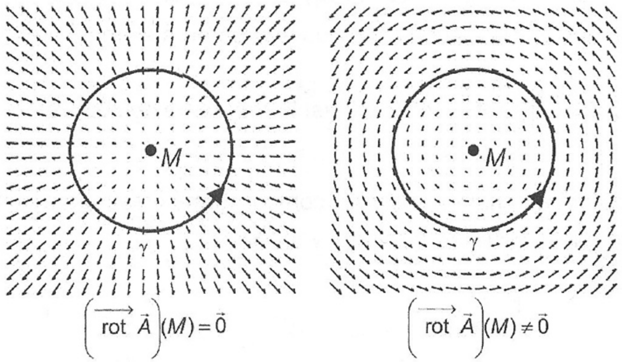
Expression dans un système de coordonnées sphériques

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{r\sin\theta}\left[\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left[A_\varphi \sin\theta\right] - \dfrac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right] \\ \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left[rA_\varphi\right] \\ \dfrac{1}{r}\left[\dfrac{\partial}{\partial r}\left[rA_\theta\right] - \dfrac{\partial A_r}{\partial\theta}\right] \end{pmatrix} \quad \text{sur la base } (\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi).$$

Interprétation physique de l'opérateur rotationnel

De $\delta^2\mathscr{C} = \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A}\cdot d^2\mathscr{S}$ on déduit que $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A}$ permet de quantifier le caractère *tourbillonnaire* d'un champ vectoriel au voisinage d'un point M.

Prenons l'exemple d'un champ localement radial : $\delta^2\mathscr{C} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A} = \vec{0}$, alors que pour un champ orthoradial, $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A} \neq \vec{0}$.



2.3 Divergence

Définition dans un système de coordonnées cartésiennes

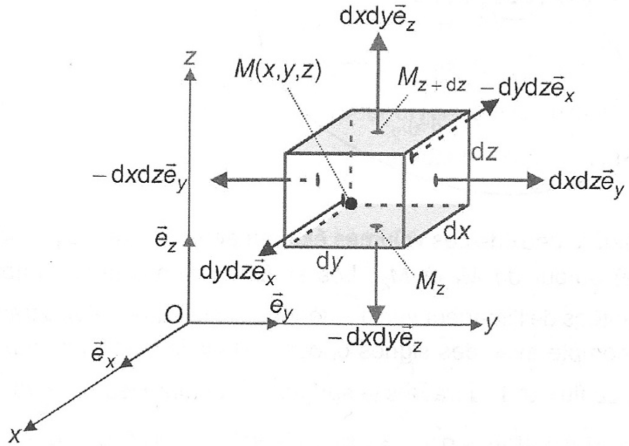
L'opérateur divergence, noté div, est un opérateur linéaire qui s'applique à un champ de vecteur $\vec{A}(M)$ et le transforme en un champ de *scalaire* : $\text{div}\vec{A} \in \mathbb{R}$.

$$\text{div}\vec{A} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}.$$

Remarque : $\text{div}\vec{A} = \vec{\nabla}\cdot\vec{A}$.

Définition intrinsèque

Pour donner une définition intrinsèque de $\text{div}\vec{A}$, on calcule le flux $d^3\Phi$ de $\vec{A}$ à travers une surface fermée élémentaire entourant un volume $d^3\mathscr{V}$. Ce volume étant élémentaire, peu importe sa forme : on choisit un parallélépipède de côtés dx, dy et dz. On a donc $d^3\mathscr{V} = dxdydz$.



Considérons les flux $\vec{A}(M_{z+dz})\cdot dxdy\vec{e}_z$ à travers la surface supérieure (qui se trouve dans le plan de cote $z+dz$) et $\vec{A}(M_z)\cdot(-dxdy\vec{e}_z)$ à travers la surface inférieure (qui se trouve dans le plan de cote z). Leur somme vaut $\left[A_z(M_{z+dz}) - A_z(M_z)\right]\cdot dxdy$.

