TD – boc 1 – Transport électrique

1. Modèle de Drude et probabilité de collision (20 min)

On propose ici de rendre compte de certains aspects du phénomène de
dans les métaux. On considère le modèle suivant :

- La conduction est assurée par des électrons mobiles, de masse m
électrons par unité de volume.
- Ces électrons subissent des chocs sur les impuretés ou les imperf
tallin du matériau. Ces chocs interviennent de manière complète
électron ayant une probabilité $\frac{dt}{\tau}$ de subir un choc pendant un i
indépendamment des chocs antérieurs.
- Les chocs modifient complètement les vitesses des électrons : a
tron se retrouve avec une vitesse $\vec{v}_a$ d'orientation et de module
- Entre deux chocs, le mouvement de l'électron est celui d'une par

1. Quelle est la probabilité pour qu'un électron ne subisse pas de ch
et $t + dt$? Soit $P(t)$ la probabilité pour qu'un électron ne subisse
instant origine après un choc ($t = 0$) et l'instant t. Montrer que P
2. En déduire l'expression de la durée moyenne de l'intervalle de
chocs.
3. Les électrons libres du matériau sont soumis à un champ électriqu
$\vec{E}$. Calculer la valeur moyenne de leur vitesse à un instant quelc
densité de courant $\vec{j}$ qui apparait, en régime permanent. Don
conductivité σ du matériau.
4. L'accroissement d'énergie cinétique ΔE_c dû au champ $\vec{E}$ entre
modifie l'énergie interne du conducteur et peut être dissipée so
thermique. Exprimer la valeur moyenne $\langle \Delta E_c \rangle$ en fonction de e,
l'expression de la puissance p dissipée par unité de volume du co
de σ et E.

2. Bilan d'énergie cinétique et effet Joule pour des particules chargées en mouvement de rotation (20 min)

-> Le galvanomètre balistique de Tolman et Stewart

Pour déterminer la nature des porteurs de charge dans un métal, Tolman et Stewart ont réalisé une expérience originale (R.C. Tolman and T.D. Stewart, Phys. Rev. **8**, 97 (1916); Phys. Rev. 9, 164 (1917)). Un fil métallique est bobiné (n tours) sur un mandrin cylindrique de rayon r d'axe Oz et connecté à un galvanomètre balistique qui mesure la charge électrique Q (Figure 14.17). Le mandrin est en rotation, dans le référentiel du laboratoire, autour de Oz à vitesse constante $\vec{\omega}_0$. Le système est placé dans un dispositif permettant de compenser le champ magnétique terrestre. Lorsque l'on freine brusquement la bobine, un courant est induit par le mouvement inertiel des porteurs de charge. Le galvanomètre balistique mesure alors la charge totale Q qui transite dans la bobine. Tolman et Stewart en déduisent ainsi le rapport $\frac{q}{m}$ des porteurs de charge.

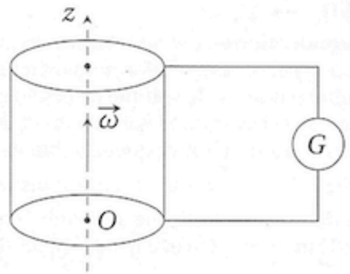


Figure 14.17. Expérience de Tolman et Stewart.

1. En considérant que les porteurs de charge de masse m sont au nombre de N par tour de fil, déterminer l'énergie cinétique initiale de l'ensemble des porteurs dans le référentiel du laboratoire.
2. Quelle est l'énergie cinétique à un instant t de la phase de freinage? En déduire la variation élémentaire d'énergie cinétique quand la vitesse passe de ω à $\omega + d\omega$.
3. Quel courant $I(t)$ correspond, pour un observateur extérieur, au mouvement des porteurs à la vitesse angulaire ωà l'instant t ?
4. On admet que la variation d'énergie cinétique par passage de la vitesse de ω à $\omega + d\omega$, est convertie en énergie dissipée par effet Joule. La bobine a une résistance R. Montrer que :

$$\frac{q}{m} = \frac{2\pi r^2 n \omega_0}{RQ}.$$

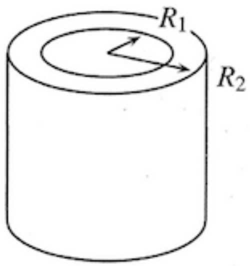
Dans les conditions de l'expérience, on a : $R = 40\,\Omega$, $r = 12{,}3\,\text{cm}$, $l = 2\pi n r = 466{,}5\,\text{m}$.
Le mandrin tourne à 5000 tours par minute et on mesure une charge $Q = 4{,}22 \cdot 10^{-9}\,\text{C}$.
Calculer $\frac{q}{m}$. On donne pour l'électron : $q = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\text{C}$ et $m = 9{,}11 \cdot 10^{-31}\,\text{kg}$.

