

# TD – boc 1 – Transport électrique

## Retour sur l'équation tridimensionnelle de conservation de la charge

-> manipulation des outils mathématiques

Extrait du programme : *outils mathématiques*

Le thème « analyse vectorielle » prolonge l'étude de l'outil « gradient » abordée en PCSI en introduisant de nouveaux opérateurs : seules leurs expressions en coordonnées cartésiennes sont exigibles. Toutes les autres formules utiles (expressions en coordonnées cylindriques ou sphériques, actions sur des produits, combinaisons d'opérateurs, etc.) doivent être fournies.

Notions et contenus	Capacités exigibles
<b>2. Analyse vectorielle</b>	
a) gradient	Relier le gradient à la différentielle d'un champ scalaire à t fixé. Exprimer les composantes du gradient en coordonnées cartésiennes.
b) divergence	Citer et utiliser le théorème d'Ostrogradski. Exprimer la divergence en coordonnées cartésiennes.

### 1. Equation locale de conservation en coordonnées cartésiennes

**Compétences** : réaliser des bilans sous forme globale et locale

On considère un conducteur ohmique, constitué par un seul type de porteur de charge avec une densité de charge  $\rho(M,t)$ , et un vecteur densité de courant  $\vec{j}(M,t)$ . En raisonnant sur un élément de volume  $dV = dx dy dz$  de ce conducteur, centré en  $M(x,y,z)$ , réaliser un schéma clair de la situation, et établir l'équation de conservation de la charge à 3D en effectuant un bilan local de charges. Utiliser finalement l'opérateur divergence pour simplifier l'expression de ce bilan.

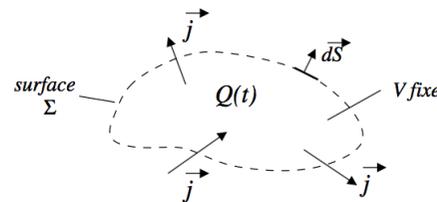
On rappelle ici que l'expression de la divergence d'un vecteur  $\vec{A}$  en coordonnées cartésiennes :

$$\vec{A} = A_x \vec{e}_x + A_y \vec{e}_y + A_z \vec{e}_z$$

$$\text{div } \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

### 2. Expression intégrale de la conservation de la charge

Considérons un volume  $V$  fixe de conducteur, délimité par une surface  $\Sigma$



fermée et orientée vers l'extérieur, et contenant une charge  $Q$ . La variation de la charge au cours du temps est associée au flux du vecteur densité de courant  $\vec{j}(M,t)$  à travers cette surface.

2.1 Exprimer la taux de variation de charge  $\frac{\delta Q}{\delta t}$  entre  $t$  et  $t+dt$  de ce volume  $V$ , en exploitant la densité de charge locale  $\rho(M,t)$ ,

2.2 Réaliser un bilan de charge pour ce volume fermé pour exprimer le taux de variation de charge en exploitant le vecteur densité de courant.

2.3 Exploiter le théorème d'Ostrogradski pour retrouver l'équation locale de conservation :  $\boxed{\text{div } \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0}$

Le théorème d'Ostrogradski stipule que pour toute surface fermée  $S$  délimitant un volume  $V$  :

$$\oiint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \text{div } \vec{A} \, dV$$

Le flux du vecteur  $\vec{A}$  est nécessairement un flux sortant avec une normale de la surface élémentaire  $d\vec{S}$  orientée vers l'extérieur.

### 3. Conservation de la charge en géométrie sphérique

-> manipulation de l'opérateur divergence en coordonnées sphériques

3. On examine un problème à symétrie sphérique (isotrope), dans lequel les grandeurs ne dépendent que de la distance  $r$  à un point  $O$ , choisi comme origine du repère.

3.1 La densité de courant est de la forme  $\vec{j} = j(r,t) \vec{u}_r$ . Exprimer l'intensité du courant électrique sortant de la sphère de centre  $O$  et de rayon  $r$ .

3.2 On considère le volume (calotte sphérique) compris entre les sphères de rayon  $r$  et  $r+dr$ , réaliser un schéma paramétré, et exprimer la quantité de charge contenue  $\delta q$  dans ce volume, à l'instant  $t$ , en fonction de la densité  $\rho(r,t)$ .