Les surfaces $dxdy$ étant d'ordre 1 en dx et d'ordre 1 en dy, le calcul de cette somme donne $\dfrac{\partial A_z}{\partial z}dz\cdot dxdy$: elle est d'ordre 3. Le flux *total* vaut donc :

$$d^3\Phi = \left[\frac{\partial A_x}{\partial x}dx\right]\cdot dydz + \left[\frac{\partial A_y}{\partial y}dy\right]\cdot dxdz + \left[\frac{\partial A_z}{\partial z}dz\right]\cdot dxdy = \left[\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right]dxdydz.$$

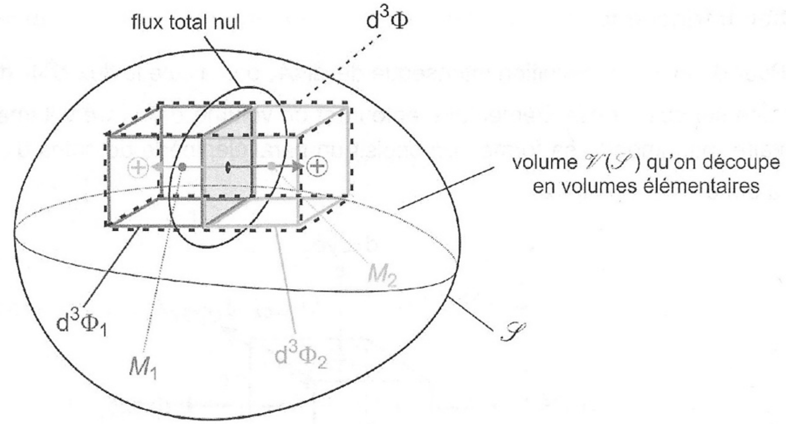
Finalement $d^3\Phi = \text{div}\vec{A}\,d^3\mathscr{V}$.

Cette relation fournit la définition *intrinsèque* de l'opérateur div :

On considère une surface élémentaire fermée entourant un point M. On note $d^3\mathscr{V}$ le volume élémentaire à l'intérieur de cette surface. Le flux $d^3\Phi$ d'un champ vectoriel $\vec{A}$ à travers cette surface est $d^3\Phi = (\text{div}\vec{A})(M)d^3\mathscr{V}$.

Théorème de Green-Ostrogradski

On obtient la forme intégrale de cette relation, appelée théorème de Green-Ostrogradski, en découpant en volumes élémentaires un volume $\mathscr{V}$ à l'intérieur d'une surface fermée $\mathscr{S}$.

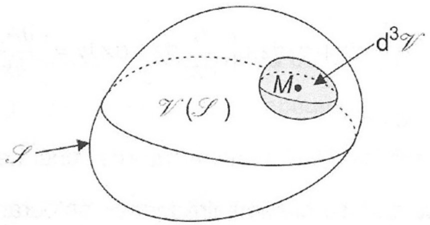


On considère deux de ces volumes élémentaires voisins (ils possèdent une surface commune) autour de M_1 et M_2. Les surfaces élémentaires entourant ces volumes sont orientées de l'intérieur vers l'extérieur, si bien que le flux à travers la surface commune est compté avec des signes opposés dans le calcul des flux élémentaires $d^3\Phi_1$ et $d^3\Phi_2$. Le flux $d^3\Phi$ à travers la surface qui entoure les deux volumes élémentaires vaut donc $d^3\Phi = d^3\Phi_1 + d^3\Phi_2 = (\text{div}\vec{A})(M_1)d^3\mathscr{V}_1 + (\text{div}\vec{A})(M_2)d^3\mathscr{V}_2$.

En sommant les flux à travers toutes les surfaces élémentaires, on obtient :

$\oiint_{\mathscr{S}} \vec{A}\cdot d^2\vec{\mathscr{S}} = \iiint_{\mathscr{V}(\mathscr{S})} \text{div}\vec{A}\, d^3\mathscr{V}$. C'est le théorème de *Green-Ostrogradski.*

Le flux du champ $\vec{A}$ à travers une surface fermée $\mathscr{S}$ est égal à l'intégrale de $\text{div}\vec{A}$ sur le volume $\mathscr{V}(\mathscr{S})$ à l'intérieur de $\mathscr{S}$.



Grâce à la définition intrinsèque de l'opérateur divergence, on trouve après calculs les expressions de $\text{div}\vec{A}$ dans d'autres systèmes de coordonnées.

