DS de Physique 10 janvier 2024

PSI - Lycée du Parc des Loges – Durée 4H

Calculatrices autorisées

Ce sujet comporte trois parties indépendantes.

Première partie – Réalisation de plaques de PPMA par injection (durée conseillée 1H30)

polyméthacrylate de méthyle ou PPPMA

Pour les applications numériques, on utilisera 2 chiffres significatifs.

Remarques préliminaires importantes : il est rappelé aux candidat(e)s que

- *les explications des phénomènes étudiés interviennent dans la notation au même titre que les développements analytiques et les applications numériques ; les résultats exprimés sans unité ne seront pas comptabilisés ;*
- *tout au long de l'énoncé, les paragraphes en italiques ont pour objet d'aider à la compréhension du problème mais ne donnent pas lieu à des questions ;*
- *tout résultat fourni dans l'énoncé peut être admis et utilisé par la suite, même s'il n'a pas été démontré par les candidat(e)s.*

Le polyméthacrylate de méthyle est plus connu sous le nom de plexiglas®. De par sa parfaite transparence et sa remarquable tenue au temps, il est principalement utilisé pour remplacer le verre : verres optiques organiques, vitres incassables, hublots d'avion, vitrines, lanternerie automobile, sanitaires, baignoires, …

Intéressons-nous à la mise en forme d'une plaque telle une baie « vitrée » de cabine de téléphone ou de douche en PMMA. Le procédé utilisé consiste en l'injection du polymère fondu dans un moule maintenu à température sensiblement constante (30 à 60 °C) de forme parallélépipédique de longueur L, de largeur w et d'épaisseur e, comme le montre la figure 5a. (échelle non respectée pour plus de clarté).

Le moule en acier est pourvu d'un circuit de refroidissement (par des canaux internes), de capteurs de température et d'un circuit de contrôle automatique de régulation thermique. La matière première se présente sous la forme de granulés, portés à fusion à une température comprise entre 180 et 300 °C grâce à un dispositif non représenté sur la figure puis est injectée sur toute la largeur w du moule, par application d'une surpression ΔP à l'extrémité $x = 0$.

Figure 5a

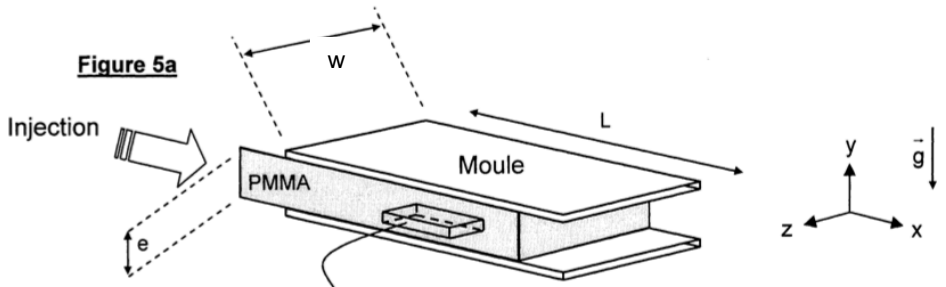


Figure 5b

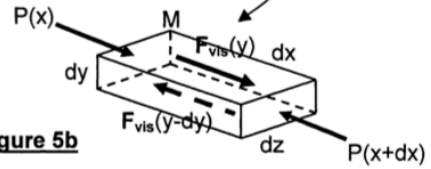
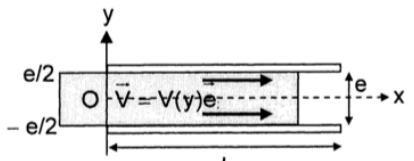


Figure 5c



Le polymère fondu s'écoule selon la direction Ox entre deux plaques parallèles ; ces plans d'équation $y = \pm e/2$ constituent les parois inférieure et supérieure du moule. L'écoulement est réalisé dans le champ de la pesanteur, depuis l'ouverture du moule d'abscisse $x = 0$ où règne la pression $P_0 + \Delta P$ ($\Delta P > 0$) vers l'extrémité du moule d'abscisse $x = L$ où règne la pression P_0.

Les dimensions du système dans les directions x et z sont très supérieures à l'épaisseur e du moule ; les plans horizontaux peuvent ainsi être considérés comme infinis et les effets de bord (selon les parois verticales $z = \pm w/2$) sont négligés.

