Phénomènes de transport – Partie 1 – Transport de charges électriques

Rappel du programme : Objectifs généraux de la formation

Cette partie présente le formalisme nécessaire à l'étude générale des phénomènes de transport abordés au programme de PSI (conduction électrique, conduction thermique, diffusion de particules, fluides en écoulement). Ce formalisme, transversal à tous les domaines de la physique, repose essentiellement sur la notion de bilan, global ou local. Il permet d'exprimer des lois de conservation (charge, énergie, masse), d'établir des équations d'évolution en relation avec des propriétés phénoménologiques.

En relation avec le cours d'électromagnétisme, le bloc 1 étudie le transport de charges et les milieux conducteurs en présentant un modèle microscopique. Pour sensibiliser les étudiants à l'aspect complexe de la matière, le professeur est invité à conduire une critique du modèle historique de Drude en comparant le libre parcours moyen d'un électron libre avec la distance interatomique du réseau. La conductivité électrique sera réutilisée lors de l'étude des ondes électromagnétiques dans les conducteurs (effet de peau et réflexion sur un métal).

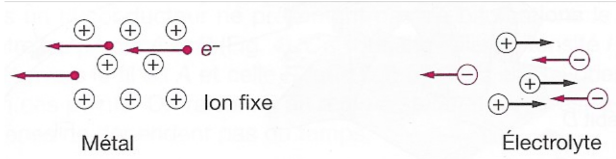
Notions et contenus	Capacités exigibles
2.1. Transport de charge	
2.1.1. Conservation de la charge	
Densité volumique de charge électrique ρ, vecteur densité de courant électrique **j**.	Passer d'une description microscopique (porteurs de charges, vitesse des porteurs) aux grandeurs mésoscopiques ρ et **j**.
Intensité du courant électrique.	Écrire l'intensité comme le flux du vecteur densité de courant électrique à travers une surface orientée.
Bilan de charge. Équation locale de la conservation de la charge.	Établir, en coordonnées cartésiennes, l'équation locale traduisant la conservation de la charge électrique. Énoncer l'équation locale et en interpréter chacun des termes.
Régime stationnaire.	Définir une ligne de courant et un tube de courant. Exploiter le caractère conservatif du vecteur densité de courant électrique en régime stationnaire et relier cette propriété à la loi des nœuds usuelle de l'électrocinétique.
2.1.2. Conducteur ohmique	
Loi d'Ohm locale.	Relier le vecteur densité de courant au champ électrique dans un conducteur ohmique. Citer des ordres de grandeur de la conductivité.
Modèle de Drude.	Établir, en régime stationnaire, une expression de la conductivité électrique à l'aide d'un modèle microscopique.
Résistance d'un conducteur cylindrique.	Établir l'expression de la résistance d'un câble cylindrique parcouru uniformément par un courant parallèle à son axe.
Puissance électrique. Effet Joule.	Établir l'expression de la puissance volumique reçue par un conducteur ohmique. Interpréter l'effet Joule.

I. Conservation de la charge

1. Description des porteurs de charges dans l'approximation des milieux continus

Capacités :
- décrire les différents types de porteurs de charge
- faire la distinction entre porteurs de charges mobiles et charges fixes

Au sein de la matière, la **charge électrique** est **portée par des particules individuelles** : **électrons libres et mobiles dans les conducteurs**, ou **liés dans le cas des isolants**, **noyaux atomiques** avec leurs **protons** (fixes dans les solides), ou **ions mobiles en solution électrolytique**, et le plus souvent **fixes dans les cristaux ioniques, électrons et ions mobiles dans les plasma…** Nous préciserons le cas des matériaux semi-conducteurs dans une étude documentaire. Seules les **charges mobiles** participeront à **l'établissement d'un courant électrique**, dans le vide comme dans la matière. Dans les métaux, par exemple, seuls les électrons sont mobiles, car les ions demeurent fixes : ils vibrent notamment sous l'effet de l'agitation thermique, mais sans mouvement global, ne participant pas à la conduction. Dans une solution électrolytique, cations et anions mobiles sont responsables de la conduction du courant.

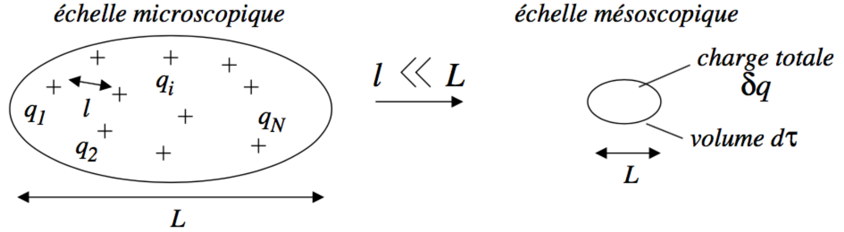


La charge est à ce titre **quantifiée** : les charges individuelles sont **positives ou négatives**, et **multiples entiers de la charge élémentaire e ≈ 1,6.10^{-19} C :** constante universelle, dont l'**unité** est le **coulomb C**. Chaque particule contribue à la charge totale et à la création d'un champ électromagnétique local, en qualité de source de champ.

Capacité : utiliser les trois échelles macroscopique, microscopique, mésoscopique

Dans le cas le plus usuel d'une **distribution de charges à très grand nombre de particules**, il est illusoire de vouloir connaître les positons et déplacements individuels à **l'échelle microscopique**. On passera d'abord à une **échelle intermédiaire mésoscopique**, où l'on considère un **élément de volume de la distribution suffisamment grand**, typiquement d'une **dimension L, de l'ordre de quelques dizaines de nanomètre à quelques microns**, pour réaliser des moyennes des grandeurs physiques, et étudier leur évolution.
A cette **échelle mésoscopique**, on définit des **grandeurs moyennées sur un volume intermédiaire contenant un très grand nombre de particules**, tout en restant suffisamment **petit par rapport à la taille totale du système**, qui correspond à l'échelle macroscopique. Cette **échelle mésoscopique** permet de

profiter d'une **description continue de la distribution**.
On pourra ensuite modéliser la distribution à une **échelle macroscopique** pour



décrire le système dans sa globalité : **dimension macroscopique**, **typiquement de l'ordre du mm ou plus**.