Expression dans un système de coordonnées cylindriques

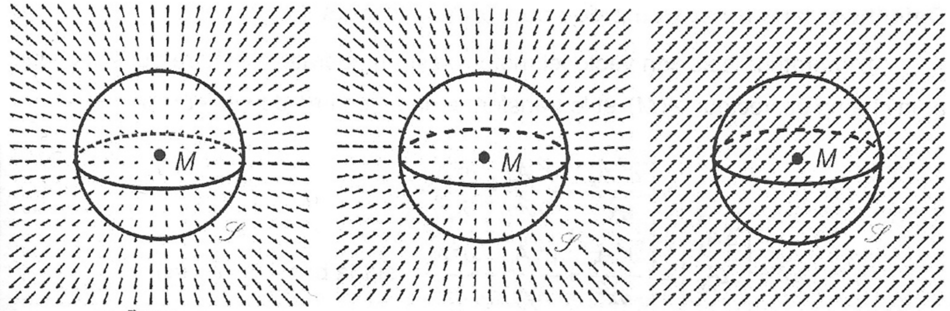
$$\text{div}\vec{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}[rA_r] + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}.$$

Expression dans un système de coordonnées sphériques

$$\text{div}\vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2 A_r\right] + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}[A_\theta \sin\theta] + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}.$$

Interprétation physique de l'opérateur divergence

De $d^3\Phi = \text{div}\vec{A}d^3\mathscr{V}$ on déduit que $\text{div}\vec{A}$ permet de quantifier le caractère *divergent* d'un champ vectoriel au voisinage d'un point M. Par exemple pour un champ localement radial et divergent : $d^3\Phi > 0 \Rightarrow \text{div}\vec{A} > 0$, alors que pour un champ localement radial et convergent : $\text{div}\vec{A} < 0$, et que pour un champ localement uniforme : $\text{div}\vec{A} = 0$. Par souci de lisibilité, le champ n'est représenté que dans un plan passant par M.



$(\text{div}\vec{A})(M) > 0$ | $(\text{div}\vec{A})(M) < 0$ | $(\text{div}\vec{A})(M) = 0$

2.4 Laplacien scalaire

Définition dans un système de coordonnées cartésiennes

L'opérateur laplacien scalaire, noté Δ, est un opérateur linéaire qui s'applique à un champ de scalaire $V(M)$ et le transforme en un champ de *scalaire* $\Delta V \in \mathbb{R}$.

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}.$$

Définition intrinsèque

On a $\Delta V = \text{div}\left[\overrightarrow{\text{grad}}\,V\right]$, relation qui constitue la définition *intrinsèque* du laplacien de V.

Remarque : $\Delta V = \vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}V) = \vec{\nabla}^2 V$.

Grâce à la définition intrinsèque de l'opérateur laplacien scalaire, on trouve les expressions de ΔV dans d'autres systèmes de coordonnées.

Expression dans un système de coordonnées cylindriques

$$\Delta V=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{\partial V}{\partial r}\right]+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\text{, ou }\Delta V=\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r}+\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}.$$

Expression dans un système de coordonnées sphériques

$$\Delta V=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right]+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right]+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2}.$$

On a aussi $\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right]=\frac{2}{r}\frac{\partial V}{\partial r}+\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}=\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}[rV]$.

2.5 Laplacien vectoriel

Définition dans un système de coordonnées cartésiennes

L'opérateur laplacien vectoriel, noté Δ, est un opérateur linéaire qui s'applique à un champ de vecteur $\vec{A}(M)$ et le transforme en un champ de *vecteur* $\Delta\vec{A}\in\mathbb{R}^3$.

$$\Delta\vec{A}=\begin{pmatrix}\Delta A_x\\ \Delta A_y\\ \Delta A_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2}\\ \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2}\\ \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2}\end{pmatrix}\text{ sur la base }(\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z).$$

Remarque : on peut trouver également la notation $\vec{\Delta}\vec{A}$, plus explicite quant au caractère vectoriel du résultat obtenu, mais moins utilisée.

Définition intrinsèque

On en déduit après calcul la définition intrinsèque :

$$\Delta\vec{A}=\overrightarrow{\text{grad}}\left[\text{div}\vec{A}\right]-\overrightarrow{\text{rot}}\left[\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A}\right].$$

Cette relation permet de trouver l'expression de $\Delta\vec{A}$ dans d'autres systèmes de coordonnées.

