

Exercice 1 – Pince ampèremétrique

Une pince ampèremétrique est un appareil dont l'extrémité possède la forme d'un tore. En disposant ce tore autour d'un conducteur parcouru par un certain courant, le dispositif équipant la pince permet d'en mesurer l'intensité. Son intérêt est de ne nécessiter ni contact physique avec le conducteur, ni ouverture du circuit.

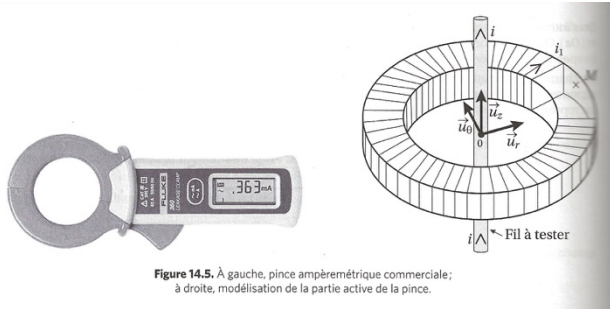
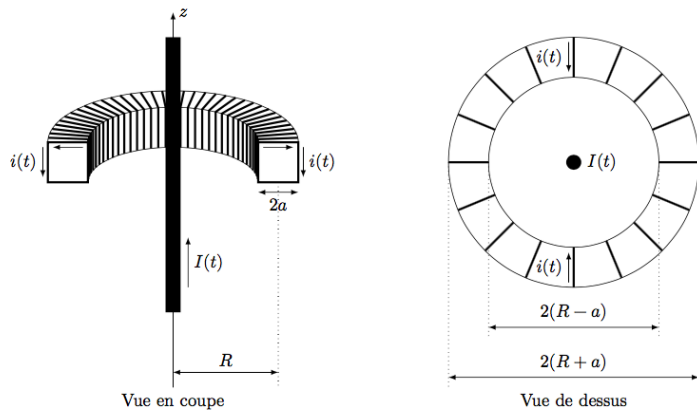


Figure 14.5. À gauche, pince ampèremétrique commerciale; à droite, modélisation de la partie active de la pince.

Une bobine torique de section carrée de côté $2a$, de rayon moyen R , comportant N spires jointives est fermée sur un ampèremètre de résistance négligeable. La bobine torique a une résistance équivalente notée \mathcal{R} .

La bobine entoure un fil conducteur que l'on supposera rectiligne et infini et dont l'axe coïncide avec celui de la bobine torique; le conducteur est parcouru par un courant $I(t) = I_0 \cos(\omega t)$. Ce courant variable induit un courant $i(t)$ dans la bobine torique. Vu la symétrie du problème, on travaille en coordonnées cylindriques d'axe Oz .



1. Calculer, en exploitant soigneusement les symétries, le champ magnétique $\vec{B}_{\text{bobine}}(r, \theta, z, t)$ créé par la bobine en tout point, en fonction, notamment, de N , $i(t)$ et \mathcal{R} .
2. Calculer, de même, le champ magnétique $\vec{B}_{\text{fil}}(r, \theta, z, t)$ créé par le fil en tout point, en fonction, notamment, de $I(t)$.
3. Donner la définition de l'inductance mutuelle M entre deux circuits et de l'inductance propre L d'un circuit. On donne ici (calcul non demandé) l'inductance propre de la bobine torique et l'inductance mutuelle entre le fil et la bobine torique :

$$L = \frac{\mu_0 N^2 a}{\pi} \ln \left(\frac{R+a}{R-a} \right) \quad M = \frac{\mu_0 N a}{\pi} \ln \left(\frac{R+a}{R-a} \right)$$

Vérifier par le calcul ces deux expressions et commenter les.

4. Calculer l'intensité complexe $\hat{i}(t)$ du courant dans la bobine en régime sinusoïdal forcé (régime imposé par le fil central, toujours parcouru par $I(t) = I_0 \cos(\omega t)$).
5. Que devient le rapport $\left| \frac{\hat{i}}{\hat{I}} \right|$ à haute fréquence ? Préciser le sens de l'expression « haute fréquence ».

On donne $N = 10\,000$; $R = 6$ cm; $a = 1$ cm; $f = 50$ Hz; $\mathcal{R} = 0,2 \Omega$.

Pourquoi peut-on qualifier le dispositif de transformateur de courant ? Pourquoi est-ce un appareil très utilisé pour la mesure des forts courants ?

Exercice 2 – Interaction entre spires et lévitation électromagnétique, effet de peau

Extrait de concours PT 2010

La lévitation magnétique est utilisée pour faire circuler des trains à grande vitesse, en Chine ou au Japon par exemple. L'objet de ce problème est d'étudier les difficultés de mise en œuvre de la lévitation magnétique dans le cadre d'un modèle simple.

Données :

Perméabilité magnétique du vide $\mu_0 = 4\pi 10^{-7}$ H.m⁻¹.

Expressions de la divergence et du rotationnel d'un vecteur exprimé sur la base locale des coordonnées cylindriques :

$$\text{div}(\vec{A}) = \frac{1}{r} \frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

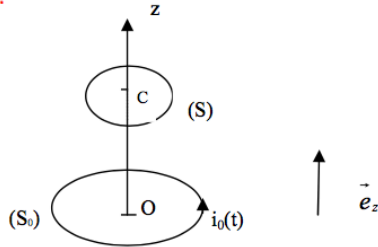
$$\text{rot}(\vec{A}) = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) \vec{e}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \vec{e}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \vec{e}_z$$

On rappelle que $\text{rot}(\text{rot}(\vec{A})) = \text{grad}(\text{div}(\vec{A})) - \Delta(\vec{A})$

1) Interaction entre deux spires. (45% des points)

On considère une spire S_0 située dans le plan horizontal, de centre O, d'axe Oz, de rayon a, parcourue par un courant sinusoïdal $i_0(t) = I_0 \cos(\omega t)$ et une bobine (S) de même axe, de centre C situé à la cote positive $z_0 = a$, de rayon b, de résistance R et d'inductance L, comprenant N spires supposées confondues.