Résistance et magnétorésistance

3. Résistance d'une couronne cylindrique (10 min)

18.1 Résistance d'un couronne cylindrique ($\star$)

Une résistance électrique cylindrique est constituée d'un matériau ohmique de conductivité γ, qui occupe l'espace compris entre les rayons R_1 et R_2, sur une hauteur h. Le cylindre intérieur, de rayon R_1, est porté au potentiel V_1 ; celui de rayon R_2 au potentiel V_2. On se place en régime établi.

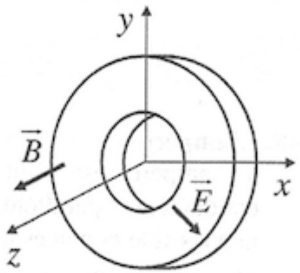


1. Pourquoi le vecteur densité de courant $\vec{j}$ est-il à flux conservatif ?

2. Établir l'expression de la résistance électrique de la couronne cylindrique.

4. Magnétorésistance – question de raisonnement (10 min)

Un disque conducteur a la forme d'une couronne comprise entre deux cylindres de même axe.
On maintient entre les deux cylindres une différence de potentiel constante imposant au champ électrique $\vec{E}$ une direction purement radiale.
Un champ magnétique $\vec{B}$, uniforme et permanent, est perpendiculaire à la couronne.
Analyser la situation, et montrer que si le champ $\vec{E}$ reste radial après introduction de $\vec{B}$, il n'en est pas de même de la densité de courant $\vec{j}$. Que peut-on prévoir qualitativement de l'effet du champ magnétique sur la résistance du disque ?



5. Magnétorésistance d'après Mines (40 min)

On considère un conducteur électrique se présentant sous la forme d'une couronne cylindrique d'axe (Oz), de hauteur h, délimitée par un cylindre intérieur de rayon r_1 et par un cylindre extérieur de rayon r_2. À l'aide d'une source de tension on impose les potentiels $V(r_1) = V_1$ et $V(r_2) = V_2$. On se place en régime permanent et on néglige les effets de bord, ce qui revient à supposer que le comportement de cette couronne est le même que si elle était infiniment haute. L'existence de deux équipotentielles cylindriques permet d'émettre l'hypothèse que le potentiel ne dépend que de r, $V = V(r)$ ainsi $\Delta V(r) = \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}\right)$.

1. Le conducteur est globalement non chargé, vérifier que l'hypothèse $V = V(r)$ seule possible. Déterminer le potentiel électrique en un point M de ce conducteur. En déduire l'intensité E du champ électrique $\vec{E}$ en ce même point en fonction de V_1, V_2, r_1, r_2 et r.
La couronne cylindrique est placée dans un champ magnétique $\vec{B} = B\vec{u_z}$ avec $B > 0$. Le conducteur contient n électrons libres par m^3. On considère de plus le modèle de Drude, dans lequel chaque électron de vitesse $\vec{v}$ est soumis, en plus des forces électromagnétiques, à une force phénoménologique de frottement s'exprimant sous la forme $\vec{F} = -\lambda\vec{v}$ avec $\lambda > 0$.

2. Quelles sont les unités de λ ? Connaissez-vous une expression de λ ? Si oui, la préciser en expliquant la signification de chaque terme qui intervient dans la formule.

3. Pour chaque électron, établir, en régime permanent, la relation entre $\vec{v}$, $\vec{B}$ et $\vec{E}$, paramétrée par λ et la charge élémentaire e. En déduire l'expression, dans la base cylindrique $(\vec{u_r}, \vec{u_\theta}, \vec{u_z})$, des coordonnées de $\vec{v}$ en fonction de e, λ, E et B, puis celles du vecteur densité de courant électrique $\vec{j}$.