➔ Outils transverses

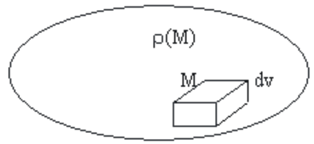
Notions et contenus	Capacités exigibles
2. Calcul numérique	
Calcul numérique d'une expression.	Calculer sans outil l'ordre de grandeur (puissance de dix) d'une expression simple. Afficher un résultat numérique avec un nombre de chiffres significatifs cohérent avec les données et une unité correcte dans le cas d'un résultat dimensionné. Commenter un résultat numérique (justification d'une approximation, comparaisons à des valeurs de référence bien choisies, etc.). En faire un test de pertinence.

✓ Calculer l'ordre de grandeur de la densité volumique n de charge, puis le nombre de charges présentes dans un élément de volume mésoscopique de taille caractéristique L=10 nm, pour du cuivre solide Cu. Pour simplifier, on considèrera que chaque atome de métal cède en moyenne un électron pour devenir un cation Cu^+. On notera n_e la densité électronique et n_i la densité ionique.
Données : masse molaire M = 63,5 g.mol^{-1} ; nombre d'Avogadro N_A = 6.10^{23} mol^{-1}
Masse volumique μ = 8,94.10^3 kg.m^{-3}

Le modèle continu est valide à cette échelle, car la taille de l'élément mésoscopique est **bien supérieure à la dimension typique du rayon atomique de 10^{-10} m,** qui correspond à l'échelle microscopique l.
La **neutralité électrique du milieu** est respectée car $n_e = n_i$ (avec charges opposées).

1.1 Modélisation d'une distribution de charges électriques

Notion : densité volumique de charge électrique
Dans le cadre du **modèle continu**, la **densité volumique de particule n**, exprimée en m^{-3}, est une **variable scalaire** définie en tout point M de la distribution. Elle dépend des coordonnées : **n(M), ou n(x,y,z)** en coordonnées cartésiennes. Le nombre élémentaire de particules contenues dans le volume élémentaire dV, centré autour du point M, de taille mésoscopique, est :



$\boxed{dN = n\, dV}$

Equivalent à la définition de la densité volumique :

$\boxed{n = \frac{dN}{dV}}$

On considère une distribution de charges d'une seule nature, de charge q, le volume dV contient une grande quantité de charges δq :

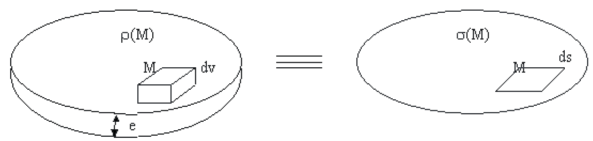
$\delta q = q\, n\, dV$

La **densité volumique de charge ρ** est alors définie par : $\boxed{\rho = \frac{\delta q}{dV} = nq}$

ou $\boxed{\delta q = \rho\, dV = nq\, dV}$

-> son **unité** est en **C.m^{-3}**
Dans le cas où les particules sont réparties en différentes espèces, repérées par l'indice k, on généralise l'expression de la densité volumique totale :

$$\boxed{\rho = \sum_k n_k\, q_k}$$



➔ *Remarque* : distributions surfacique et linéique

Certaines répartitions de charge prennent la forme de **couches minces**, dont **l'épaisseur e est très inférieure aux autres dimensions** du problème.
On adopte alors un modèle continu dit surfacique, qui consiste à négliger l'épaisseur de la distribution. On définit alors une densité surfacique de charge, notée σ, en C.m^{-2} : $\boxed{\sigma = \frac{\delta q}{dS}}$

✓ Dans le cas d'une densité volumique n de charge, établir la relation entre σ et n.

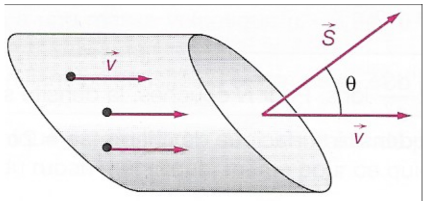
On procède de même avec une densité linéique.

1.2 Vecteur densité de courant électrique et intensité du courant

Notion :
- vecteur densité de courant électrique
- intensité du courant électrique

Pour caractériser le transport de charges, on cherche à **déterminer le flux de charges à l'échelle locale**, **directement lié au courant électrique**, traversant un conducteur par exemple.
On considère une section élémentaire S plane de ce matériau, orientée selon le vecteur surface $\vec{S}$.

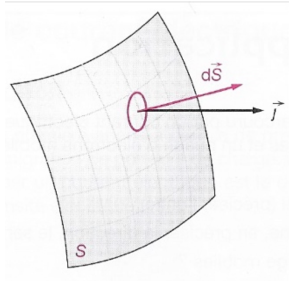
✓ Dans le cas d'un déplacement de particules chargées, de charge q, de densité de porteurs n uniforme, à la même vitesse $\vec{v}$ (vitesse moyenne) colinéaire à $\vec{S}$, réaliser un schéma de la situation et exprimer la quantité de charges δq qui traverse cette surface entre les temps t et t+dt (soit pendant une durée dt).