Dans toute l'étude, on se place dans le cadre de l'approximation des régimes quasi-stationnaires.



On se place dans le cas où $b \ll a$

Pour les applications numériques on prendra : $a=1$ m $b=0,1$ m $z_0=a$, $I_0=100$ A, $f=1000$ Hz $N=5000$, $R=100\Omega$ et $L=0,15$ H.

1) On cherche à déterminer le champ magnétique \vec{B} créé par S_0 en un point M de l'axe Oz, de cote z.

1-1) Justifier précisément la direction du champ.

1-2) Déterminer l'expression de $\vec{B}(z)$

Exprimer celui ci en C ($z=a$) fonction de $B_0 = \frac{\mu_0 I_0}{4\sqrt{2}a}$

2) Détermination du courant dans la spire (S)

2-1) Quel est le phénomène responsable de la présence d'un courant $i(t)$ dans (S) ?

En admettant que le champ est uniforme au voisinage de l'axe dans un plan orthogonal à celui-ci, calculer la fem dans la bobine (S)

2-2) Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $i(t)$. On introduira $E_0 = N\pi b^2 \omega B_0$.

2-3) Déterminer la solution de régime forcé sous la forme $i(t) = I \sin(\omega t - \varphi)$. Donner I et φ fonction de E_0, ω, R, L .

2-4) Calculer I et φ .

3) Première détermination de la force

3-1) Quelle est l'origine de la force subie par la spire (S) due à la spire (S_0) ?

3-2) Déterminer cette force, toujours en supposant que le champ est uniforme au voisinage de l'axe.

4) Amélioration du modèle.

4-1) Dans un plan méridien, tracer l'allure des lignes de champ créées par (S_0)

On considère un point M repéré en coordonnées cylindriques (r, θ, z) au voisinage de l'axe.

Et on cherche à déterminer une expression approchée du champ magnétique $\vec{B}(M)$ créé par (S_0)

4-2) Montrer que sur la base locale des coordonnées cylindriques, une des composantes de $\vec{B}(M)$ est nulle.

4-3) Pourquoi peut on assimiler la composante axiale $B_z(M)$ à $B(z)$ déterminée en 1-2 ?

4-4) Que vaut le flux du champ magnétique à travers une surface fermée? Quelle est l'équation locale associée ?

4-5) En utilisant un cylindre élémentaire de rayon r d'axe Oz de bases situées aux cotes z et

$z+dz$, montrer qu'au voisinage de l'axe la composante radiale vaut $B_r(M) = -\frac{r}{2} \frac{dB(z)}{dz}$

4-6) Déterminer cette composante à la cote $z = a$ sous la forme $B_r(r, a) = \frac{r}{a} B_1 \cos(\omega t)$; le résultat obtenu est il conforme à l'allure des lignes de champ ?

4-7) Déterminer la force, puis la force moyenne sur une période subie par (S) en fonction de B_1, N, a, b, I et φ .

4-8) Que devient cette force dans le cas limite où les effets résistifs masquent les phénomènes dus à l'auto induction ?

4-9) Calculer numériquement cette force moyenne.

5) Autre point de vue

5-1) Déterminer le moment magnétique total \vec{m} associé à (S) en fonction de $i(t)$.

5-2) La composante sur Oz de la force subie par un moment magnétique dans un champ s'écrit $\vec{f} = m \frac{d\vec{B}}{dz}$, m étant la composante du moment magnétique sur l'axe Oz et \vec{B} le champ sur l'axe. Exprimer cette force moyenne en C, en fonction de B_1, N, a, b, I et φ et conclure.

5-3) On note F(z) la composante verticale de la force moyenne exercée sur la bobine située à la cote z et on indique que sur l'intervalle utilisé en z, F(z) est décroissante. On étudie l'équilibre de la bobine de masse m dans le champ de la spire.

5-3-a) Ecrire la relation qui permet de déterminer la cote z_e à l'équilibre. Si l'on utilise un matériau plus léger pour les spires de la bobine, l'altitude d'équilibre sera-t-elle plus ou moins élevée ? Justifier la réponse

5-3-b) Discuter la stabilité de l'équilibre.

6) Champ total

Dans cette question, C est confondu avec O et la résistance R est supposée nulle.

6-1) Justifier l'expression approchée suivante de l'inductance :

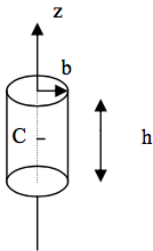
$$L = \frac{\mu_0}{2} N^2 \pi b$$

6-2) En utilisant les résultats de la partie I, déterminer l'expression du courant $i(t)$.

6-3) Déterminer l'expression du champ magnétique créé par (S) en O puis le champ total en O. Pouvait-on prévoir cet effet ?

II) Effets volumiques (35% des points).

Dans le dispositif de la partie I, la spire (S) est remplacée par un cylindre conducteur de conductivité γ , de hauteur h , de rayon b , également d'axe Oz. Le centre C du cylindre est à la cote $z=a$.



1 Modèle sommaire

1-1) A quelle condition peut-on considérer que l'expression, en tout point du cylindre, du champ appliqué s'écrit $\vec{B}(M,t) = B_0 \cos(\omega t) \vec{e}_z$? Nous prendrons cette forme dans un premier temps.

1-2) Quelle équation de Maxwell traduit le phénomène d'induction ?

1-3) Montrer que le champ électrique dans le cylindre est orthoradial et qu'il ne dépend que de r puis le déterminer sous la forme $\vec{E}(M,t) = Kr \sin(\omega t) \vec{e}_\theta$

1-4) Rappeler la loi d'Ohm sous forme locale. On définit le moment magnétique du cylindre à partir de la densité volumique de courant par la relation :

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \iiint \vec{CP} \wedge \vec{j}(P) d\tau \text{ où } \vec{j} \text{ est la densité de courant.}$$

Montrer sans calcul que \vec{m} est colinéaire à Oz, et déterminer son expression.

