

**CB Physique/Chimie – 4H**  
**PSI - Lycée du Parc des Loges Difficulté supérieure**

Calculatrices autorisées.

**IV Communication**

Il est capital de maintenir la communication entre le sous-marin et la surface où se trouve un bateau dans lequel une équipe surveille et analyse toutes les données remontées par les dizaines de capteurs permettant de s'assurer du bon fonctionnement des systèmes (batterie, propulsion, ballast, qualité de l'air dans le poste de pilotage, température...). En cas de dysfonctionnement d'un des systèmes, l'équipe de surface doit être capable d'identifier la défaillance et de proposer une solution au pilote.

Le déploiement d'un câble entre le bateau et le sous-marin n'étant pas envisageable, on propose dans la suite d'étudier deux stratégies de télécommunication : une par ondes électromagnétiques et l'autre par ondes acoustiques.

**IV.A – Communication par ondes radio dans l'eau de mer**

On admet qu'il est nécessaire de remplacer la permittivité du vide  $\epsilon_0$  par la permittivité  $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$  dans les équations de Maxwell afin de prendre en compte les propriétés de polarisation de l'eau de mer. La permittivité relative de l'eau de mer  $\epsilon_r$ , sensiblement égale à celle de l'eau, est rappelée dans les données. La perméabilité de l'eau de mer est supposée égale à celle du vide  $\mu_0$ .

On considérera que l'eau de mer se comporte comme un conducteur ohmique de conductivité  $\gamma$  dont la valeur est fournie dans les données.

**Q 16.** Énoncer la loi d'Ohm locale reliant la densité volumique de courant  $\vec{j}$ , la conductivité  $\gamma$  et le champ électrique  $\vec{E}$ .

**Q 17.** Rappeler l'équation locale de conservation de la charge et déduire que la densité volumique de charge vérifie

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\rho}{\tau} = 0$$

où on exprimera  $\tau$  en fonction de la conductivité  $\gamma$  et de la permittivité  $\epsilon$ .

**Q 18.** Évaluer numériquement  $\tau$  et en déduire que, pour des ondes de fréquence inférieure à  $f = 1,00$  MHz, on peut considérer que  $\rho = 0$ .

On envisage la propagation d'une pseudo-onde plane progressive polarisée rectilignement se propageant dans l'eau de mer vers les  $z$  croissants,  $\vec{E} = E_0 \exp(i(\omega t - kz))\vec{e}_x$  avec  $i^2 = -1$ ,  $E_0$  et  $\omega$  des constantes réelles et  $k$  une constante complexe.

**Q 19.** Écrire l'équation de Maxwell-Ampère et identifier un terme de courant de déplacement et un terme de courant de conduction. Déterminer la valeur de la pulsation  $\omega_c$  à partir de laquelle le courant de déplacement devient plus grand que le courant de conduction.

**Q 20.** On suppose  $\omega \ll \omega_c$ . Établir l'équation aux dérivées partielles vérifiée par le champ électrique  $\vec{E}$ . De quel type d'équation s'agit-il ?

**Q 21.** Exprimer le nombre d'onde complexe  $k$  en fonction de  $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}$ . Évaluer numériquement  $\delta$  pour une fréquence  $f = 1,0$  MHz.

**Q 22.** Obtenir l'expression du vecteur de Poynting  $\vec{\Pi}(z, t)$ , puis celle de sa moyenne temporelle ( $\overline{\vec{\Pi}}(z, t)$ ).

**Q 23.** Évaluer le rapport  $\frac{\|\overline{\vec{\Pi}}(z + L, t)\|}{\|\overline{\vec{\Pi}}(z, t)\|}$  pour  $L = 10$  m.

**Q 24.** Est-il réaliste d'envisager une communication par ondes électromagnétiques (de cette gamme de fréquences) entre le bateau et le sous-marin ?

**IV.B – Communication par ondes acoustiques**

**IV.B.1) Équation de propagation de l'onde acoustique**

Le système de communication retenu pour l'expédition Deepsea Challenger est basé sur la transmission d'ondes acoustiques. Il permet une communication par voix et messages textes sur des distances de plusieurs dizaines de kilomètres.

Nous modélisons dans cette partie la propagation unidirectionnelle d'une onde acoustique selon l'axe ( $Oz$ ) dans l'eau de mer considérée comme un fluide parfait de coefficient de compressibilité isentropique  $\chi_S$ .

Les effets de la pesanteur sont négligés et on appellera  $P_0$  la pression du fluide au repos,  $\rho_0$  sa masse volumique au repos. Ces grandeurs sont supposées indépendantes de la profondeur  $z$ .