Dans le cas ci-contre d'une surface inclinée par rapport à la direction de la vitesse, l'angle intervient via le cosinus :
$\boxed{\boldsymbol{\delta q = nq\,v\,S\cos\theta\,dt = \rho\vec{v}.\vec{S}\,dt}}$

Nous rappelons ici que le **courant électrique i** est défini comme le **flux de charge par unité de temps**, soit le **débit de charge** à travers cette surface :

$$\boxed{\boldsymbol{i = \frac{\delta q}{dt}}}$$



Soit $i = \frac{\delta q}{dt} = \frac{\rho\vec{v}.\vec{S}\,dt}{dt}$ -> $\boxed{\boldsymbol{i = \rho\vec{v}.\vec{S} = \vec{j}.\vec{S}}}$ avec $\boxed{\boldsymbol{\vec{j} = \rho\vec{v}}}$ **unité A.m^{-2}**

La grandeur vectorielle $\vec{j}$ est le vecteur **densité volumique de courant**. C'est une **grandeur dite locale**, comme la densité volumique de charge.
On retrouve la notion de **flux vectoriel pour caractériser l'intensité du courant électrique,** et le transport de charges associé $\boldsymbol{\delta q}$:

$$\boxed{\boldsymbol{\delta q = i\,dt = \vec{j}.\vec{S}\,dt}}$$

Dans le cas de plusieurs types de porteurs, on exprime le vecteur densité de courant par : $\boxed{\boldsymbol{\vec{j} = \sum_k \rho_k\,\vec{v_k} = \sum_k n_k\,q_k\,\vec{v_k}}}$

1.3 Généralisation du flux de charges à travers une surface

Capacité : établir l'intensité comme le flux du vecteur densité de courant électrique
Dans le cas général d'une densité de courant qui n'est pas uniforme à l'échelle de la section S, on considère une surface élémentaire dS :

$\delta^2 q = nq\,v\,dS\cos\theta\,dt = \rho\vec{v}.d\vec{S}\,dt$

$\delta q = (\iint \rho\vec{v}.d\vec{S})dt = (\iint \vec{j}.d\vec{S})dt$

donc $\boxed{\boldsymbol{i = \frac{\delta q}{dt} = \iint \vec{j}.d\vec{S}}}$

La relation entre densité et intensité du courant passe par **un calcul de flux du vecteur densité**. La notion de flux à travers une surface a été abordée en première année pour le champ magnétique $\phi = \iint \vec{B}.d\vec{S}$

➔ **Ordres de grandeur**
Un fil de cuivre de section S = 2 mm^2 est parcouru par un courant électrique I = 1A.
Le cuivre étant un métal, son réseau contient des ions fixes et un nuage d'électrons mobiles, de densité volumique n ≈ 10^{29} m^{-3}
✓ Calculer le débit D d'électrons à travers la section S, en précisant son unité.

La densité volumique de courant est supposée uniforme.
✓ Préciser sa direction, son sens, et sa norme.
✓ Déterminer la vitesse moyenne de migration des porteurs de charge.

On assimile le nuage d'électrons à un gaz parfait monoatomique.

✓ A température ambiante, déterminer l'ordre de grandeur de la vitesse quadratique moyenne d'agitation thermique et comparer les deux vitesses.

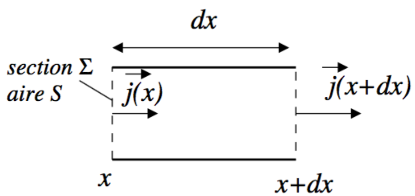
Données : masse de l'électron m ≈ 10^{-30} kg et constante de Boltzmann k_B = 1,38.10^{-23} J.K^{-1}

2. Bilan de charge électrique : équation locale de conservation de la charge

2.1 Conservation de la charge

Capacités :
- réaliser des bilans sous forme globale et locale
- établir l'équation locale traduisant la conservation de la charge électrique en coordonnées cartésiennes à une dimension

Pour établir l'équation traduisant la conservation de la charge, on réalise un bilan de charge local par une méthode qui sera reprise dans de nombreuses autres situations des phénomènes de transport. On se place dans le cadre d'un problème unidimensionnel, selon Ox, avec des grandeurs dépendantes de la seule variable x, et une conduction qui a lieu selon ce seul axe.



De ce fait, les densités volumiques de charges et de courant s'écrivent :

$$\boxed{\rho(x,t) \text{ et } \vec{j} = j(x,t)\,\vec{u_x}}$$

Pour ce bilan on prend en compte un volume élémentaire dV, de section S, compris entre x et x+dx : $\boxed{\mathbf{dV = S\,dx}}$

La charge d'un système isolé se conservant (pas d'apparition/disparition spontanées de charges), **l'évolution de la charge** dans ce volume ne peut être **due qu'aux flux de charges à travers les surfaces**, ce qui s'écrit :

charge en (t + dt) - charge en t = apports pendant dt - pertes pendant dt
ou charge en (t + dt) - charge en t = (charges entrantes – sortantes) pendant dt

➔ **Variation de charge dans l'élément de volume**

✓ Exprimer les quantités de charge comprise dans cet élément à l'instant t : $\delta q(t)$ et à l'instant t+dt : $\delta q(t+dt)$, puis leur différence égale au taux de variation de charge dans le volume considéré.