1-5) A partir de l'expression du moment magnétique, le calcul de la force donne : $\vec{F} = \frac{3\pi b^4 h}{32\gamma a} B_0^2 \omega \sin(\omega t) \cos(\omega t) \vec{e}_z$

Que vaut cette force en moyenne ? Quelle différence avec la partie I fait que l'on ne retrouve pas un résultat similaire ?

1-6) Déterminer le champ magnétique \vec{B}_i dans le cylindre créé par les courants induits, sachant que \vec{B}_i est nul en $r = b$.

1-7) Montrer qu'une condition pour que ce champ puisse être négligé s'écrit $b \ll \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \gamma \omega}}$.

2) Amélioration du modèle : étude de l'effet de peau

Dans un premier temps on considère une géométrie plus simple dans laquelle le métal conducteur occupe tout le demi-espace ($x > 0$) tandis que le demi-espace ($x < 0$) est vide dans lequel règne un champ uniforme $\vec{B}_e(M,t) = B_0 \cos(\omega t) \vec{e}_z$. Dans le métal il y a un champ que l'on note $\vec{B}(M,t) = B(x,t) \vec{e}_z$

2-1) Montrer que le champ magnétique dans le conducteur vérifie l'équation $\Delta(\vec{B}) = \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ dans le cadre de l'approximation des régimes quasi-stationnaires.

2-2) Pourquoi peut-on dire que cette équation prend en compte les phénomènes d'auto-induction ?

2-3) On cherche une solution en régime harmonique permanent sous la forme complexe

$\vec{B}(M,t) = \underline{B}(x) \exp(i\omega t) \vec{e}_z$. Quelle équation différentielle vérifie $\underline{B}(x)$?

2-4) Rappeler la relation de passage pour le champ magnétique. Que devient-elle ici en $x=0$?

2-5) Résoudre l'équation caractéristique associée ; on posera $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}$; quelle est la dimension de δ ? En déduire $B(x,t)$. Commenter la solution obtenue.

2-6) Déterminer la densité de courant dans le conducteur sous forme réelle.

2-7) Déterminer la force moyenne élémentaire qui s'exerce sur un volume élémentaire $d\tau$ de conducteur.

2-8) Déterminer la résultante moyenne des forces qui s'exercent sur la portion de conducteur constituée par un cylindre de base S, d'axe Ox, de longueur infinie.

On revient à la géométrie du II-1), et on suppose que $\delta \ll b$

2-9) Justifier que l'on peut écrire une densité volumique de courant au voisinage du bord sous la forme :

$$\vec{j} = -\frac{B_0 \sqrt{2}}{\mu_0 \delta} \cos(\omega t + \frac{\pi}{4}) \vec{e}_\theta, \quad \vec{e}_\theta \text{ étant le vecteur unitaire orthoradial.}$$

Exercice 3 – Optimisation d'un drone

Extrait de concours E3A – Modélisation et Ingénierie numérique
2019 PSI

Optimisation de la masse d'un drone de prise de vue

Les drones de prise de vue sont aujourd'hui utilisés pour de nombreuses applications professionnelles ou ludiques : surveillance militaire ou civile, agriculture, inspection des bâtiments et des ponts, mais aussi pour le cinéma, la télévision ou des loisirs tels que les courses de modèles réduits.

La plupart d'entre eux utilisent une nacelle motorisée à 2 ou 3 axes asservis qui a pour fonction de stabiliser les images acquises par la caméra ou l'appareil-photo embarqué. Pour le reste, on retrouve les composants de base d'un drone classique : structure légère en plastique ou en carbone, moteurs synchrones à aimants permanents (*brushless*) avec leur électronique de commande et de puissance ainsi qu'une batterie.



Figure 1 – Drone de prise de vue avec nacelle motorisée 3 axes (modèle : DJI Phantom4)

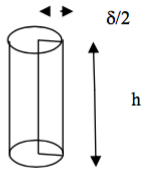
Les principaux inconvénients des drones à caméra restent leur poids (comparativement aux drones classiques) et leur faible autonomie, de l'ordre de la dizaine de minutes. Une réduction de la masse permettrait des vols plus dynamiques et une consommation inférieure. Les problématiques de réduction de masse et d'augmentation de l'autonomie sont donc liées.

L'essentiel de la masse est concentré dans les moteurs, la nacelle de la caméra et la batterie. Une fois les moteurs convenablement dimensionnés, les pistes d'allègement concernent les deux derniers éléments cités.

Le problème s'intéresse ainsi à des évolutions dont la finalité est la réduction de la masse du drone et est construit en **quatre parties indépendantes** :

- la **partie I** s'intéresse au rapport entre la masse du drone et sa consommation énergétique ;
- la **partie II** étudie une ingénierie alternative à la lourde nacelle motorisée ;
- la **partie III** porte sur les batteries Li-ion alimentant les drones et en particulier sur l'optimisation de leurs capacités massiques ;
- enfin, la **partie IV** explore la possibilité de se passer de batterie en lui substituant un dispositif d'alimentation sans fil.

2-10) Calculer l'intensité du courant qui traverse une section de hauteur h et de largeur $\delta/2$.



En déduire le moment magnétique de cette distribution de courant.

2-11) Déterminer la force moyenne subie par le cylindre sachant que

$$\frac{d\vec{B}}{dz}(z=a) = -\frac{3B_0}{2a} \cos(\omega t) \vec{e}_z \text{ et que } h \ll a \text{ et } b.$$

On utilise un dispositif à noyau de fer qui renforce le champ magnétique créé par la spire. Calculer cette force moyenne pour $h=0,01 \text{ m}$ et $B_0=022 \text{ T}$.

2-12) En pratique, à la place de la bobine on utilise un corps supraconducteurs. Le système acquiert ainsi une propriété mécanique indispensable. De quelle propriété s'agit il ?

Partie IV - Peut-on se passer de batterie ?

Si la réduction de la masse des batteries reste une problématique majeure, une solution plus drastique a été récemment envisagée : leur remplacement par un système d'alimentation à distance.