Le polymère fondu est assimilé à un fluide newtonien incompressible de viscosité dynamique η, de masse volumique μ, de capacité thermique massique C et de conductivité thermique λ.

L'espace est rapporté au trièdre cartésien Oxyz, de base orthonormée directe $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

Hypothèse : l'écoulement est réalisé en régime permanent

Données : moule de dimensions : L = 2 m, w = 1 m et e = 20 mm
η (à 200 °C) = 10^3 Pa.s ; μ = 1190 kg.m^{-3} ; C = 1470 J.kg^{-1}.K^{-1} ; λ = 0,19 W.m^{-1}.K^{-1}
différentiel de pression $\Delta P = 2.10^7$ Pa.

D / ECOULEMENT DE POISEUILLE PLAN

D1. Justifier que le champ de vitesse s'écrit $\vec{V}(M,t) = V(y)\,\vec{e}_x$. Vérifier alors le caractère incompressible de l'écoulement.

L'écoulement peut être représenté comme la superposition d'une infinité de lames fluides élémentaires (comme représenté sur la figure 5b), la lame comprise entre les ordonnées y et $y - dy$ (avec $dy > 0$), attachée au point M(x,y,z) possédant une vitesse V(y).

Le frottement entre une lame et les lames supérieure et inférieure directement à son contact se traduit par une force tangentielle de viscosité (dite de cisaillement), parallèle à la direction de l'écoulement et dont la norme s'écrit : $F_{vis} = \eta S \dfrac{\partial v}{\partial y}$, S étant la surface de contact entre les lames adjacentes.

D2. Que représente η ? Préciser son unité et justifier sa dimension en Pascal (P_a) et seconde (s).

D3. Rappeler la définition d'un fluide newtonien ; existe-t-il d'autres types de fluides ? Citer des exemples.

Les forces de pesanteur qui s'appliquent sur tout élément de fluide sont très largement inférieures aux forces de frottement fluide et de pression. Ainsi l'action de la pesanteur pourra être négligée dans la suite de cette étude.

E / PROFIL DE VITESSSE ENTRE LES PLAQUES

Rappelons que, dans un écoulement de fluide newtonien incompressible, le champ de vitesse $\vec{v}(M,t)$ et le champ de pression $P(M,t)$ sont reliés par l'équation de Navier-Stokes :

$$\mu \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\overrightarrow{grad}\, P + \overrightarrow{f_{vol,vis}}$$ (en l'absence de pesanteur)

E1*a. Montrer que la force volumique de viscosité $\overrightarrow{f_{vol,vis}}$ qui s'applique sur une particule de fluide, de volume élémentaire dV = dx dy dz (**fig 5.b**), s'exprime par la relation :

$\overrightarrow{f_{vol,vis}} = \eta\, \Delta\vec{v}$, en justifiant notamment le signe des forces de cisaillement, s'appliquant sur les surfaces de la particule de fluide. Donner son expression.

Relation d'analyse vectorielle en coordonnées cartésiennes :

$$\Delta\vec{A} = \left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2}\right)\vec{e_x} + \left(\frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2}\right)\vec{e_y} + \left(\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2}\right)\vec{e_z}$$

E1*b. Montrer que la dérivée particulaire $\frac{D\vec{v}}{Dt}$ est nulle en régime permanent.

E1*c. Exploiter l'équation de Navier-Stockes, pour en déduire les équations différentielles vérifiées par la pression, montrer que la pression ne dépend que de x et que la quantité dP/dx est une constante K à expliciter simplement en fonction de ΔP et L. Justifier physiquement le signe de K.

E2*a. Préciser les conditions aux limites imposées par les parois du moule en y = ± e/2 .

E2*b. Montrer que l'expression de la vitesse est alors : $V(y) = \frac{K}{2\eta}(y^2 - \frac{e^2}{4})$.

Exprimer la vitesse maximale V_{max} de l'écoulement puis écrire la vitesse V(y) en fonction de V_{max} et de la quantité adimensionnée (2y/e).

E2*c. Représenter le profil de vitesse $V(y)/V_{max}$ dans un plan de coupe du moule (figure 5c).

E3*a. Exprimer le débit volumique Q_v (pour une largeur w du moule dans la direction Oz) en fonction de V_{max}, e et w ; en déduire la vitesse moyenne $\overline{V}$ de l'écoulement.