3.3 Effectuer un bilan des charges entre  $t$  et  $t+dt$  sur cette élément de volume, pour déterminer l'équation locale de conservation liant  $\frac{\partial \rho}{\partial t}$  et  $\frac{\partial(jr^2)}{\partial r}$

3.4

On rappelle ici que l'expression de la divergence d'un vecteur  $\vec{A}$  en coordonnées sphériques :

$$\vec{A} = A_r \vec{e}_r + A_\theta \vec{e}_\theta + A_\phi \vec{e}_\phi$$

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$$

Retrouver l'équation de conservation de la charge en exploitant l'expression de la divergence, et les résultats généraux du cours.

3.5 En régime stationnaire, exprimer la dépendance en  $r$  de  $j(r)$ .

3.6 Dans ce régime, donner la relation liant  $I$  l'intensité sortant de la sphère et  $j(r)$ .

Donner alors l'expression complète de  $\vec{j}(r)$ .

### Application à la protection contre la foudre : prise de terre adaptée de CCP PSI 2015

L'impact direct de la foudre (fig 6) sur une ligne électrique ou une ligne téléphonique génère une onde qui se propage dans les deux sens. Le courant de foudre peut atteindre 50 000 A et générer une onde de tension supérieure à  $10^6$  V. Il convient de dévier le courant de foudre vers la Terre de façon à ne pas laisser se propager des ondes de tension qui pourraient endommager les appareils électriques des usagers.

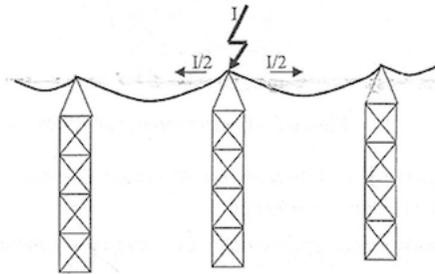
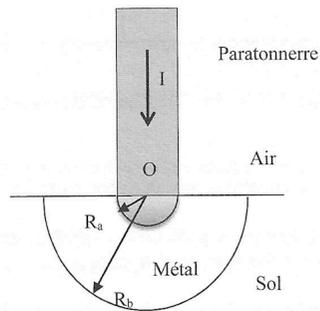


Figure 6 - Impact direct sur une ligne électrique

Une prise de Terre (ci-dessous) est constituée d'une coque hémisphérique métallique de centre  $O$ , de rayon intérieur  $R_a$  et de rayon extérieur  $R_b$ . On note  $\gamma_{\text{mét}}$  la conductivité du métal. Cette prise est enfoncée dans le sol, assimilé à un  $\frac{1}{2}$  espace  $z < 0$ , de conductivité électrique  $\gamma_{\text{sol}}$ .

La prise de Terre se décompose ainsi en deux résistances hémisphériques  $R_{\text{mét}}$  et  $R_{\text{sol}}$ , l'une en métal de rayon intérieur  $R_a$  et de rayon extérieur  $R_b$ , l'autre associée au sol de rayon intérieur  $R_b$  et de rayon extérieur infini.

Elle est destinée à recevoir un courant  $I$  provenant d'un paratonnerre. Il sera



3 - Modèle simplifié d'une prise de terre

supposé indépendant du temps et descendant.

On suppose que le courant qui traverse la prise de terre est radial, de densité  $\vec{j} = j(r) \vec{u}_r$  en coordonnées sphériques et régime stationnaire.

Même si la durée de la foudre est brève, elle est suffisamment longue pour valider l'hypothèse de l'ARQS, et on se place dans le cadre de courants stationnaires.

3.7

a) Pour la conduction électrique dans le sol dans un premier temps, montrer que :

$$j(r) = \frac{I}{2\pi r^2}$$

b) En exploitant la relation entre champ et potentiel électrostatique  $V(r)$  qui respecte la symétrie de la situation :

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} V = -\frac{dV}{dr} \vec{u}_r, \text{ montrer que le potentiel s'exprime par } V(r) = \frac{I}{2\pi\gamma_{\text{sol}} r}$$

### Electrocution à distance

3.8 Cette répartition non uniforme du potentiel à la surface de la Terre explique le foudroiement indirect des hommes ou des animaux.

On rappelle  $R_H = 2,5 \text{ k}\Omega$  la résistance du corps humain mesurée entre ses deux pieds supposés distants de  $a = 1 \text{ m}$ . Pour ne pas être électrocuté, le corps d'un homme ne doit pas être traversé par un courant supérieur à  $I_{\text{max}} = 25 \text{ mA}$ , il doit donc rester éloigné d'une distance  $D$  de la prise de terre.

a) Réaliser un schéma paramétré de la situation puis un schéma électrique équivalent.

b) Trouver une première relation entre  $V(D+a)$ ,  $V(D)$ ,  $R_H$  et  $I_{\text{max}}$ .

c) En supposant  $D \gg a$ , montrer que  $D = \sqrt{\frac{aI}{2\pi\gamma_{\text{sol}} R_H I_{\text{max}}}}$

Réaliser l'application numérique avec  $\gamma_{\text{sol}} = 10^{-2} \text{ S.m}^{-1}$  et  $I = 5,0 \cdot 10^4 \text{ A}$ .