➔ **Débit de charge dans l'élément de volume** (entrant versus sortant)

✓ Exprimer la différence entre charges entrantes et sortantes dans le volume élémentaire : $\delta q(entrant)$ - $\delta q(sortant)$

➔ Bilan local : équation locale de conservation

✓ Réaliser le bilan local sur l'élément de volume pour établir l'équation unidimensionnelle de conservation de la charge : $\boxed{\frac{\partial j}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0}$

La charge peut varier au cours du temps dans l'élément de volume **si les apports ne compensent pas les pertes**, dans le cas présent **si la composante selon x du vecteur courant n'est pas identique en x et en x + dx.**
La nullité du second membre est caractéristique d'une grandeur qui se conserve.
Il s'agit d'une **équation locale**, c'est-à-dire **valable en tout point**, et **à chaque instant.**

➔ Equation tridimensionnelle de conservation de la charge

Capacité : citer l'équation locale dans le cas tridimensionnel et en interpréter chacun des termes

En géométrie quelconque, le vecteur courant dépend des 3 variables spatiales, par exemple en coordonnées cartésiennes :

$$\vec{j} = j_x(M,t)\,\vec{e_x} + j_y(M,t)\,\vec{e_y} + j_z(M,t)\,\vec{e_z}$$

Un bilan de charges appliqué aux surfaces d'un élément de volume élémentaire fait alors intervenir les autres dérivées partielles spatiales, et permet d'établir :

$$\boxed{\frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = div\,\vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0}$$

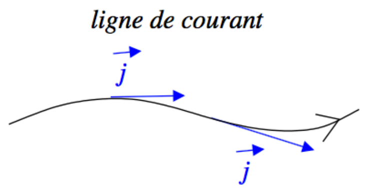
L'opérateur spatial divergence permet une écriture plus aisée de cette équation de conservation.
On retrouvera ce type d'équation, traduisant localement un bilan de particules dans l'étude de la diffusion des particules, un bilan d'énergie interne dans la diffusion thermique, un bilan de masse dans l'étude de la mécanique des fluides, un bilan d'énergie électromagnétique en électromagnétisme…

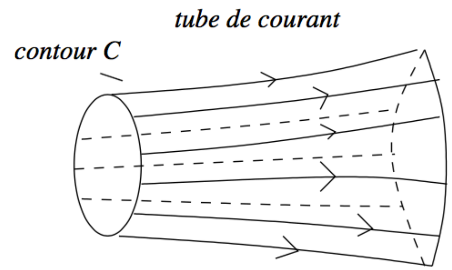
2.2 Conséquences usuelles en régime stationnaire

➔ Lignes de courant, tube de courant

Capacité : définir une ligne de courant et un tube de courant

Les **lignes de courant** sont les **lignes tangentes au vecteur densité** de courant électrique en tout point et **orientées par ce vecteur**. L'**ensemble des lignes de**





courant s'appuyant sur un contour C engendre une **surface** appelée **tube de courant**.

➔ Caractère conservatif du vecteur courant en régime stationnaire

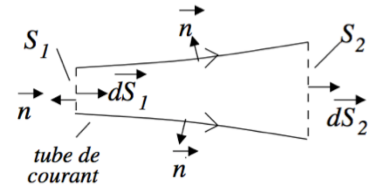
En **régime permanent**, les **grandeurs ne dépendent pas du temps**, ainsi l'équation locale de conservation devient avec $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$:

$\boxed{div\,\vec{j} = 0}$ équivalent à $\boxed{\oint \vec{j}.\vec{dS} = 0}$

-> le flux de charge entrant équilibre exactement le flux sortant, le **vecteur densité de courant** est dit à **flux conservatif**.

➔ Conséquences : invariance de l'intensité dans un fil conducteur et loi des nœuds

Capacité : en régime stationnaire, exploiter le caractère conservatif du vecteur densité de courant électrique

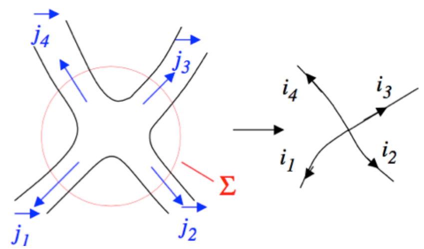


Dans le tube de courant ci-contre, $\oint \vec{j}.d\vec{S} = 0$: la somme des flux sortants est nulle.
Les flux latéraux sont nuls, car les vecteurs densité, orientés selon les lignes de courant, sont orthogonaux aux normales.
La somme des flux en S_1 (entrant) et en S_2 (sortant) est donc nulle, ils sont opposés en signe, mais égaux en norme :
$-\iint \vec{j}.\vec{dS_1} + \iint \vec{j}.\vec{dS_2}$ -> - I_1 + I_2 = 0 **->** **$I_1 = I_2$**

Ainsi **l'intensité du courant est indépendante de la section choisie dans un tube de courant donné**. Cette propriété joue un rôle essentiel dans les circuits électriques. Les fils électriques sont bornés par un matériau isolant et constituent naturellement des tubes de courant électrique.

Capacité : relier cette propriété (flux conservatif du vecteur courant) à la loi des nœuds usuelle de l'électrocinétique

En considérant la surface fermée ci-contre,
$\oint \vec{j}.d\vec{S} = 0$ -> $\sum_i \vec{j_i}.\vec{S_i} = 0$



donc $i_1 + i_2 + i_3 + i_4 = 0$ -> **la loi des nœuds traduit le caractère conservatif du vecteur densité de courant en régime stationnaire.**

Remarque : nous préciserons que ces lois sont aussi valables en « régime faiblement variable » (ARQS), classiquement utilisés en électricité au laboratoire.

II. Conducteur ohmique

1. Loi d'Ohm locale

Capacités :
- relier le vecteur densité de courant au champ électrique dans un conducteur ohmique
- citer l'ordre de grandeur de la conductivité du cuivre

Lorsqu'un champ électrique est appliqué à un milieu possédant des porteurs de charges mobiles, par l'intermédiaire d'une tension par exemple, il y a rupture de l'équilibre initial : un courant électrique et un vecteur densité de courant apparaissent. Un tel milieu est dit **conducteur**. On se **limite ici au champ électrique comme source de courant** (un gradient thermique ou de concentration comme dans les jonctions des diodes sont d'autres sources potentielles de courant de charges).
A **l'échelle macroscopique**, ce milieu est qualifié de **conducteur ohmique** s'il vérifie la loi d'Ohm : il existe alors une **relation de proportionnalité entre la tension à ses bornes U et l'intensité du courant I** qui le traverse : **U = RI**.