Expression dans un système de coordonnées cylindriques et sphériques

Attention ! Sauf dans un système de coordonnées cartésiennes, les composantes du laplacien vectoriel ne sont ***pas*** égales au laplacien scalaire des composantes de $\vec{A}$:

$$\Delta\vec{A}\neq\begin{pmatrix}\Delta A_r\\ \Delta A_\theta\\ \Delta A_z\end{pmatrix}\text{ sur la base }(\vec{e}_r,\vec{e}_\theta,\vec{e}_z)\text{, et }\Delta\vec{A}\neq\begin{pmatrix}\Delta A_r\\ \Delta A_\theta\\ \Delta A_\varphi\end{pmatrix}\text{ sur la base }(\vec{e}_r,\vec{e}_\theta,\vec{e}_\varphi).$$

L'expression la plus générale est lourde et très rarement utilisée. En revanche on calcule facilement $\Delta\vec{A}$ dans des cas particuliers. Par exemple en coordonnées sphériques, si $\vec{A}=A_\varphi(r,\theta)\vec{e}_\varphi$: on a $\Delta\vec{A}=\overrightarrow{\text{grad}}\left[\text{div}\vec{A}\right]-\overrightarrow{\text{rot}}\left[\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A}\right]$, avec ici $\text{div}\vec{A}=0$

et $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A}=\begin{pmatrix}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[A_\varphi\sin\theta\right]\\ -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[rA_\varphi\right]\\ 0\end{pmatrix}=\vec{a}=\begin{pmatrix}a_r(r,\theta)\\ a_\theta(r,\theta)\\ a_\varphi=0\end{pmatrix}$. On calcule alors :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{a}=\begin{pmatrix}\frac{1}{r\sin\theta}\left[-\frac{\partial a_\theta}{\partial\varphi}\right]\\ \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial a_r}{\partial\varphi}\\ \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}[ra_\theta]-\frac{\partial a_r}{\partial\theta}\right]\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ -\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left[rA_\varphi\right]-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[A_\varphi\sin\theta\right]\right]\end{pmatrix}.$$

Finalement, dans ce cas : $\Delta\vec{A}=\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left[rA_\varphi\right]+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[A_\varphi\sin\theta\right]\right]\right\}\vec{e}_\varphi$.

2.6 Formules utiles

Les formules intrinsèques suivantes peuvent par exemple être démontrées en coordonnées cartésiennes.

$$\overrightarrow{\text{rot}}\left[\overrightarrow{\text{grad}}\,V\right]=\vec{0}\qquad\qquad \text{div}\left[\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A}\right]=0.$$

$\text{div}(V\vec{A})=V\text{div}\vec{A}+\overrightarrow{\text{grad}}\,V\cdot\vec{A}$.

$\overrightarrow{\text{rot}}\,(V\vec{A})=V\,\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A}+\overrightarrow{\text{grad}}\,V\wedge\vec{A}$.

$\text{div}(\vec{A}\wedge\vec{B})=\vec{B}\cdot\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A}-\vec{A}\cdot\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B}$.

$$\overrightarrow{\text{rot}}\left[\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A}\right]=\overrightarrow{\text{grad}}\left[\text{div}\vec{A}\right]-\Delta\vec{A}\text{ (définition intrinsèque du laplacien vectoriel).}$$

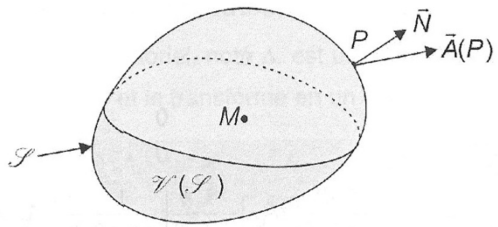
Deux théorèmes intégraux dérivés respectivement des théorèmes de Stokes et de Green-Ostrogradski peuvent être démontrés en utilisant les formules précédentes :

$$\oint_{\gamma} V \cdot \mathrm{d}\,\overrightarrow{OM} = \iint_{\mathscr{S}(\gamma)} \mathrm{d}^2\vec{\mathscr{S}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V.$$

$$\oiint_{\mathscr{S}} V \cdot \mathrm{d}^2\vec{\mathscr{S}} = \iiint_{\mathscr{V}(\mathscr{S})} \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V\,\mathrm{d}^3\mathscr{V}.$$

2.7 Théorème de Helmholtz (complément hors-programme)

Ce théorème assure l'*unicité* d'un champ de vecteur $\vec{A}$ dont on connaît le *rotationnel et la divergence* en tout point M d'un volume $\mathscr{V}$ contenu dans une surface fermée $\mathscr{S}$, à condition qu'on connaisse *les conditions aux limites* : $\vec{A}(P)\cdot\vec{N}$ en tout point P de $\mathscr{S}$, où $\vec{N}$ est la normale extérieure à $\mathscr{S}$ en P.