Ce phénomène d'électrocution à distance touche-t-il plutôt les grands animaux (vaches, chevaux...) ou les petits animaux (lapins, renards...)?

### Expression de la résistance d'une coque hémisphérique

3.9 Pour évaluer la résistance de la prise de terre, on considère une coque

hémisphérique homogène de conductivité électrique  $\gamma$ , comprise entre les rayons  $R_{\text{int}}$  et  $R_{\text{ext}}$ , parcourue par un courant radial.

On la décompose en une infinité de coques hémisphériques élémentaires comprises entre les rayons  $r$  et  $r+dr$ .

a) La loi d'Ohm permet de définir la résistance élémentaire  $dR$  :

$$dR = \frac{U}{I} = \frac{|dV|}{I} \text{ avec } dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l} \text{ (équivalent de } \vec{E} = -\operatorname{grad} V)$$

Montrer que  $dR = \frac{dr}{2\pi\gamma r^2}$

b) En déduire la résistance totale de la coque hémisphérique  $R(\Omega)$  en fonction de  $\gamma$ ,  $R_b$  et  $R_a$ .

3.10

- a) Etablir l'expression de la résistance globale de la prise de terre  $R_{\text{tot}}$  en fonction de  $\gamma_{\text{mét}}$ ,  $\gamma_{\text{sol}}$ ,  $R_a$  et  $R_b$ , en justifiant l'association de résistances considérée.
- b) Application numérique : évaluer  $R_{\text{tot}}$  pour  $R_a = 1,0 \text{ cm}$ ,  $R_b = 35 \text{ cm}$ ,  $\gamma_{\text{mét}} = 6,0 \cdot 10^7 \text{ S.m}^{-1}$ .
- c) La législation en termes de sécurité électrique impose que  $R_{\text{tot}} < 25 \Omega$ , est-ce respecté dans le cas de cette prise ? Sinon, que préconisez-vous pour remédier à ce problème ?

#### 4. Limite de validité de la loi d'Ohm et de l'effet Joule en régime variable

On s'intéresse aux mouvements des électrons de conduction d'un métal, et on se place en **régime variable avec excitation harmonique** de la forme :

$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t)$  avec  $\vec{E}_0$  l'amplitude indépendante du point M d'observation (on choisit arbitrairement une phase nulle pour le champ d'excitation). Ainsi le **champ électrique** appliqué demeure **uniforme à l'échelle des déplacements des électrons**. On prend en compte la **force de frottements du modèle de Drude** :

$\vec{F} = -\frac{m}{\tau} \vec{v}$  avec  $m$  la masse de l'électron et  $\tau$  le temps caractéristique.

En notation complexe  $\vec{E} = \mathcal{R}_e(\underline{\vec{E}})$  avec  $\underline{\vec{E}} = \vec{E}_0 e^{j\omega t}$

6.1 En appliquant le PFD à un électron mobile, exprimer sa vitesse complexe en fonction de l'amplitude du champ électrique appliqué (en l'absence de champ magnétique).

6.2 Exprimer le vecteur densité de courant complexe, et la loi d'Ohm locale en régime variable. En déduire que la conductivité se met sous la forme :  $\underline{\gamma} = \frac{\gamma_0}{1+j\omega\tau}$

Expliciter  $\gamma_0$ . A quelle grandeur typique l'identifier ?

6.3 Pour  $\omega\tau \gg 1$ , soit  $f \gg \frac{2\pi}{\tau} \approx 10^{14} \text{ Hz}$ , limite des infra-rouges, donner l'expression de la conductivité sous la forme  $\underline{\gamma} = -\gamma_{\text{HF}}(\omega) j$ .

6.4 Exprimer la puissance volumique dissipée par effet Joule.

6.5 En régime variable, on s'intéresse à la puissance moyenne (sur une période T).

Donner les expressions réelles du vecteur courant et du champ électrique pour

$f \gg \frac{2\pi}{\tau} \approx 10^{14} \text{ Hz}$ . Quelle particularité présentent-ils ?