Cette idée se base sur les recherches récentes, en particulier les travaux menés par les groupes de recherche du Massachusetts Institute of Technology et de la société Witricity, remettant au goût du jour le vieux rêve de Nikola Tesla concernant la transmission d'énergie sans fil (*Wireless Power Transmission* ou WPT). Le couplage inductif entre des circuits émetteur et récepteur est actuellement exploité pour la recharge de petits appareils portables et est envisagé notamment pour l'alimentation des transports en commun ou la domotique (**figure 21**).



Figure 21 – Quelques expériences de transmission d'énergie sans fil : a) Recharge de téléphones portables ; b) Alimentation à distance d'une ampoule de 60 W (Source : compagnie Witricity) ; c) Dispositif de transmission sans fil entre un drone et un circuit au sol (Source : Université de Nebraska-Lincoln)

Objectif : étudier la pertinence d'un système de transmission de puissance sans fil pour alimenter un drone volant à proximité d'une borne-source.

IV.1 - Modèle électrique équivalent d'une antenne

Un tel dispositif d'alimentation à distance serait constitué d'une bobine émettrice placée sur un support au sol, ainsi que d'une bobine réceptrice et d'un étage de conversion de puissance, tous deux embarqués sur le drone.

On considère un enroulement de N spires de rayon a pouvant faire office d'émetteur ou de récepteur (**figure 22**). L'épaisseur de l'enroulement est négligée (modèle de la bobine plate).

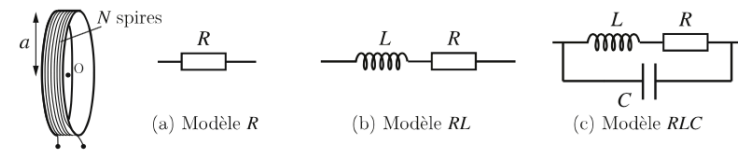


Figure 22 – Modélisations possibles pour l'enroulement

Q29. On propose, **figure 22**, trois modèles différents pour représenter l'enroulement sur différents domaines de fréquences. Quels phénomènes physiques modélisent les éléments R , L et C ?

Essai indiciel

On dispose d'une bobine de 100 spires de rayon 10 cm, constituées de cuivre. On mesure d'abord à l'ohmmètre la résistance de l'enroulement : $R = 6,2 \Omega$. On effectue ensuite un essai indiciel. Un schéma du montage ainsi que l'évolution temporelle de la tension u_R sont proposés en **figure 23**.

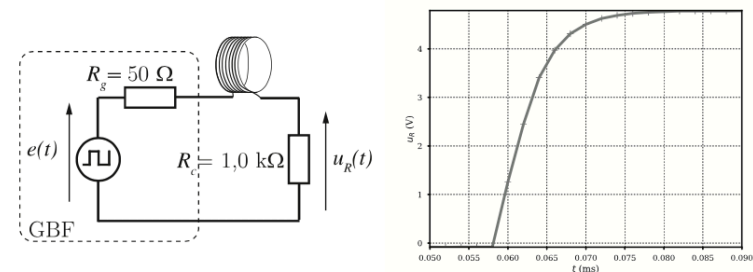


Figure 23 – Circuit expérimental et réponse indicelle de la tension aux bornes de la résistance R_c

Q30. Justifier que le modèle (b) de la **figure 22** est cohérent avec la réponse observée. En déduire la valeur de l'inductance L .

Essai harmonique

Afin d'affiner le modèle aux hautes fréquences, on mesure expérimentalement le module $|Z|$ de l'impédance de l'enroulement en fonction de la fréquence (figure 24).

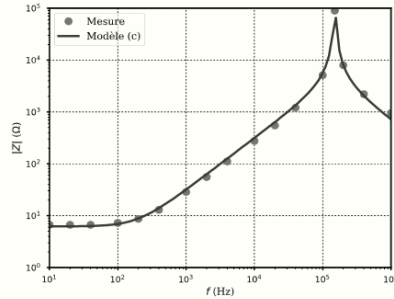


Figure 24 – Module de l'impédance de l'enroulement en fonction de la fréquence (mesure et modèle (c)); les échelles sont logarithmiques

Q31. En exploitant la figure 24, estimer la fréquence au-delà de laquelle le modèle (a) de la figure 22 n'est plus valide. Même question pour le modèle (b).

Q32. Exprimer l'impédance Z associée au modèle (c) de la figure 22 en fonction de L , R , C et ω .

Q33. Justifier que la résistance d'enroulement peut être négligée pour une fréquence de l'ordre de f_0 , fréquence de la résonance observée en figure 24. En faisant cette hypothèse, déterminer l'expression de f_0 en fonction de L et C . En déduire la valeur de C .

Le module de Z est tracé figure 24 à partir de cette expression théorique et des valeurs de L , R et C obtenues expérimentalement, montrant la pertinence du modèle (c) à toute fréquence.

IV.2 - Modélisation du couplage entre émetteur et récepteur

Nous cherchons à estimer l'inductance mutuelle M apparaissant entre les enroulements récepteur et émetteur.

Nous supposons que ces enroulements restent tous deux parfaitement horizontaux. Le centre des spires de l'émetteur est noté O_1 et la position du centre O_2 du récepteur est donnée par les coordonnées (r_0, θ_0) associées au repère polaire de centre O_1 (figure 25, page 22).

On note a_1 , N_1 , S_1 , le rayon, le nombre de spires et la section de l'enroulement émetteur parcouru par l'intensité i_1 . Les grandeurs relatives au récepteur seront notées avec un indice 2.

Q34. Sachant que $r_0 \sim 1 - 10$ m et que la fréquence de fonctionnement $f \sim 10^2$ kHz, justifier la validité de l'Approximation des Régimes Quasi-Stationnaires.