Pour un champ de *scalaire*, le théorème de Helmholtz assure l'*unicité* de V dont on connaît le *laplacien* en tout point M de $\mathscr{V}$, à condition qu'on connaisse les *conditions aux limites* : $V(P)$ ou $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V\cdot\vec{N}$ en tout point de $\mathscr{S}$.

Ces théorèmes d'unicité fonctionnent également quand le volume $\mathscr{V}$ est infini, à condition de connaître les conditions aux limites en l'infini.

3. CHAMPS PARTICULIERS

3.1 Champ à circulation conservative

Définition et propriétés

Les propositions suivantes sont équivalentes :

Un champ de vecteur $\vec{A}$ est à circulation conservative

$\Leftrightarrow \mathscr{C}^{\gamma}_{M_1\to M_2} = \int_{M_1}^{M_2} \vec{A}\cdot\mathrm{d}\,\overrightarrow{OM}$ est indépendante du chemin γ suivi entre M_1 et M_2

$\Leftrightarrow \mathscr{C}^{\gamma} = \oint_{\gamma} \vec{A}\cdot\mathrm{d}\,\overrightarrow{OM} = 0$ sur tout contour fermé γ

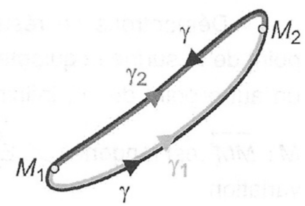
$\Leftrightarrow \exists\, V : M \mapsto V(M)\ /\ \delta\mathscr{C} = -\mathrm{d}V$ (V est appelé potentiel scalaire)

$\Leftrightarrow \exists\, V : M \mapsto V(M)\ /\ \vec{A} = -\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V$

$\Leftrightarrow\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A} = \vec{0}$ en tout point.

Les démonstrations de ces équivalences ne sont pas au programme. Nous allons nous limiter à démontrer quelques implications :

— Supposons $\mathscr{C}^{\gamma}_{M_1\to M_2}$ indépendant du chemin suivi γ (d'où : « champ $\vec{A}$ à circulation conservative »). Considérons un contour fermé γ quelconque et deux points distincts M_1 et M_2 sur ce contour. En suivant γ on a alors deux chemins différents γ_1 et γ_2 permettant d'aller de M_1 à M_2. D'après notre hypothèse : $\mathscr{C}^{\gamma_1}_{M_1\to M_2} = \mathscr{C}^{\gamma_2}_{M_1\to M_2}$. Avec l'orientation de γ précisée sur le schéma ci-contre, on a $\mathscr{C}^{\gamma} = \mathscr{C}^{\gamma_1}_{M_1\to M_2} - \mathscr{C}^{\gamma_2}_{M_1\to M_2} = 0$, ce qui montre bien que :



$\mathscr{C}^{\gamma} = \oint_{\gamma} \vec{A}\cdot\mathrm{d}\,\overrightarrow{OM} = 0$ pour tout contour fermé.

— Supposons de nouveau que $\mathscr{C}^{\gamma}_{M_1\to M_2}$ est indépendant du chemin suivi γ. Ceci signifie que la circulation entre M_1 et M_2 ne dépend que de ces deux points, donc qu'il existe une fonction V du point M telle que $\mathscr{C}^{\gamma}_{M_1\to M_2} = V(M_1) - V(M_2)$, soit :

$\delta\mathscr{C} = \vec{A}\cdot\mathrm{d}\,\overrightarrow{OM} = -\mathrm{d}V$, pour une circulation entre deux points infiniment proches. Comme on a aussi $\mathrm{d}V = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V\cdot\mathrm{d}\,\overrightarrow{OM}$, on en déduit $\vec{A}\cdot\mathrm{d}\,\overrightarrow{OM} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V\cdot\mathrm{d}\,\overrightarrow{OM}$ pour tout déplacement élémentaire $\mathrm{d}\,\overrightarrow{OM}$, ce qui n'est possible que si $\vec{A} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V$.