En déduire la valeur de la puissance moyenne.

Le milieu n'est alors plus dissipatif : la puissance moyenne cédée par le champ à la matière est nulle. A cette fréquence élevée, le déplacement maximum des électrons de conduction n'est plus suffisant pour que les interactions avec le réseau aient lieu. Les électrons suivent le champ avec retard, et d'autant plus mal que la fréquence est élevée dans ce régime :  $|\underline{\gamma}| \downarrow$  si  $\omega \uparrow$

En terme de collisions, si la variation du champ électrique est bien plus rapide que le temps moyen entre deux collisions, il y a changement de sens du champ entre deux collisions successives : le mouvement d'ensemble dirigé, imposé par le champ, n'est plus possible.

6.6 Pour les fréquences industrielles, et les ondes hertziennes, quelle est la conductivité, le caractère dissipatif de la loi d'Ohm est-il valide ?

## Pour aller plus loin....

### 5. Résistivité d'un conducteur ohmique en fonction de la température

Aux températures proches de la température ambiante, la résistance électrique R d'un barreau métallique cylindrique dépend de la température T, exprimée en degrés Celsius selon une loi du premier ordre en température :

$R = R_0(1 + aT)$  avec  $a = 4 \cdot 10^{-3} \text{ USI}$

5.1 Tracer l'évolution de R en fonction de T. Que représente  $R_0$  et a ? Quelle est la dimension de a ?

5.2 Donner l'expression de la résistance R du barreau en fonction de sa longueur L, sa section S. En déduire l'expression de la résistivité  $\rho = \frac{1}{\gamma}$ .

5.3 On néglige la dilatation du barreau (dépendance de L et S avec T), comment évolue alors la résistivité en fonction de la température ?

On admet que chaque atome du métal cède un porteur de charge mobile (électron ici) et que la densité d'électrons participant à la conduction dépend très peu de la température.

5.4 On définit la mobilité comme le coefficient de proportionnalité entre la vitesse de migration des électrons et le champ électrique à l'origine de ce déplacement. Comment varie la mobilité en fonction de la température ?

5.5 On prend maintenant en compte le coefficient de dilatation  $\alpha$  du métal, défini par  $\alpha = \frac{1}{l} \frac{\partial l}{\partial T} = 10^{-5} \text{ USI}$  où l est une dimension quelconque du matériau (rayon, longueur).

a) Donner la dimension de ce coefficient. Quel est l'ordre de grandeur de la dilatation d'un barreau de 1 m soumis à une différence de température de 1 K ?

b) En exploitant la dérivée logarithmique de la résistance R, évaluer la variation relative de résistance  $dR/R$  en fonction des variations relatives de longueur  $dL/L$ , de rayon  $dr/r$  et de résistivité  $\frac{d\rho}{\rho}$ . Comparer les ordres de grandeurs de ces

variations relatives pour valider l'hypothèse d'une dilatation négligeable dans la variation de résistance en fonction de T.

## 6. Conduction électrique et effet Hall sous l'action d'un champ magnétique

### Extrait de concours Centrale TSI 2019

#### III Transferts de charges par effet Hall

Après s'être intéressé dans la partie II aux transferts thermiques dans un volume, nous allons nous intéresser maintenant aux transferts de charges dans une portion de conducteur.

**III.A** – Soit une particule ponctuelle de charge  $q$  en mouvement à la vitesse  $\vec{v}$  soumise à l'action d'un champ magnétique  $\vec{B}(M)$ . On rappelle que l'expression de la force à laquelle cette particule est soumise s'écrit  $q \vec{v} \wedge \vec{B}(M)$ .

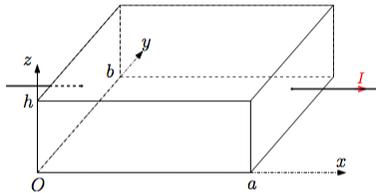


Figure 13

Soit une portion de conducteur de dimensions  $a$ ,  $b$ ,  $h$  (figure 13). Ce conducteur est inséré dans un circuit parcouru par un courant d'intensité  $I > 0$  (comme indiqué sur la figure 13).

On notera  $n$  la densité volumique de porteurs de charge et  $\vec{v}$  la vitesse d'un porteur de charge dans le volume. Les particules portent la charge  $q$  dont on ne connaît à priori pas le signe. On suppose dans un premier temps qu'il n'y a qu'un seul type de porteurs.