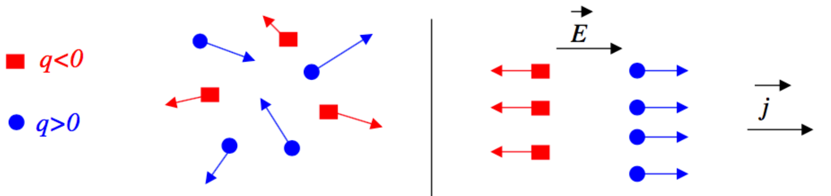
A **l'échelle mésoscopique**, la **loi d'Ohm locale** traduit **une relation de proportionnalité** entre **le vecteur courant** et **le champ électrique** qui lui donne naissance : $\boxed{\vec{j} = \gamma \vec{E}}$

La **constante γ** est appelée **conductivité du milieu**, c'est une grandeur scalaire, qui s'exprime en $A.V^{-1}.m^{-1}$ soit en $\boldsymbol{\Omega^{-1}.m^{-1}}$ ou $\boldsymbol{S.m^{-1}}$
Elle **dépend de la nature du milieu**, et des conditions expérimentales, notamment de la **température**.

Pour le **cuivre**, on retiendra une **conductivité élevée** de l'ordre de $\boldsymbol{\gamma = 10^7\ \Omega^{-1}.m^{-1}}$

Pour les **bons conducteurs**, comme les métaux : $\boldsymbol{\gamma > 10^4\ \Omega^{-1}.m^{-1}}$

Capacité : distinguer une loi phénoménologique et une loi universelle
Cette loi est une **loi phénoménologique, déduite de l'expérience**, qui n'a pas un caractère universel. Elle traduit l'idée, qu'en présence d'un champ électrique



absence de champ électrique *présence d'un champ électrique*

extérieur, les porteurs de charge se mettent en mouvement de concert pour créer un vecteur courant résultant non nul.

Comme toute **loi phénoménologique**, elle s'applique dans un **cadre limité**. Dans le cas présent : **milieu homogène** (conductivité uniforme) **et isotrope** (conductivité = scalaire), **champ électrique « pas trop » intense** : loi linéaire soit du premier ordre en champ électrique, et **variant « lentement » dans le temps (ARQS)**.

2. Modèle microscopique de conducteur ohmique : le modèle de Drude

2.1 Première approche du modèle de Drude : expression de la conductivité selon une interprétation phénoménologique

Capacité : en régime stationnaire, établir une expression de la conductivité électrique à l'aide d'un modèle microscopique
En 1900, Paul Drude propose un modèle classique pour interpréter la loi d'Ohm locale, où les électrons d'un métal sont considérés comme des particules chargées individuelles, formant un gaz confiné dans le réseau cristallin rigide.
Ce gaz d'électrons libres, et délocalisés, est entrainé dans un mouvement d'ensemble par un champ électrique, produisant un courant électrique.

Plus précisément, les **hypothèses du modèle de Drude** sont les suivantes :
- les **ions du réseau** sont des porteurs de charge lourds, donc **fixes et liés au réseau cristallin**
- les **électrons** sont **libres** sous la forme d'un gaz
- les électrons sont soumis à un **champ électrique $\vec{E}$ stationnaire et uniforme** (absence de champ magnétique)
- **l'interaction entre le milieu et les électrons** est modélisée par une **force de frottement opposée à la vitesse de migration : $\vec{F} = -\alpha\,\vec{v}$**

On ne considère aucune interaction éléctrons/électrons.

Pour exprimer **la résistance macroscopique du conducteur face aux déplacements des électrons** dans le réseau, on introduit donc une **force de frottement** ad hoc, **qui s'oppose à la vitesse moyenne de migration des électrons :** c'est le **« modèle de l'électron amorti ».** Nous verrons que cette interaction peut être interprétée en terme de collisions électroniques avec le réseau cristallin : on associera naturellement un **temps de relaxation τ à la force de frottement**.

✓ En appliquant le PFD à un électron de vitesse de migration $\vec{v}$ et de masse m, montrer que l'évolution de cette vitesse est pilotée par une équation différentielle du premier ordre de la forme : $\boxed{\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\vec{v}}{\tau} = \frac{\vec{v}_{lim}}{\tau}}$ en exprimant $\vec{v}_{lim}$ et τ
Déterminer l'évolution temporelle de la vitesse et la représenter graphiquement.

Au bout d'une durée égale à quelques τ **temps de relaxation**, tous les électrons ont acquis la même vitesse de migration (v limite) dans ce champ uniforme et stationnaire : $\boxed{\vec{v} = \frac{-e\tau}{m}\vec{E}}$ -> **relation proportionnelle entre vitesse et champ électrique** qu'on note aussi $\boxed{\vec{v} = \mu\vec{E}}$ avec μ **la mobilité des porteurs**.

✓ Monter alors que le vecteur densité de courant s'exprime par : $\boxed{\vec{j} = \frac{ne^2\tau}{m}\vec{E} = \gamma\vec{E}}$

Dans ce modèle, la **conductivité** est donc **positive**, quelque soit le signe de la charge du porteur (contrairement à la mobilité positive ou négative).