Nous modéliserons ainsi l'émetteur comme un dipôle de moment magnétique $M_1 \vec{z}$ créant un champ magnétique :

$$\vec{B}_1(r, \theta) = \frac{\mu_0 M_1}{4\pi r^3} (2 \cos \theta \vec{u}_r + \sin \theta \vec{u}_\theta). \quad (7)$$

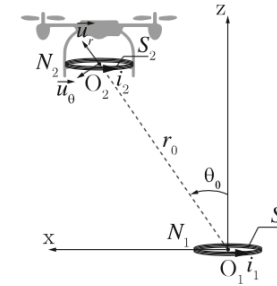


Figure 25 – Émetteur et récepteur

Q35. Exprimer la norme du moment magnétique M_1 en fonction de N_1 , S_1 et i_1 .

Rappeler l'expression définissant la mutuelle inductance M entre les circuits 1 et 2 puis, en supposant le champ \vec{B}_1 uniforme sur toute la surface du récepteur, exprimer M en fonction de r_0 , θ_0 , μ_0 , N_1 , N_2 , S_1 et S_2 .

On donne en figure 26 l'évolution de M en fonction de la distance r_0 , obtenue par cette approche analytique mais aussi par un calcul d'intégration numérique et une série d'expériences.

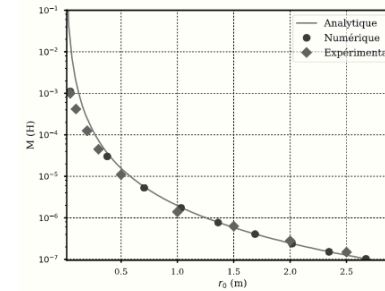


Figure 26 – Inductance mutuelle en fonction de la distance pour $\theta_0 = 0$, $a_1 = a_2 = 10$ cm et $N_1 = N_2 = 100$

Q36. Justifier le désaccord aux faibles distances. Peut-on utiliser le modèle analytique pour l'application étudiée ?

IV.3 - Transmission de puissance par couplage inductif résonnant

Comme on a pu le constater dans l'expérience précédente, le couplage entre émetteur et récepteur est très faible dès que la distance entre eux augmente (M décroît proportionnellement à $1/r^3$), ce qui constitue le principal obstacle à la transmission d'une puissance significative.

Pour pallier ce faible couplage, l'idée est de rendre résonants les circuits émetteur et récepteur : on parle de *couplage inductif résonant*. Le système de transmission sans fil est ainsi constitué de l'émetteur et du récepteur, dont les fréquences propres sont accordées à la même valeur (éventuellement en ajoutant une capacité à un des circuits), couplés inductivement aux circuits de source et de charge (**figure 27a**). Les couplages source/émetteur et récepteur/charge permettent une adaptation d'impédance maximisant la puissance transmise.

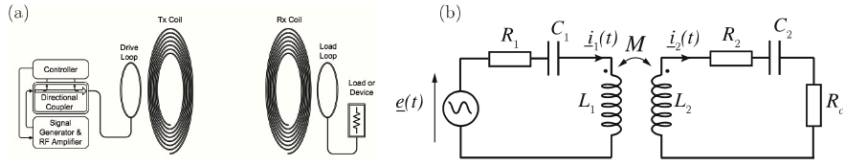


Figure 27 – **a**) Principe de la transmission de puissance sans fil par couplage résonant (Source : Université de Washington); **b**) Modèle électrique équivalent

La **figure 27b** propose un modèle électrique équivalent du système, s'appuyant sur les études menées dans les deux sous-parties précédentes. $e(t)$ modélise la source vue de la bobine émettrice et R_c la charge vue de la bobine réceptrice.

Q37. Donner deux relations liant i_1 , i_2 et e .

On admet que ces deux relations permettent d'obtenir l'expression (8) :

$$i_2 = \frac{Mj\omega e}{M^2\omega^2 + \left(R_1 + j\left(L_1\omega - \frac{1}{C_1\omega}\right)\right)\left(R_2 + R_c + j\left(L_2\omega - \frac{1}{C_2\omega}\right)\right)} \quad (8)$$

Q38. Que devient cette expression lorsque $\omega = \omega_0 = 1/\sqrt{L_1C_1} = 1/\sqrt{L_2C_2}$? En déduire l'expression de la puissance moyenne P transmise à la charge R_c en fonction de la tension efficace E_{eff} , ω_0 , M et des valeurs de résistances.

Cette puissance est maximale pour une résistance de charge $R_c = R_m = \frac{R_1R_2 + M^2\omega_0^2}{R_1}$ et elle vaut

$$\text{alors } P_{max} = \frac{1}{4R_1} \frac{M^2\omega_0^2 E_{eff}^2}{R_1R_2 + M^2\omega_0^2}.$$

Q39. Pour $E_{eff} \sim 10^2$ V, $\omega_0 \sim 10^6$ rad/s et $R_1 \sim R_2 \sim 1 \Omega$, déterminer l'ordre de grandeur de la puissance maximale transférée sur des distances de 1 m ($M \sim 10^{-6}$ H), 3 m ($M \sim 10^{-7}$ H) et 10 m ($M \sim 10^{-9}$ H). Conclure sur la pertinence de ce système pour alimenter un drone.

Pour aller plus loin

Exercice 4 – Bétratron

Une particule de masse m et de charge q est plongée dans un champ magnétique à symétrie cylindrique $\vec{B} = B(r) f(t) \vec{u}_z$. La fonction $f(t)$ évolue conformément au graphe de la figure 7 avec $\tau \approx 1$ ms. À l'instant $t = 0$, la particule est en mouvement uniforme à vitesse v_0 sur une trajectoire circulaire d'axe Oz et de rayon $R \approx 10$ cm. On cherche à déterminer une condition sur la fonction $B(r)$ pour que la particule reste sur la même trajectoire circulaire pour les instants $t > 0$ en ayant acquis un surcroît de vitesse.