— Supposons $\mathscr{C}^{\gamma} = \oint_{\gamma} \vec{A}\cdot\mathrm{d}\,\overrightarrow{OM} = 0$ sur tout contour fermé. Le théorème de Stokes implique alors que $\oint_{\gamma} \vec{A}\cdot\mathrm{d}\,\overrightarrow{OM} = \iint_{\mathscr{S}(\gamma)} \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}\cdot\mathrm{d}^2\vec{\mathscr{S}} = 0$ quelle que soit la surface $\mathscr{S}$ s'appuyant sur γ, ce qui n'est possible que si $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A} = \vec{0}$ en tout point.

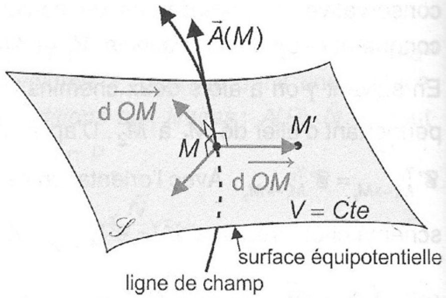
Une conséquence fondamentale de ces équivalences est la suivante : quel que soit le champ scalaire V, le champ $\vec{A} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V$ est à circulation conservative, donc son rotationnel est nul en tout point. On démontre ainsi l'identité $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left[\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V\right] = \vec{0}$.

Surfaces équipotentielles et autres propriétés

L'ensemble des points M vérifiant $V(M) = Cte$ forme une surface appelée surface équipotentielle.

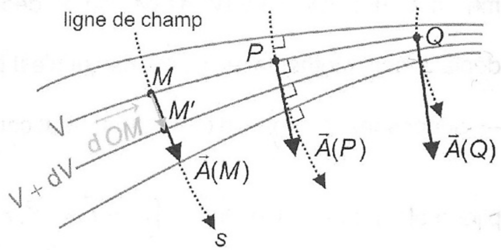
Nous allons énoncer deux propriétés supplémentaires d'un champ à circulation conservative.

Les lignes de champ sont orthogonales aux surfaces équipotentielles.



Démontrons ce résultat. Soit M un point de la surface équipotentielle $\mathscr{S}$ et M' un autre point de $\mathscr{S}$, infiniment proche de M : $\overrightarrow{MM'}$ est tangent à $\mathscr{S}$. Entre M et M', la variation $\mathrm{d}V = -\vec{A}(M)\cdot\overrightarrow{MM'} = -\vec{A}(M)\cdot \mathrm{d}\,\overrightarrow{OM}$ de potentiel est nulle : $\vec{A}(M)\cdot \mathrm{d}\,\overrightarrow{OM} = 0$, et ceci *quel que soit* $\mathrm{d}\,\overrightarrow{OM}$ tangent à $\mathscr{S}$ en M. On en conclut que $\vec{A}(M)$ est orthogonal au plan tangent à $\mathscr{S}$ en M : la ligne de champ passant par M est bien orthogonale au plan tangent à $\mathscr{S}$ en M.

Les lignes de champ sont orientées dans le sens des potentiels V décroissants. En conséquence, les lignes d'un champ à circulation conservative ne peuvent pas être fermées.



Considérons pour démontrer ce résultat une ligne de champ quelconque. On repère un point M le long de cette ligne, orientée dans le sens du champ $\vec{A}$, grâce à son abscisse curviligne s qui est la distance parcourue *le long de la ligne* entre un point O et le point M. Entre M et un point M' sur la même ligne de champ, infiniment proche de M, le potentiel passe de V à $V + \mathrm{d}V$, avec $\mathrm{d}V = -\vec{A}(M)\cdot\overrightarrow{MM'} = -\vec{A}(M)\cdot \mathrm{d}\,\overrightarrow{OM}$. Le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est colinéaire à $\vec{A}(M)$. Supposons-le dans le même sens : la distance algébrique $\mathrm{d}s = MM'$ le long de la ligne de champ est positive. On a donc $\mathrm{d}V = -\left\|\vec{A}(M)\right\|\cdot \mathrm{d}s < 0$: le potentiel décroît bien le long d'une ligne de champ. D'autre part, à $\mathrm{d}V$ constant, $\left\|\vec{A}(M)\right\| = |\mathrm{d}V/\mathrm{d}s| \nearrow$ si $\mathrm{d}s \searrow$.