➔ Ordre de grandeur et critique du régime stationnaire

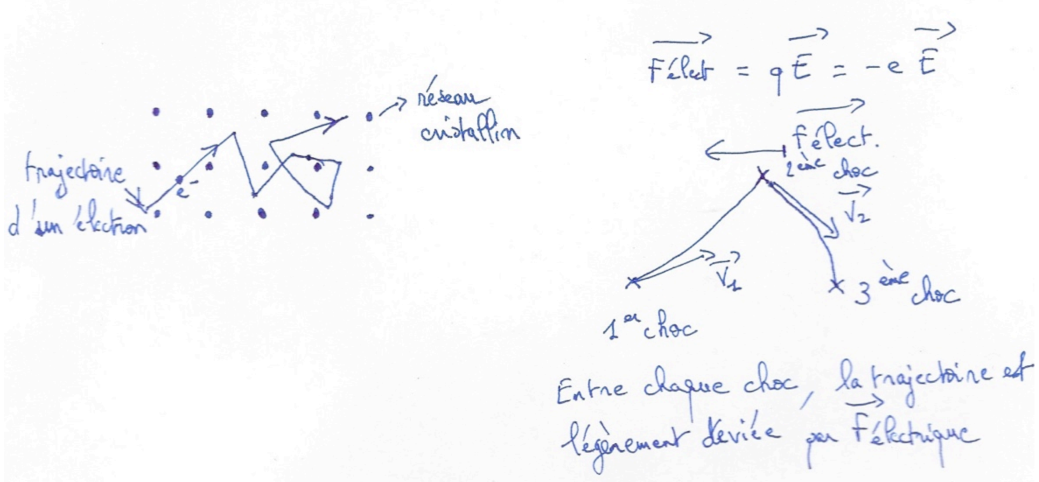
Pour un métal, les porteurs sont des électrons de masse m = 9,1.10^{-31} kg et de charge q = 1,6.10^{-19} C. La résistivité 1/γ mesurée est de l'ordre de 1,6.10^{-8} Ω.m, et la densité d'électron mobiles n ≈ 8.10^{28} m^{-3}.

✓ Estimer la valeur de la constante de temps.

Ainsi, à une échelle de temps très courte de 10^{-14} s, la vitesse des électrons est établie, comme le courant électrique. **Dans le cadre de nos travaux pratiques** au laboratoire, **l'établissement du courant sera donc instantané**.

La **loi d'Ohm**, établie ici en régime permanent, **demeurera valable en régime « lentement variable »**, plus précisément tant que la **fréquence** des signaux électriques reste **faible devant 1/ τ : f << 10^{14} Hz**, ce qui sera le cas au laboratoire (fmax < 10 MHz = 10^{8} Hz).
A ces échelles de temps, on pourra toujours considérer que le **conducteur ohmique** est **localement neutre**.
Remarque : pour le plomb, le temps de relaxation est très faible (faible mobilité), il s'agit d'un moins bon conducteur, même si sa densité en porteur est élevée.

2.2 *Deuxième approche : interprétation en terme de collisions*



Pour donner une explication microscopique du terme de frottement, Drude a considéré que les **électrons** subissent des **collisions avec les ions métalliques fixes** du réseau. Ces **chocs** sont supposés **instantanés**, **après chaque choc**, la **direction** et la **norme de la vitesse** d'un électron sont **aléatoires**. Entre deux chocs, un électron n'est soumis qu'à l'action du champ électrique.

On considère donc un électron quelconque pour lequel on applique le PFD entre deux collisions successives numérotées i et i + 1 : $m\,\frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E}$

-> par intégration entre le choc i et i+1 : $\vec{v}_i = \vec{v}_{0,i} - \frac{e\vec{E}}{m}\,(t_{i+1} - t_i)$
avec $\vec{v}_{0,i}$ la vitesse juste après le choc i et $\vec{v}_i$ la vitesse juste avant le choc i + 1.

La vitesse moyenne des électrons est alors calculée en effectuant une moyenne sur l'ensemble des électrons de conduction : $\langle\vec{v}_i\rangle = \langle\vec{v}_{0,i}\rangle - \frac{e\vec{E}}{m}\,\langle t_{i+1} - t_i\rangle$

Après chaque choc, la vitesse est redistribuée aléatoirement, avec une totale isotropie, c'est-à-dire que toutes les directions sont équiprobables : $\langle\vec{v}_{0,i}\rangle = \vec{0}$

Donc $\boxed{\langle\vec{\boldsymbol{v}}_i\rangle = -\frac{e\vec{E}}{m}\,\boldsymbol{\tau}}$

avec $\boldsymbol{\tau}$ **la durée moyenne entre deux collisions ou temps de vol libre**.

Même si l'agitation thermique domine largement la migration en terme de vitesses, la vitesse moyenne est non-nulle sous l'action du champ électrique (contrairement aux gaz d'électrons en l'absence de champ).
On en déduit la loi d'Ohm locale : $\boxed{\vec{\boldsymbol{j}} = -\boldsymbol{ne}\,\langle\vec{\boldsymbol{v}}_i\rangle = \frac{ne^2\tau}{m}\,\vec{\boldsymbol{E}} = \boldsymbol{\gamma}\vec{\boldsymbol{E}}}$

➔ Dépendance de la conductivité avec la température
Le temps caractéristique est ici directement lié au phénomène de collisions ($\tau \sim \frac{1}{\sqrt{T}}$). Il décroit notamment avec la température, ainsi l'agitation thermique s'oppose à la conduction qui nécessite un mouvement « ordonné et directionnel » : **la conductivité diminue avec la température pour un conducteur** (attention c'est l'inverse pour un semi-conducteur).