E3*b. Calculer, à l'aide des données fournies, la vitesse V_{max}, la vitesse moyenne $\overline{V}$, le débit Q_v . Définir puis évaluer le nombre de Reynolds R_e et commenter la valeur obtenue.

Le temps de séjour de la matière introduite dans le moule est défini comme le rapport de la longueur de l'écoulement à sa vitesse moyenne.

E4*a. Exprimer le temps de séjour minimum t_{min} ?
Définir le temps de séjour moyen t_{moy} en fonction du volume de matière dans le moule et du débit volumique puis l'exprimer en fonction de K, η, L et e.

E4*b. Exprimer le temps de séjour t(y) pour une tranche de fluide puis le rapport $\frac{t(y)}{t_{min}}$ en fonction de la variable (2y/e). Analyser cette expression en traçant schématiquement ce rapport en fonction de la variable (2y/e).

E4*c. Calculer t_{min} et t_{moy} à l'aide des données fournies.

Deuxième partie – Déversoir de pâte pour machine à pancakes (durée conseillée 1H)

Le but du déversoir est de faire couler dans la poêle un volume de pâte à pancakes constant de manière automatisée. Trois options sont possibles pour sa réalisation : par électroaimant, par motorisation, par motorisation avec réservoir. La dernière solution sera retenue ; elle permet d'ailleurs de prévoir un déversoir de sirop d'érable fonctionnant sur le même actionneur (voir **figure 6**). On cherche à déterminer le temps de coulée de la pâte en fonction des différents paramètres du réservoir et du fluide afin de connaître la durée pendant laquelle l'actionneur doit laisser s'écouler la pâte.

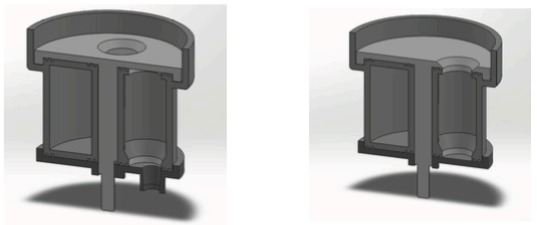


Figure 6 – Déversoir par motorisation avec réservoir : principe de fonctionnement

II.1 - Modèle parfait

On modélise le réservoir par un cylindre de rayon R_1, rempli de pâte sur une hauteur h_0 à l'instant initial, baignant dans l'air atmosphérique à pression P_0. En ouvrant le réservoir en son fond à l'instant $t = 0$, la pâte s'écoule à l'air libre à travers une section cylindrique de rayon R_2 ; $h_p(t)$ désigne la hauteur de pâte encore présente dans le réservoir à l'instant t. On note ρ la masse volumique de la pâte et $\vec{g}$ l'accélération de la pesanteur.

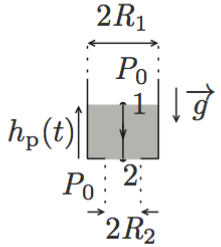


Figure 7 – Vidange du réservoir : notations utilisées

Dans une première approche, on néglige toute dissipation d'énergie au sein de l'écoulement de pâte. On propose alors d'utiliser la relation de Bernoulli entre les points 1 et 2 de la ligne de courant représentée sur la **figure 7**.

Q16. Rappeler la relation de Bernoulli, ainsi que ses conditions d'application. On supposera ces conditions remplies dans le cadre de ce premier modèle.

Q17. L'écoulement étant supposé incompressible, trouver une relation liant les vitesses $v_1(t)$ et $v_2(t)$ de la pâte à l'instant t au niveau des sections de rayons respectifs R_1 et R_2.

Q18. Déterminer une expression de $v_2(t)$ en fonction de g, $h_p(t)$, R_1 et de R_2 uniquement.

Q19. En identifiant $v_1(t)$ à $-\mathrm{d}h_p/\mathrm{d}t$, déduire de la question précédente une équation différentielle régissant l'évolution de $h_p(t)$.

Q20. Résoudre cette équation différentielle par séparation des variables, puis montrer que la durée totale de vidange du réservoir s'exprime par :

$$\tau_p = \sqrt{\frac{2h_0}{g}\left[\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^4 - 1\right]}. \qquad (10)$$

Q21. Calculer numériquement τ_p. On trouve un temps de vidange expérimental $\tau_{exp} = 1{,}5$ s. Qu'en pensez-vous ?