Un champ à circulation conservative est intense là où les équipotentielles sont resserrées.

3.2 Champ à flux conservatif

Définition et propriétés

Les propositions suivantes sont équivalentes :

Un champ de vecteur $\vec{B}$ est à flux conservatif

$\Leftrightarrow \Phi_{\mathscr{S}} = \iint_{\mathscr{S}(\gamma)} \vec{B}\cdot \mathrm{d}^2\vec{\mathscr{S}}$ est indépendant de la surface qui s'appuie sur γ

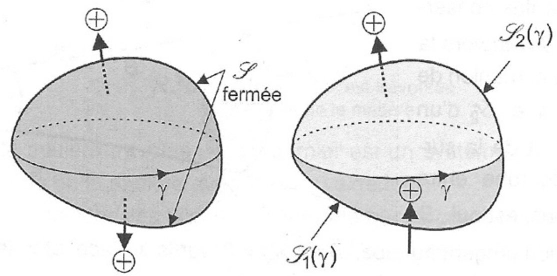
$\Leftrightarrow \Phi_{\mathscr{S}} = \oiint_{\mathscr{S}} \vec{B}\cdot \mathrm{d}^2\vec{\mathscr{S}} = 0$ à travers toute surface fermée $\mathscr{S}$

$\Leftrightarrow \exists\, \vec{A} : M \mapsto \vec{A}(M) \;/\; \vec{B} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}$ ($\vec{A}$ est appelé potentiel vecteur)

$\Leftrightarrow \mathrm{div}\vec{B} = 0$ en tout point.

Les démonstrations de ces équivalences ne sont pas au programme. Nous allons nous limiter à démontrer quelques implications :

— Supposons que $\Phi_{\mathscr{S}}$ ne dépende pas de la surface $\mathscr{S}$ qui s'appuie sur un contour fermé γ, mais seulement de γ. Considérons une surface fermée $\mathscr{S}$ quelconque et un contour fermé γ orienté tracé sur cette surface. Sur ce contour s'appuient deux surfaces distinctes $\mathscr{S}_1$ et $\mathscr{S}_2$ dont $\mathscr{S}$ est la réunion.



Les vecteurs surface élémentaires de $\mathscr{S}_1$ et $\mathscr{S}_2$ sont orientés en accord avec l'orientation de γ en suivant la règle du tire-bouchon. On a d'après notre hypothèse $\Phi_{\mathscr{S}_1} = \Phi_{\mathscr{S}_2}$. En revanche, les vecteurs surface élémentaires de $\mathscr{S}$ sont orientés de l'intérieur vers l'extérieur. Avec l'orientation de γ précisée sur le schéma ci-dessus, on a $\Phi_{\mathscr{S}} = \Phi_{\mathscr{S}_2} - \Phi_{\mathscr{S}_1} = 0$, ce qui montre bien que $\Phi_{\mathscr{S}} = \oiint_{\mathscr{S}} \vec{B}\cdot \mathrm{d}^2\vec{\mathscr{S}} = 0$ à travers toute surface fermée.

— Supposons qu'il existe un champ de vecteur $\vec{A}$ tel que $\vec{B} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}$. On a alors d'après le théorème de Stokes : $\iint_{\mathscr{S}(\gamma)} \vec{B}\cdot \mathrm{d}^2\vec{\mathscr{S}} = \iint_{\mathscr{S}(\gamma)} \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{A}\cdot \mathrm{d}^2\vec{\mathscr{S}} = \oint_{\gamma} \vec{A}\cdot \mathrm{d}\,\overrightarrow{OM}$. Le flux de $\vec{B}$ à travers une surface $\mathscr{S}$ s'appuyant sur un contour fermé γ ne dépend pas de $\mathscr{S}$ mais seulement de γ.