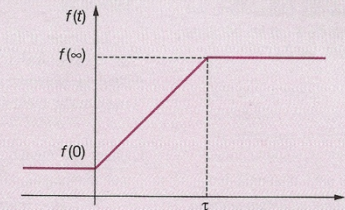


Figure 7

a) Le champ magnétique \vec{B} crée un champ électrique \vec{E} . Justifier qu'on peut se placer dans l'ARQS et écrire les équations locales dont est solution \vec{E} sachant que $\rho = 0$ en tout point. En déduire par une analogie magnétostatique qu'on doit chercher un champ électrique de la forme $\vec{E} = E_\theta(r, t) \vec{u}_\theta$. En utilisant la loi de Faraday sur un contour bien choisi, montrer que :

$$E_\theta(R, t) = -\frac{f(t)}{R} \int_0^R r B(r) dr.$$

b) Exprimer la vitesse v et l'accélération tangentielle dv/dt de la particule à l'instant t . En déduire la condition :

$$R^2 B(R) = \int_0^R r B(r) dr.$$

c) Un champ magnétique uniforme convient-il ? Le dispositif peut-il convenir pour toutes les particules chargées ? À quelle(s) contrainte(s) doit satisfaire la fonction $f(t)$? Comment opérer pour imposer $f(t)$?

Exercice 5 – Détection de véhicules par boucle inductive

Extrait CS 2007 PSI

Partie III - Modification de l'inductance de la boucle enterrée lors du passage d'un véhicule

III.A - Champ magnétique créé par un fil infini

On considère un fil cylindrique infini d'axe Oz (de vecteur unitaire \vec{u}_z), de rayon ε parcouru par un courant $I > 0$ dirigé vers les z croissants. On suppose que la répartition de courant sur une section du fil est uniforme. On note \vec{j}_1 le vecteur densité volumique de courant à l'intérieur du fil.

III.A.1) Exprimer \vec{j}_1 en fonction de I , ε et \vec{u}_z .

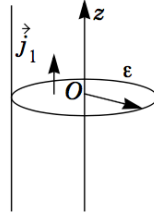
On utilise les coordonnées cylindriques : un point M de l'espace est repéré par ses coordonnées (r, θ, z) . La base orthonormée associée s'écrit $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$.

III.A.2) À l'aide des symétries, donner la direction du champ magnétique $\vec{B}_1(M)$ créé en un point M quelconque de l'espace. De quelles coordonnées sa norme est-elle indépendante (justifier la réponse) ?

III.A.3) Calculer $\vec{B}_1(M)$ pour un point M situé à l'extérieur du fil à une distance $r > \varepsilon$ du centre de celui-ci en fonction de I et r .

III.A.4) Calculer $\vec{B}_1(M)$ pour un point M situé à l'intérieur du fil à une distance $r < \varepsilon$ du centre de celui-ci en fonction de I , ε et r .

III.A.5) Donner l'allure de $|\vec{B}_1(M)|$ en fonction de r .



III.B - Inductance linéique de deux fils infinis parallèles

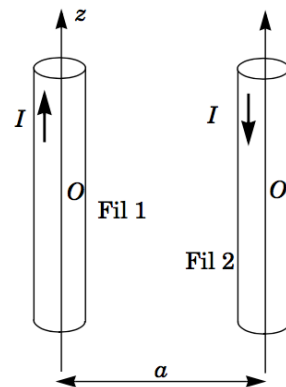
On ajoute au fil étudié dans la question précédente (noté fil 1) un deuxième fil (noté fil 2) infini d'axe $O'z$ parallèle à Oz , de même rayon, mais parcouru par un courant I dirigé dans le sens opposé au premier fil.

On note $OO' = a$ la distance entre les deux fils. On suppose les deux fils très éloignés l'un de l'autre de sorte que $a \gg \varepsilon$. L'expression de l'inductance L du circuit constitué par ces deux fils peut être déduite en calculant de deux manières différentes l'énergie magnétique E_m que possède le circuit.

III.B.1) Exprimer E_m en fonction de L et I .

III.B.2) Rappeler l'expression de la densité volumique d'énergie magnétique et écrire la formule générique de E_m en fonction de $\vec{B}(M)$.

Ce dernier calcul est très fastidieux.



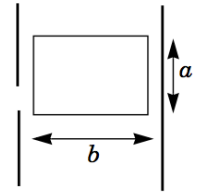
Il conduit à l'expression suivante pour l'énergie magnétique linéique dE_m/dz du système constitué par les deux fils :

$$\frac{dE_m}{dz} = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi} \left(1 + 4 \ln\left(\frac{a}{\varepsilon}\right) \right).$$

III.B.3) Déterminer l'inductance linéique L_{lin} du système constitué par les deux fils.

III.C - Inductance de la boucle enterrée

En général, la boucle enterrée dans la chaussée est de forme rectangulaire, de longueur b (en travers de la voie) et de largeur a . La longueur b correspond à peu de choses près à la largeur d'un véhicule. La figure ci-contre illustre la route vue de dessus où la boucle est sur la voie de circulation de droite. La boucle est constituée d'un fil conducteur à section circulaire de rayon $\varepsilon \ll a$ et b .



III.C.1) À partir des résultats de la section précédente et en supposant que $b \gg a$, calculer l'inductance L_1 de la boucle (on supposera que la perméabilité magnétique du macadam peut être assimilée à celle du vide).

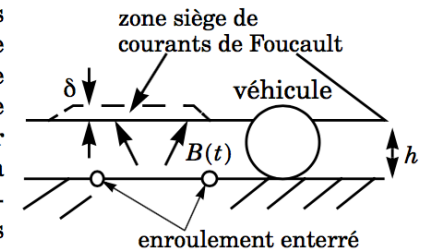
En pratique, la boucle est un enroulement de N tours de fils (c'est-à-dire N spires), $N > 1$ pour assurer une meilleure stabilité du système de détection (en augmentant notamment la valeur de Q introduit au I.C). On note L l'inductance de la boucle pour N tours.

III.C.2) Déterminer l'expression de L en fonction de N et de L_1 .

III.C.3) Donner la valeur numérique de L pour $\varepsilon = 1 \text{ mm}$, $a = 0,5 \text{ m}$, $b = 2 \text{ m}$ et $N = 5$. Que dire de la validité du calcul ?