II.2 - Modèle visqueux

On propose un deuxième modèle tenant compte des effets visqueux. On note η la viscosité dynamique de la pâte. Pour simplifier la modélisation, on assimile le réservoir à un cylindre de rayon R_1, ce qui revient à négliger l'effet du rétrécissement de section de R_1 à R_2. La dissipation d'énergie au sein de l'écoulement de pâte s'accompagne d'un terme de perte de charge régulière le long de la hauteur de pâte $h_v(t)$ à l'instant t, homogène à une pression et donné par la loi de Darcy-Weisbach :

$$\Delta P_c = \Lambda \frac{\rho {v_m}^2}{2}\frac{h_v(t)}{d} \qquad \text{avec} \qquad \Lambda = \frac{64}{\mathcal{R}e}. \qquad (11)$$

Dans cette expression, $v_m = -\mathrm{d}h_v/\mathrm{d}t$ représente la vitesse débitante (ou vitesse moyenne) de l'écoulement dans le réservoir, $d = 2R_1$ le diamètre du réservoir et $\mathcal{R}e$ le nombre de Reynolds. On a $h_v(t=0) = h_0$.

Q22. Évaluer l'ordre de grandeur de v_m en utilisant le temps τ_{exp} donné à la **question Q21**. Rappeler la définition du nombre de Reynolds $\mathcal{R}e$ en fonction de ρ, v_m, η et de d, puis estimer sa valeur pour l'écoulement étudié. L'expression de Λ proposée étant valable dans la limite $\mathcal{R}e < 2 \cdot 10^3$, vérifier la validité de cette formule.

Q23. Appliquer la relation de Bernoulli généralisée tenant compte de cette perte de charge entre les points 1 et 2 (voir **figure 7**) et obtenir une expression de $\mathrm{d}h_v/\mathrm{d}t$ en fonction de ρ, g, R_1 et de η. On rappelle que l'on néglige l'effet du rétrécissement.

Q24. Déterminer la loi d'évolution $h_v(t)$. En déduire la durée totale de vidange du réservoir τ_v.

Q25. Calculer numériquement τ_v et comparer à la valeur expérimentale de la **question Q21**. Comment pourrait-on encore affiner la modélisation ?

Données pour la partie II

Accélération de la pesanteur : $g = 9{,}8\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$
Dimensions du réservoir : $R_1 = 1{,}0$ cm, $R_2 = 0{,}70$ cm
Hauteur initiale de pâte : $h_0 = 6{,}0$ cm
Propriétés physiques de la pâte :
- Masse volumique : $\rho = 1{,}1 \cdot 10^3\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$
- Viscosité dynamique : $\eta = 3{,}0\ \mathrm{Pa \cdot s}$

19) Définir avec rigueur le système fermé utilisé pour mener ce bilan

Troisième partie – Propulseur de plongée (durée conseillée 1H30)

Les plongeurs ont parfois recours à un propulseur de plongée ou scooter leur permettant de se propulser plus rapidement et d'explorer davantage les fonds marins.

Celui-ci est simplement composé d'une hélice comme pour les bateaux à propulsions et peut faire atteindre aux plongeurs une vitesse maximale de $10\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$.

Le scooter embarque une hélice animée d'un mouvement de rotation uniforme autour de l'axe Ox.

L'étude est faite dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}'$ lié à l'axe de l'hélice.

On considère un tube de courant possédant la symétrie de révolution autour de Ox et s'appuyant sur les pales de l'hélice. Ce tube de courant définit une surface fermée, constituée de la surface latérale du tube S_{lat} et des sections droites amont et aval S_1 et S_2. On suppose la pression à l'extérieur de ce tube de courant uniforme et égale à P_e.

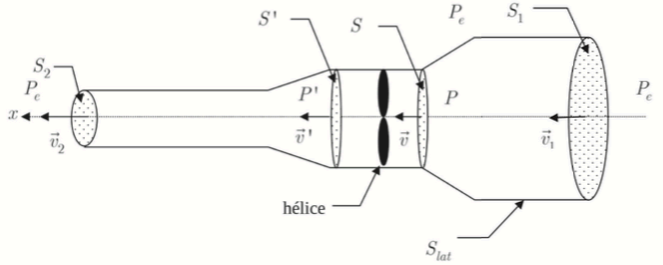


FIGURE B2 – Tube de courant

- Sur la surface S_1, la vitesse du fluide est uniforme et égale à $v_1\vec{e}_x$;
- sur la surface S_2, elle est égale à $v_2\vec{e}_x$.