4. Exprimer l'intensité du courant électrique traversant une surface équipotentielle de rayon r. En déduire la résistance électrique R de la couronne, en fonction de e, n, λ, B, h, r_1 et r_2.
On note R_0 la résistance en l'absence de champ magnétique. Exprimer l'écart relatif $\varepsilon = \frac{R-R_0}{R_0}$ en fonction de e, B et λ. Calculer la valeur numérique de R_0 ainsi que celle de ε pour $B = 1{,}0$ mT, $r_1 = 1{,}0$ mm, $r_2 = 3{,}0$ mm, $h = 1{,}0$ mm, $n = 1{,}1.10^{21}$ m^{-3} et $\lambda = 1{,}8.10^{-17}$ USI.
Commenter l'utilisation du phénomène pour la mesure de champs magnétiques.

Equation de Maxwell $div\,\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ et $div(\overrightarrow{grad}\,A(M)) = \Delta A(M)$ avec A(M) grandeur scalaire dépendant de la position M et $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V)$ en régime stationnaire

6. Potentiomètre et cellule de Hall (30 min)

1) Une résistance est classée selon sa puissance nominale P_n. Pour $P_n < 1\,\mathrm{W}$, c'est un manchon cylindrique en céramique enrobé d'un film de carbone, dont les connecteurs sont des capsules de nickel. Pour $P_n > 1\,\mathrm{W}$, c'est un fil résistant enroulé. Avec du cuivre électrolytique très pur, on fabrique des fils ultra-fins d'un diamètre compris entre $10\,\mu m$ et $500\,\mu m$ isolés par une couche isolante d'émail thermo-adhésif.
Un potentiomètre Amico 3590S-2-104L de $100\,\mathrm{k}\Omega$ est un fil enroulé autour d'un arbre permettant, par sa rotation, de faire varier la résistance entre une borne fixe et une borne mobile. Il est utilisé dans des systèmes de réglage de minuterie, de température ou de vitesse. Sa plaque signalétique donne :

résistance	$100\,\mathrm{k}\Omega$
diamètre de l'arbre	6 mm
longueur hors tout	25 cm
densité de courant maximale (avant grillage)	$5\,\mathrm{A}\cdot\mathrm{mm}^{-2}$
tension nominale à la résistance maximale	500 V

a) Calculer, à résistance maximale et tension nominale, l'intensité du courant qui traverse le potentiomètre.

b) Quel diamètre d de fil faut-il prévoir et quelle est la longueur l du fil enroulé ? Combien y a-t-il de tours de fil autour de l'arbre ?

c) Dans le modèle de friction de Drude de coefficient h, en supposant qu'un électron est libéré par atome de cuivre pour la conduction, évaluer à tension nominale et résistance maximale, la vitesse statistique des électrons, le champ électrique et le coefficient h. Quel champ néglige-t-on ?

2) Une plaquette parallélépipédique (P) (figure 1) en silicium dopé N par des atomes de phosphore pentavalents, a une section rectangulaire de côtés a (selon Oy) et b (selon Ox) et une longueur l (selon Oz). Les sections parallèles à Oxy situées en $z = 0$ et $z = l$ sont deux électrodes recouvertes d'un métal très conducteur. Dans l'axe Oz, par le biais des électrodes, on la soumet à une différence de potentiel u, ce qui fait circuler un courant I dans le sens de Oz, essentiellement dû à des électrons pseudo-libres. Dans le silicium dopé N, la densité des électrons pseudo-libres est $n \approx 10^{22}\ \mathrm{m}^{-3}$.

a) En négligeant le champ magnétique, exprimer la résistance R de (P), la vitesse statistique des électrons de conduction, le champ électrique E et le coefficient h' de Drude.

b) On amène (P) dans une zone de champ magnétique $\vec{B} = B\vec{e_x}$ constant et intense. Montrer qu'en régime transitoire, des charges de surface s'accumulent progressivement sur les faces (1) et (2) de (P) parallèles à Oxz et en préciser les signes.

c) Justifier qu'il apparaît alors un champ électrique transverse $\vec{E}_H = E_H\,\vec{e_y}$ (de Hall) qui s'oppose à l'hémorragie des charges. L'exprimer en régime permanent. En déduire la différence de potentiel u_{12} existant entre les faces (1) et (2) en régime permanent.

d) On donne $u = 1\,\mathrm{V}$, $l = 1\,\mathrm{cm}$, $a = b = 5\,\mathrm{mm}$, $u_{12} = -0.2\,\mu\mathrm{V}$. Calculer le champ magnétique. Adjoint à un système de capture de $|\ u_{12}\ |$, à quoi sert ce dispositif ?