III.D - Effet du passage d'un véhicule

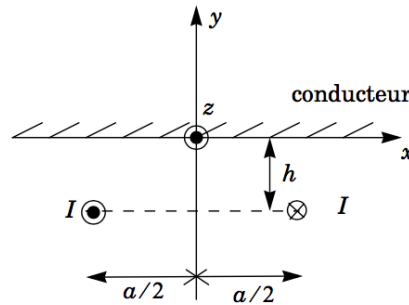
Lorsqu'un véhicule se place juste au-dessus du détecteur, le dessous de la carrosse métallique, subissant le champ magnétique variable créé par l'enroulement, est le siège de courants de Foucault sur une épaisseur de l'ordre de δ , grandeur introduite dans la Partie II. La figure, qui est une coupe de profil, illustre ce phénomène. Ces courants induits vont à leur tour créer un champ magnétique qui va engendrer un flux à travers l'enroulement. Ce phénomène d'induction a pour effet de faire varier l'inductance de la boucle enterrée. L'objet



de cette section est de quantifier cette variation d'inductance ainsi que l'augmentation de la résistance due aux pertes par effet Joule dans la carcasse métallique. Sauf avis contraire, on se place dans le cas où la boucle enterrée n'est constituée que d'un seul enroulement ($N = 1$).

On note h la distance entre le bas de la voiture et le sol (on néglige la profondeur d'enfouissement de l'enroulement). Compte tenu de la faible valeur numérique de δ par rapport à h pour les fréquences utilisées dans les détecteurs à boucle inductive (cf. Partie II), les courants induits, que l'on notera \vec{J}_s , peuvent être considérés dans un premier temps comme surfaciques.

Pour simplifier l'étude analytique, on se place dans le cas où $b \gg a$, c'est-à-dire que l'enroulement est assimilable à deux fils infinis de rayon ϵ négligeable, distants de a et parcourus par deux courants de même intensité I mais de sens opposés. Par ailleurs, on suppose que la carcasse métallique du véhicule, assimilable à un conducteur parfait, occupe tout le demi-espace $y > 0$. La nappe de courants induits à la surface est donc dans le plan $y = 0$. La figure ci-contre synthétise la modélisation (appelée « problème A ») (le sol, assimilé à du vide, n'apparaît plus).



III.D.1)

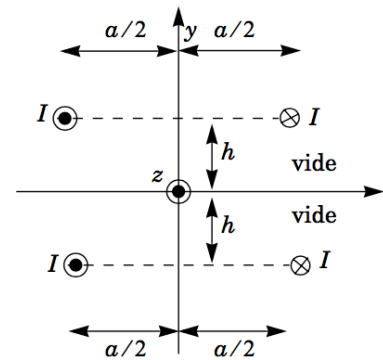
- Que peut-on dire de la direction du champ magnétique dans le vide, en des points infiniment proches de la surface du conducteur parfait ?
- Écrire la relation de passage en $y = 0$ reliant \vec{J}_s et $\vec{B}(y = 0^-)$. Comparer au résultat de la question II.C.2 c). On prendra garde au changement de direction de propagation.

On se propose de trouver un problème magnétostatique équivalent, c'est-à-dire de trouver une distribution de courant simple qui crée le même champ magnétique que les courants induits sous le véhicule $\vec{J}_s(x)$. On remplace pour cela le conducteur occupant le demi-espace $y > 0$ par deux fils infinis symétriques (problème C) ou antisymétriques (problème D) par rapport au plan $y = 0$ des deux fils représentant la boucle enterrée.

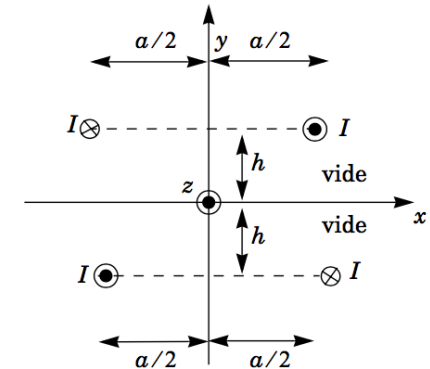
Un seul des deux problèmes respecte la bonne condition-limite imposée en $y = 0^-$, pour que le champ magnétique créé par l'ensemble des courants coïncide dans le demi-espace $y < 0$ avec celui du problème A.

c) À l'aide du résultat de la question III.D.1-a), préciser quel problème (C ou D) est équivalent pour $y < 0$ au problème A.

Problème C proposé :



Problème D proposé :



d) En utilisant les résultats des questions III.A.3 et III.D.1-b), montrer que :

$$\vec{J}_s(x) = \frac{Ih}{\pi} \left(\frac{1}{h^2 + \left(x - \frac{a}{2}\right)^2} - \frac{1}{h^2 + \left(x + \frac{a}{2}\right)^2} \right) \vec{u}_z.$$

Comme il a été vu à la Partie II, les courants de Foucault ne sont pas rigoureusement surfaciques mais volumiques. Pour simplifier l'étude, on suppose que ceux-ci sont uniformes sur l'épaisseur δ . Le vecteur densité de courant volumique $\vec{j}(x)$ représentant ces courants vaut ainsi $\vec{J}_s(x)/\delta$. On note γ_0 la conductivité électrique du métal constituant le dessous du véhicule.

III.D.2)

a) Montrer que la puissance dissipée par effet Joule par unité de longueur selon Oz sur l'ensemble de la carcasse peut s'écrire :

$$P_{lin} = \frac{1}{\gamma_0 \delta} \int_{-\infty}^{+\infty} J_s^2(x) dx.$$

b) En déduire que les pertes par effet Joule $P_{véh}$ issues des courants de Foucault sous le véhicule s'écrivent $P_{véh} = R_{véh} I^2$. Donner l'expression de $R_{véh}$ en fonction de γ_0 , δ , h , b et a . On rappelle que la boucle a une longueur selon Oz égale à b , correspondant approximativement à la largeur du véhicule.