**Q 53.** Rappeler l'expression de  $\vec{j}$ , vecteur densité volumique de courant, en fonction de  $n$ ,  $q$  et du vecteur vitesse d'un porteur de charge.

#### III.B – Approche qualitative de l'effet Hall

**Q 54.** Si les porteurs de charges sont des électrons de charge  $q = -e$ , quel est le sens de  $\vec{j}$ ? Quel est le sens de  $\vec{v}$ ?

**Q 55.** Mêmes questions si les charges des porteurs sont positives  $q = +e$ .

On place le volume dans un champ magnétique  $\vec{B} = B_0 \vec{u}_y$  (où  $B_0 > 0$ ) supposé uniforme à l'échelle de l'échantillon.

**Q 56.** En considérant la direction et le sens de la force exercée par le champ magnétique sur un porteur de charge, expliquer en quelques mots pourquoi on voit apparaître une tension entre les faces d'équations  $z = 0$  et  $z = h$  du parallélépipède.

**Q 57.** Faire deux schémas indiquant le signe des charges apparaissant sur chaque face : dans le cas où  $q = -e$  et dans le cas où  $q = +e$ .

**Q 58.** Expliquer en pratique comment on peut simplement vérifier le signe des porteurs de charges avec un voltmètre.

#### III.C – Approche quantitative de l'effet Hall (cas des électrons porteurs)

On se place dans le cas où les charges mobiles sont des électrons, donc  $q = -e$ . On notera  $n_e$  leur densité volumique et  $\vec{v}_e$  leur vitesse.

On suppose qu'après un régime transitoire au cours duquel des charges ont commencé à s'accumuler sur l'une des faces, on atteint un régime permanent où la quantité de charges accumulées sur les faces ne varie plus, donnant lieu à la création d'un champ électrique de Hall uniforme entre les faces noté  $\vec{E}_H$ .

Par ailleurs les porteurs de charges mobiles ont repris leur mouvement d'ensemble à la vitesse  $\vec{v}_e$  uniforme et constante suivant ( $Ox$ ) l'intensité du courant électrique est toujours  $I$ .

**Q 59.** En utilisant la sous-partie III.B, expliquer quel est le sens de  $\vec{E}_H$ .

**Q 60.** Établir, en s'intéressant au mouvement d'un porteur de charge, la relation  $\vec{E}_H = -\vec{v}_e \wedge \vec{B}$ .

**Q 61.** En projetant suivant ( $Oz$ ) la relation précédente, donner l'expression de  $E_H$  en fonction de  $B_0$  et  $v_e$ ; puis en fonction de  $B_0$ ,  $e$ ,  $n_e$ ,  $I$  et des dimensions du conducteur.

**Q 62.** Exprimer  $U_H = V(z = h) - V(z = 0)$ , la tension de Hall.

#### III.D – Cas de porteurs positifs

Dans le cas de semi-conducteurs dopés  $N$ , les porteurs majoritaires sont des électrons de charge  $-e$ . Mais dans le cas de semi-conducteurs dopés  $P$ , les porteurs majoritaires sont des trous de charge  $+e$  et de densité volumique notée  $n_p$ . On notera leur vitesse  $\vec{v}_p$ .

**Q 63.** Reprendre les calculs précédents pour établir la nouvelle expression de  $U_H$  dans le cas d'un semi-conducteur dopé  $P$  en justifiant soigneusement (à l'aide d'un schéma notamment) les calculs.

#### III.E – Applications numériques

**Q 64.** Dans le cas d'un conducteur comme le cuivre, les seuls porteurs sont des électrons. On suppose que dans le cristal chaque atome de cuivre libère un électron de conduction. En utilisant les données du tableau 2, calculer la tension de Hall  $U_H$ .

Masse molaire atomique du cuivre	$M_{Cu} = 63,5 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$
Masse volumique du cuivre	$\mu_{Cu} = 8,9 \times 10^3 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$
Constante d'Avogadro	$N_a = 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Charge élémentaire	$e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$
Champ magnétique	$B_0 = 0,1 \text{ T}$
Dimensions du conducteur	$h = 5,5 \text{ mm}, a = b = 0,2 \text{ mm}$
Intensité du courant	$I = 0,1 \text{ A}$

Tableau 2 Données numériques

**Q 65.** Commenter la valeur obtenue.

**Q 66.** Reprendre le calcul pour un semi-conducteur, comme le germanium, dopé  $N$  de sorte que  $n_e = 7 \times 10^{22} \text{ m}^{-3}$ . Conclure.