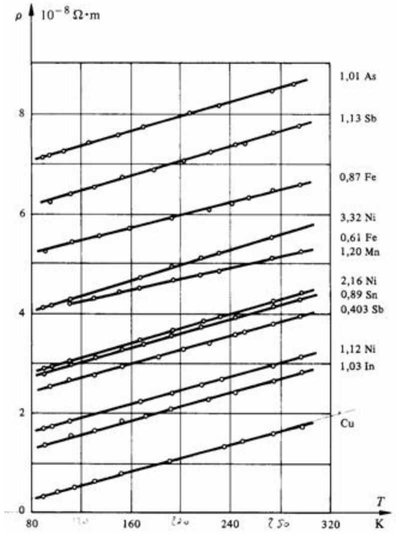
2.3 Critique du modèle de Drude

Capacité : conduire une critique du modèle historique de Drude en comparant le libre parcours moyen d'un électron libre avec la distance interatomique du réseau

✓ Sachant que la vitesse d'agitation thermique est de l'ordre de 10^5 m.s^{-1} (dans le modèle du gaz parfait d'électrons à température ambiante), estimer **le libre parcours moyen des électrons l**, c'est-à-dire la **distance moyenne parcourue entre deux chocs successifs**, et la comparer à la distance interatomique typique d.

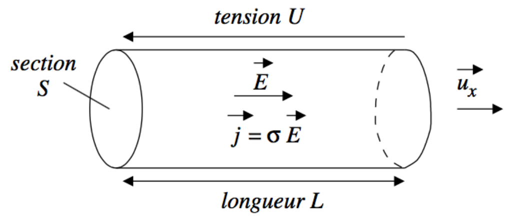
Le **libre parcours moyen** étant **très supérieur à la distance interatomique**, **l'interaction de collisions entre électrons et ions fixes du réseau n'est pas valide**.

En réalité **les imperfections du réseau** sont **à l'origine des collisions,** et non pas le réseau lui-même. On distinguera par exemple les collisions électrons/phonons, prépondérantes à température ambiante : les phonons sont des quasi-particules qui modélisent les modes propres de vibration du réseau cristallin, les collisions électrons/électrons et les collisions avec des impuretés, présentent dans le réseau, prépondérantes à basse température : atomes étrangers interstitiels ou en position de substitution, défauts provenant de déformations mécaniques (dislocations locales principalement)…
Voir le graphique ci-contre qui présente la **résistivité du cuivre**, et de quelques-uns de ses alliages, en fonction de la température. Les pourcentages des éléments dissous sont donnés devant leurs symboles chimiques.



3. Résistance d'un conducteur cylindrique

Capacité : établir l'expression de la résistance d'un câble cylindrique parcouru uniformément par un courant parallèle à son axe



On considère une portion de conducteur cylindrique d'axe Ox, de section S et de longueur L, baignant dans un champ électrique uniforme et stationnaire $\vec{E} = E_0\vec{e_x}$.
En pratique, un générateur extérieur applique une tension aux extrémités du matériau et produit ce champ.

✓ Etablir l'expression de l'intensité I traversant le conducteur en fonction de la conductivité de la section S et de la valeur du champ électrique E_0.
La différence de potentiel U impose la relation : **U = E_0 L**.

✓ En exploitant la loi d'Ohm macroscopique, monter que la résistance s'exprime par : $\boxed{\boldsymbol{R = \frac{1}{\gamma}\frac{L}{S}}}$

La **résistance** est **proportionnelle à la longueur** : **association des résistances en série**, **inversement proportionnelle à la section** : le nombre de porteurs de charge est proportionnel à la section, et la **résistance décroît** logiquement **avec la conductivité du matériau**.

Remarques
- l'expression de la résistance électrique demeure identique en présence de phénomène d'induction, qui se manifeste par l'ajout d'une force électromotrice.
- en revanche, en présence d'un champ magnétique extérieur, une magnétorésistance supplémentaire sera éventuellement à prendre en compte, valeur le plus souvent négligeable pour les bons conducteurs, sauf pour les semi-conducteurs qui exploitent l'effet Hall pour la mesure de champ magnétique par exemple, pour la « magnétorésistance géante » (effet Hall quantique…).

4. Aspect énergétique : puissance électrique dissipée par effet Joule

4.1 Puissance cédée à un porteur de charge mobile et force de Lorentz : loi de Joule locale

Capacité : établir l'expression de la puissance volumique reçue par un conducteur ohmique

La force exercée par un champ électromagnétique $(\vec{E},\vec{B})$ sur un porteur de charge mobile q est décrite par la force de Lorentz : $\boxed{\vec{F} = q\,\vec{E} + q\,\vec{v}\wedge\vec{B}}$

La **puissance P de cette force** traduit un **transfert énergétique du champ vers la particule.**

✓ Démontrer que la puissance volumique $P_v = \frac{dP}{dV}$, mise en oeuvre par la force de Lorentz sur un élément de volume dV, contenant des contenant des charges fixes, et mobiles de même nature, et de même vitesse de migration $\vec{v}$, par rapport au référentiel d'étude, s'exprime par : $\boxed{\boldsymbol{P_v = \vec{j}\,.\vec{E} = \gamma\,E^2}}$

La puissance du terme magnétique de la force de Lorentz est nulle (par nullité du produit mixte $\vec{v}.(\vec{v}\wedge\vec{B})$). Elle est exprimée dans le référentiel galiléen, où est défini le champ.

4.2 Approche macroscopique de l'effet Joule

Capacité : établir l'expression de la puissance volumique reçue par un conducteur ohmique

On considère le conducteur ohmique cylindrique qui reçoit une puissance électrique totale : P = U I = (E L) (j S) = E j . LS = j . E . V

La puissance volumique est donc : $\boxed{\boldsymbol{P_v = \frac{P}{V} = j.E = \frac{I^2}{\gamma S^2}}}$

On démontre alors facilement que la puissance globale est **P** = P_V V **= R I²**

Capacité : interpréter l'effet Joule

La puissance dissipée par effet joule s'identifie à la puissance cédée par le champ aux porteurs de charges mobiles.