Au voisinage de l'hélice, on considère deux sections S et S' d'aires sensiblement égales $S \simeq S'$:

- sur la surface S, la vitesse est $v\vec{e}_x$ et la pression P ;
- sur la surface S', la vitesse est $v'\vec{e}_x$ et la pression P'.

Au voisinage proche de l'hélice, entre S et S', l'écoulement est perturbé et il existe une discontinuité de la pression de part et d'autre de l'hélice.

L'eau de mer sera supposée comme étant un fluide parfait et incompressible, en écoulement stationnaire. On négligera l'influence de la pesanteur.

17) Donner les relations reliant S_1, v_1, S, v, S', v', S_2 et v_2. Que conclure sur v et v' ?

18) Exprimer la pression P en fonction de P_e, ρ, v_1 et v puis P' en fonction P_e, ρ, v_2 et v.

19) Par un bilan de quantité de mouvement dans le volume délimité par S_1, S_2 et S_{lat}, déterminer la résultante $\vec{F}$ des efforts exercés par l'hélice sur le fluide en fonction de ρ, S, v, $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$; commenter le sens de $\vec{F}$.

20) Evaluer $\vec{F}$ par ailleurs, en travaillant sur un bilan de quantité de mouvement dans le volume compris entre S et S'. Commenter le signe de F et justifier l'allure des lignes de courant représentées.

21) En déduire la relation suivante reliant les vitesses : $v = \dfrac{v_1 + v_2}{2}$.

22) Evaluer la puissance $\mathcal{P}_f$ fournie par l'hélice au fluide et mesurée dans $\mathcal{R}'$:

22.a) à partir de $\vec{F}$;

22.b) en appliquant un bilan d'énergie à un système convenable.

On exprimera $\mathcal{P}_f$ en fonction de v_1, v_2 et du débit massique D_m circulant dans le tube de courant représenté.

Le plongeur est alors animé d'une vitesse uniforme $\vec{U} = -U\vec{e}_x$ prise par rapport au référentiel terrestre $\mathcal{R}_T$ supposé galiléen. Dans ce référentiel, le fluide en amont de l'hélice est immobile et possède une vitesse $\vec{W} = W\vec{e}_x$ en aval de celle-ci.

23) A l'aide de la loi de composition des vitesses, exprimer les vitesses $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ dans le référentiel $\mathcal{R}'$ en fonction de $\vec{U}$ et/ou de $\vec{W}$.

24) Exprimer alors la force $\vec{F}$ en fonction de D_m, v et U. En déduire que la force de poussée $\vec{F}$ et la puissance $\mathcal{P}_f$ sont reliées par la relation suivante :

$$\mathcal{P}_f^2 - FU\mathcal{P}_f - \frac{F^3}{2S\rho} = 0. \qquad (1)$$

En réalité, le plongeur subit une force de frottement due à la viscosité de l'eau qui s'oppose au mouvement et appelée trainée. Son expression est donnée par $T_r = \frac{1}{2}C_x\rho S_{\text{eff}}U^2$, où S_{eff} est la surface efficace du plongeur (surface de celui-ci projetée dans le plan perpendiculaire au mouvement) et C_x le coefficient de trainée.

On supposera que les résultats précédents restent en première approximation valables.

25) Le plongeur avançant à une allure constante, quelle est la relation entre F et T_r ?

Résoudre l'équation (1) et montrer que la solution s'écrit :

$$\mathcal{P}_f = \frac{C_x\rho S_{\text{eff}}}{4}\left[1 + \sqrt{1 + \frac{C_x S_{\text{eff}}}{S}}\right]U^3.$$

26) Application numérique : le propulseur utilisé présente les indications suivantes :

Pour un plongeur dans l'eau à la vitesse considérée, on a $C_x = 0{,}09$ et $S_{\text{eff}} = 0{,}12\,\text{m}^2$.

On rappelle que $\rho = 1{,}0 \times 10^3\,\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$.

Calculer $\mathcal{P}_f$. Commenter la valeur de la puissance obtenue.