On donne :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{1 + (u - k)^2} - \frac{1}{1 + (u + k)^2} \right)^2 du = \frac{\pi}{1 + 1/k^2}.$$

c) On reprend les valeurs numériques du III.C.3. De plus, on donne $\delta = 1 \text{ mm}$, $\gamma_0 = 10^7 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$, $h = 0,2 \text{ m}$. Préciser la valeur de $R_{\text{véh}}$. La comparer à la résistance R de la boucle enterrée (faite en fil de cuivre) dont on donnera l'expression littérale en fonction de la conductivité du cuivre γ_{Cu} , de la longueur b et du rayon ϵ du fil (on rappelle que $b \gg a$ dans le modèle) puis sa valeur numérique (on donne $\gamma_{Cu} = 6 \cdot 10^7 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$). Commenter.

III.D.3)

a) À l'aide du problème magnétostatique équivalent, montrer que la composante selon Oy du champ magnétique créé par les courants induits sous le véhicule dans le plan de la boucle enterrée $y = -h$ s'écrit :

$$B_y(x, y = -h) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\frac{x - \frac{a}{2}}{4h^2 + \left(x - \frac{a}{2}\right)^2} - \frac{\frac{a}{2} + x}{4h^2 + \left(\frac{a}{2} + x\right)^2} \right)$$

b) En déduire que le flux Φ_{lin} par unité de longueur selon Oz du champ magnétique créé par les courants induits sous le véhicule à travers le circuit filiforme constitué par les deux fils formant la boucle enterrée vaut :

$$\Phi_{lin} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln\left(1 + \left(\frac{a}{2h}\right)^2\right). \text{ On rappelle pour cela que :}$$

$$\int \frac{u}{1+u^2} du = \frac{1}{2} \ln(1+u^2) + cste.$$

c) Sachant que la boucle enterrée a une longueur b , que vaut le flux $\Phi_{\text{véh}}$ du champ magnétique créé par les courants induits sous le véhicule à travers la boucle enterrée ?

On note Φ_p le flux propre de la boucle enterrée (en l'absence de véhicule).

III.D.4)

a) Quel est le lien entre Φ_p , L et I ?

En présence du véhicule, il faut ajouter au flux propre de la boucle le flux $\Phi_{\text{véh}}$.

b) Montrer qu'en présence du véhicule, l'inductance de la boucle enterrée varie d'une quantité ΔL que l'on calculera en fonction de b , a et h . Le véhicule fait-il augmenter ou diminuer l'inductance de la boucle ?

On appelle « sensibilité » de la boucle enterrée, notée S_{boucle} , la valeur absolue de la variation relative d'inductance $|\Delta L/L|$ due à la présence d'un véhicule au dessus d'elle.

c) Donner la valeur numérique de S_{boucle} pour $\epsilon = 1 \text{ mm}$, $a = 0,5 \text{ m}$ et $h = 0,2 \text{ m}$ (on rappelle que $N = 1$).

d) On considère maintenant une boucle constituée de N tours. Le rapport $|\Delta L/L|$ dépend-il de N ? Augmenter le nombre de tours améliore-t-il la sensibilité de la boucle inductive ?

Partie IV - Étude du fréquencesmètre

Les fréquencesmètres actuels sont majoritairement numériques. Cette partie étudie le fonctionnement d'un fréquencesmètre de type analogique qui va permettre de mesurer les variations de fréquence de l'oscillateur dues à la présence d'un véhicule au dessus de la boucle enterrée permettant ainsi sa détection. Pour l'ensemble des chronogrammes demandés, il est recommandé de faire figurer les éléments qui vous semblent importants (valeurs particulières, tangentes...).

IV.A - Étude d'une cellule $R'C'V_0$

On considère le montage de la figure 3, où V_0 symbolise un générateur de tension continue. On suppose nul le courant de sortie i_s .

IV.A.1) Déterminer l'équation différentielle reliant $e'(t)$ et $V(t)$.

On s'intéresse à la réponse à une discontinuité de tension : $e'(t) = +E$ pour $t < 0$, $e'(t) = -E$ pour $t > 0$. On suppose que $E > V_0/2$ et l'on se place en régime permanent pour $t < 0$.

IV.A.2) Que vaut $V(t)$ pour $t < 0$? Que vaut $V(t = 0^+)$ (on précisera également son signe) ?

IV.A.3) Déterminer pour $t > 0$ l'expression du signal de sortie $V(t)$ de la cellule $R'C'V_0$ attaquée par cette discontinuité de tension.

IV.A.4) Dessiner sur un même graphe les évolutions de $e'(t)$ et $V(t)$.

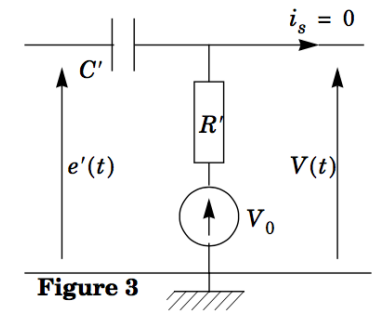


Figure 3

IV.B - Étude du module d'entrée du fréquencesmètre

On considère le module d'entrée du fréquencesmètre représenté sur la figure 4. Il est attaqué par un signal sinusoïdal $e(t)$ de fréquence f , avec $f \ll 1/(R'C')$. Par ailleurs, la tension continue du générateur est réglée telle que $0 < V_0 < 2V_{sat}$. Dessiner sur un même graphe les

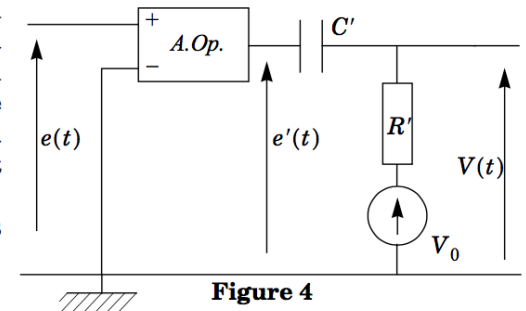


Figure 4