Données

conductivité du cuivre : $\sigma = 5.80 \times 10^{7}\ \mathrm{S\cdot m^{-1}}$

conductivité du silicium : $\sigma' = 2.52 \times 10^{-4}\ \mathrm{S\cdot m^{-1}}$

masse atomique du cuivre : $M_{cu} = 63.546\ \mathrm{g\cdot mol^{-1}}$

masse volumique du cuivre : $\rho = 8900\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$

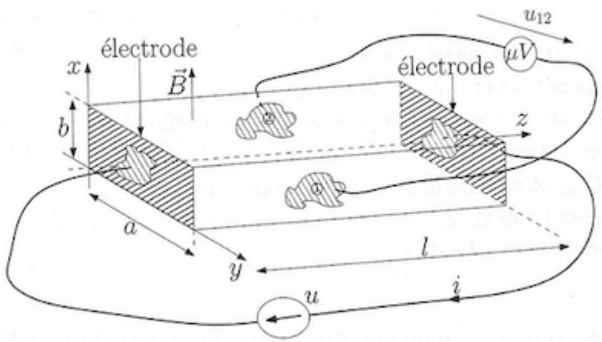


FIGURE 1 – Plaquette semi-conductrice de Hall

7. Diode à vide d'après Mines (40 min)

Les diodes à vide ont été les premières diodes réalisées au début du XX^e siècle. Elles commandent un flux d'électrons. Une diode à vide est formée de deux électrodes planes parallèles, la cathode C et l'anode A, de surface S et séparées d'une distance d. La cathode est maintenue à un potentiel nul ($V_C = 0$) mais elle est chauffée par un dispositif non précisé ici. Par effet thermoélectronique, celle-ci libère des électrons ayant une vitesse faible (considérée comme nulle dans la suite). Ces électrons sont dirigés vers l'anode qui est portée au potentiel $V_A > 0$. On admet que les lignes de courant ainsi créées sont perpendiculaires aux deux plaques. La zone située entre les électrodes contient donc des électrons qui ont été émis sans vitesse initiale par la cathode.

On néglige tout effet de bord et on ne s'intéresse qu'à l'espace inter-électrodes dans lequel on considère que la charge volumique ρ, le potentiel V, la vitesse des électrons v et l'intensité électrique I traversant une surface parallèle aux électrodes ne sont des fonctions que de la seule variable x indiquant la distance à la cathode. L'ensemble est sous vide dans une ampoule de verre. On négligera le poids des électrons devant la force électrique.

Données :

Masse de l'électron	$m = 9{,}1\cdot 10^{-31}\ \mathrm{kg}$
Charge élémentaire	$e = 1{,}6\cdot 10^{-19}\ \mathrm{C}$
Permittivité diélectrique du vide	$\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot 10^{-12}\ \mathrm{F\cdot m^{-1}}$

1. Écrire l'équation liant le potentiel $V(x)$ et la densité de charge $\rho(x)$ dans l'espace inter-électrodes.
2. Établir l'expression de la vitesse $\vec{v}(x)$ des électrons dans la zone inter-électrodes en fonction du potentiel $V(x)$ et des caractéristiques de l'électron.
3. En déduire l'expression de l'intensité $I(x)$ du courant électrique traversant une surface d'aire S située à une distance $x < d$ de la cathode et parallèle à celle-ci. Exprimer le résultat en fonction de la densité de charge $\rho(x)$, de la norme de la vitesse des électrons $v(x)$ et de S.
4. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par le potentiel $V(x)$ dans la zone inter-électrodes. On fera apparaître le paramètre positif
$$\alpha = \frac{I}{\varepsilon_0 S}\sqrt{\frac{m}{2e}}.$$
5. Résoudre l'équation et déterminer l'expression de $V(x)$.
6. En déduire la relation entre l'intensité I et le potentiel V_A de l'anode. Expliquer physiquement ce qui se passe lorsque cette relation n'est pas valable. Que vaut I dans ce cas ?
7. Tracer l'allure de la caractéristique $I = f(V_A)$ de la diode. Une diode à vide a pour caractéristiques $d = 3{,}00\,\mathrm{mm}$ et $S = 3{,}00\,\mathrm{cm}^2$. Indiquer l'ordonnée du point d'abscisse $V_A = 10{,}0\,\mathrm{V}$ sur le graphe.