Ces **porteurs cèdent cette puissance au réseau cristallin lors des collisions**, on obtient alors une **puissance dissipée par le réseau par transfert thermique**.

En effet, en régime stationnaire, les **porteurs** ont une vitesse constante, comme leur énergie cinétique : ils doivent donc **céder au matériau la totalité de la puissance apportée par le champ électrique**. Le concept de **force de friction** est donc valide, traduisant ce **transfert d'énergie des électrons libres vers le réseau**. Le réseau reçoit cette puissance de manière désordonnée, et son énergie interne augmente, ce qui provoque une **élévation de sa température**.
En régime stationnaire, l'énergie interne du réseau ne peut plus augmenter : le transfert par effet Joule est donc évacué vers l'extérieur par diffusion thermique, et/ou par rayonnement (le plus souvent négligeable, sauf dans le vide où la diffusion thermique est absente) : c'est l'**effet Joule**, ou **effet thermique d'un courant électrique dans un conducteur ohmique**.

Conclusion : ce qu'il faut retenir !!

Distributions volumiques de charge et de courant

• Densité de charge

Une densité volumique n de particules portant la charge q correspond à une densité volumique de charge $\rho = nq$.

Lorsque plusieurs espèces différentes sont présentes, on somme les contributions de chacune.

• Densité de courant

Des particules en densité volumique n, portant la charge q et en mouvement à la vitesse $\vec{v}$, sont responsables d'un courant électrique de densité volumique :

$$\vec{j} = nq\vec{v}.$$

L'intensité du courant électrique à travers une surface S, qui est le débit de charge, est donnée par le flux de la densité de courant :

$$i = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}.$$

Puissance cédée par le champ aux porteurs de charge

• Particule ponctuelle

La puissance de la force de Lorentz s'exprime selon :

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v} = q\vec{E} \cdot \vec{v}.$$

• Densité volumique

Dans un élément de volume $d\tau$, la puissance cédée par le champ aux porteurs de charge s'écrit :

$$dP = \vec{j} \cdot \vec{E} d\tau.$$

Bilans énergétiques

• Conducteur en régime stationnaire

La relation locale définissant la conductivité γ d'un milieu est : $\vec{j} = \gamma\vec{E}$.

La forme intégrale associée à cette loi est la *loi d'Ohm* $U = RI$, où la résistance R d'un barreau cylindrique est donnée par :

$$R = \frac{1}{\gamma}\frac{\ell}{S}.$$

En régime stationnaire, la puissance cédée par le champ aux porteurs de charge d'un conducteur de résistance R s'identifie à l'effet Joule : $P = RI^2$. C'est également la puissance dissipée par les collisions irréversibles des porteurs sur le réseau cristallin.

• Dipôle en régime stationnaire

En régime stationnaire, la puissance entrant par rayonnement à travers les parois d'un dipôle électrocinétique est la puissance reçue : $P = UI$ (convention récepteur).

Remarque sur les modélisations des distributions de charge

Distribution	volumique	surfacique	linéique
Charge	$dq = \rho\, d\tau$	$dq = \sigma\, dS$	$dq = \lambda\, d\ell$
Courant	$d\vec{C} = \vec{j}\, d\tau$	$d\vec{C} = \vec{j}_S\, dS$	$d\vec{C} = I\, d\vec{\ell}$
Intégration	$\iiint_{(V)}$	$\iint_{(S)}$	$\int_{(C)}$
Intensité	$di = \vec{j}.\vec{n}\, dS$	$di = \vec{j}_S.d\vec{\ell}$	i = dq / dt

Quelques exemples de conductivité des métaux….

Matériaux	Conductivité Electrique (10.E6 Siemens/m)	Résistivité Electrique (10.E-8 Ohms.m)	Conductivité thermique (W/m.k)	Coefficient expansion thermique 10E-6(k-1) de 0 à 100°C	Densité (g/cm3)	Point fusion ou dégradation (°C)
Argent	**62,1**	**1,6**	**420**	**19,1**	**10,5**	**961**
cuivre	58,5	1,7	401	17	8,9	1083
Or	44,2	2,3	317	14,1	19,4	1064
Aluminium	36,9	2,7	237	23,5	2,7	660
Molybdène	18,7	5,34	138	4,8	10,2	2623
Zinc	16,6	6	116	31	7,1	419
Lithium	10,8	9,3	84,7	56	0,54	181
Laiton	15,9	6,3	150	20	8,5	900
Nickel	14,3	7	91	13,3	8,8	1455
Fer	10,1	9,9	80	12,1	7,9	1528
Palladium	9,5	10,5	72	11	12	1555
Platine	9,3	10,8	107	9	21,4	1772
Tungstène	8,9	11,2	174	4,5	19,3	3422
Etain	8,7	11,5	67	23,5	7,3	232
Bronze 67Cu33Zn	7,4	13,5	85	17	8,8	1040
Acier au carbone	5,9	16,9	90	12	7,7	1400
Carbone (ex PAN)	5,9	16,9	129	0,2	1,8	2500
Plomb	4,7	21,3	35	29	11,3	327
Titane	2,4	41,7	21	8,9	4,5	1668
Inox 316L EN1.4404	1,32	76	15	16,5	7,9	1535
Inox 304 EN1.4301	1,37	73	16,3	16,5	7,9	1450
Mercure	1,1	90,9	8	61	13,5	-39
Fe. Cr. Alloy	0,74	134	16	11,1	7,2	-1440
Inox 310 . EN1.4841	0,14	720	14,2	17	7,75	2650

Conductivité des matériaux