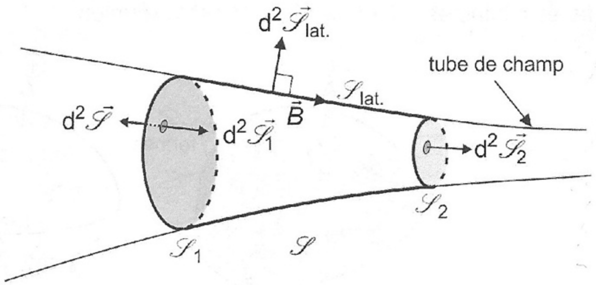
— Supposons que $\Phi_{\mathscr{S}} = \oiint_{\mathscr{S}} \vec{B}\cdot \mathrm{d}^2\vec{\mathscr{S}} = 0$ à travers toute surface fermée. Le théorème de Green-Ostrogradski implique alors que :
$\Phi_{\mathscr{S}} = \oiint_{\mathscr{S}} \vec{B}\cdot \mathrm{d}^2\vec{\mathscr{S}} = \iiint_{\mathscr{V}(\mathscr{S})} \mathrm{div}\vec{B}\,\mathrm{d}^3\mathscr{V} = 0$ dans tout volume $\mathscr{V}$ limité par une surface fermée, ce qui n'est possible que si $\mathrm{div}\vec{B} = 0$ en tout point.

Une conséquence fondamentale de ces équivalences est la suivante : quel que soit le champ vectoriel $\vec{A}$, le champ $\vec{B} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{A}$ est à flux conservatif, donc sa divergence est nulle en tout point. On démontre ainsi l'identité $\mathrm{div}\left[\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{A}\right] = 0$.

Tubes de champ et autres propriétés

Le flux de $\vec{B}$ se conserve le long d'un tube de champ, d'où « champ $\vec{B}$ à flux conservatif ».

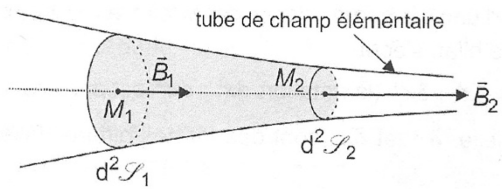
Démontrons cette propriété. $\vec{B}$ étant à flux conservatif, le flux de $\vec{B}$ à travers la surface $\mathscr{S}$ fermée, réunion de deux sections $\mathscr{S}_1$ et $\mathscr{S}_2$ d'un tube de champ et de la surface latérale du tube entre ces deux sections, est nul. $\vec{B}$ étant par définition tangent au tube, $\vec{B}\cdot \mathrm{d}^2\vec{\mathscr{S}}_{\mathrm{lat}} = 0$ sur la surface latérale donc son flux à travers la surface latérale est nul. Les vecteurs surface élémentaires de $\mathscr{S}_1$ et $\mathscr{S}_2$ sont orientés dans le sens du champ $\vec{B}$ alors que les vecteurs surface élémentaires de $\mathscr{S}$ sont orientés de l'intérieur vers l'extérieur. On a donc bien, avec l'orientation de γ précisée sur le schéma ci-dessus : $\Phi_{\mathscr{S}} = \Phi_{\mathscr{S}_2} - \Phi_{\mathscr{S}_1} + \underbrace{\Phi_{\mathscr{S}_{\mathrm{lat}}}}_{0} = 0 \Rightarrow \Phi_{\mathscr{S}_2} = \Phi_{\mathscr{S}_1}$.



Considérons maintenant un tube de champ *élémentaire* qui entoure une ligne de champ entre deux points M_1 et M_2. Les sections droites $\mathrm{d}^2\mathscr{S}_1$ et $\mathrm{d}^2\mathscr{S}_2$ de ce tube passant par M_1 et M_2 sont infiniment petites.

La conservation du flux de $\vec{B}$ le long de ce tube de champ implique que :

$\vec{B}_1\cdot \mathrm{d}^2\vec{\mathscr{S}}_1 = \vec{B}_2\cdot \mathrm{d}^2\vec{\mathscr{S}}_2$, or $\vec{B}$ et $\mathrm{d}^2\vec{\mathscr{S}}$ sont colinéaires pour un tube de champ élémentaire : $\|\vec{B}_1\|\cdot \mathrm{d}^2\mathscr{S}_1 = \|\vec{B}_2\|\cdot \mathrm{d}^2\mathscr{S}_2$. On en déduit que si $\mathrm{d}^2\mathscr{S}_2 < \mathrm{d}^2\mathscr{S}_1$ alors $\|\vec{B}_2\| > \|\vec{B}_1\|$



Un champ à flux conservatif est intense là où les lignes de champ sont resserrées.