Le passage de l'onde acoustique à la position  $z$  à l'instant  $t$  crée une perturbation dans le milieu et on notera les différents champs :

- $P(z, t) = P_0 + p(z, t)$  champ de pression du fluide ;
- $\rho(z, t) = \rho_0 + \mu(z, t)$  champ de masse volumique ;
- $v(z, t)$  champ de vitesse (composante suivant  $z$ ).

**Q 25.** Rappeler les hypothèses de l'approximation acoustique. Quelle hypothèse fait-on sur la nature de l'évolution thermodynamique de la particule fluide au passage de l'onde acoustique ?

**Q 26.** Donner les trois équations couplées sur  $p(z, t)$ ,  $\mu(z, t)$  et  $v(z, t)$ . Rappeler le concept physique que chacune d'entre elles traduit.

**Q 27.** Établir l'équation vérifiée par la surpression acoustique  $p(z, t)$  dans l'approximation acoustique.

**Q 28.** Exprimer la vitesse de propagation  $c$  d'une onde acoustique plane progressive dans l'eau de mer et donner sa valeur numérique.

**IV.B.2) Relation de passage à l'interface d'un milieu stratifié**

Lors de la propagation de l'onde acoustique vers le sous-marin, la vitesse de propagation de l'onde varie (notamment car la masse volumique de l'eau évolue avec la profondeur). Pour prendre en compte cet effet, on envisage, dans un premier temps, le cas simplifié que représente le passage d'une onde acoustique plane progressive d'un milieu 1 avec une vitesse de propagation  $c_1$  à un milieu 2 avec une vitesse de propagation  $c_2$ .

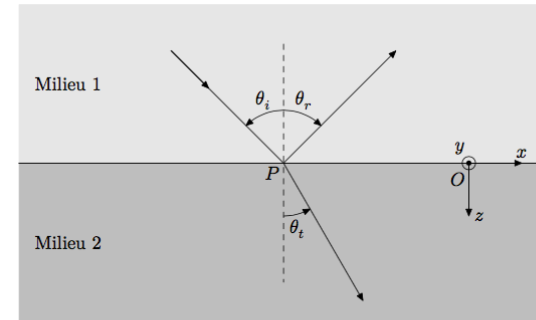
On envisage l'arrivée sur le dioptre ( $z = 0$ ) d'une onde plane progressive incidente (figure 5) dont le champ de surpression acoustique s'écrit

$$p_i(M, t) = p_{i0} \exp(i(\omega t - \vec{k}_i \cdot \overline{OM})) \quad \text{avec} \quad \vec{k}_i = k_{i,x} \vec{u}_x + k_{i,z} \vec{u}_z.$$

On note pour les surpressions associées respectivement aux ondes réfléchies et transmises

$$p_r(M, t) = p_{r0} \exp(i(\omega t - \vec{k}_r \cdot \overline{OM})) \quad \text{avec} \quad \vec{k}_r = k_{r,x} \vec{u}_x + k_{r,y} \vec{u}_y + k_{r,z} \vec{u}_z$$

$$p_t(M, t) = p_{t0} \exp(i(\omega t - \vec{k}_t \cdot \overline{OM})) \quad \text{avec} \quad \vec{k}_t = k_{t,x} \vec{u}_x + k_{t,y} \vec{u}_y + k_{t,z} \vec{u}_z$$



**Figure 5**

**Q 29.** Justifier que  $\|\vec{k}_i\| = \|\vec{k}_r\| = k_i$  puis exprimer  $k_i$  et  $k_t = \|\vec{k}_t\|$  en fonction de  $\omega$ ,  $c_1$  et  $c_2$ .

**Q 30.** Traduire la continuité de la pression en un point  $P$  quelconque de l'interface et la mettre sous la forme

$$p_{i0} + p_{r0} \exp(i(\vec{k}_i - \vec{k}_r) \cdot \overline{OP}) = p_{t0} \exp(i(\vec{k}_i - \vec{k}_t) \cdot \overline{OP}).$$

**Q 31.** Justifier que cette relation impose  $(\vec{k}_i - \vec{k}_r) \cdot \overline{OP} = (\vec{k}_i - \vec{k}_t) \cdot \overline{OP} = 0$  pour tout point  $P$  sur l'interface.

**Q 32.** En déduire que  $k_{r,y}$  et  $k_{t,y}$  sont nuls et que

$$\begin{cases} \theta_r = -\theta_i \\ \frac{\sin \theta_i}{c_1} = \frac{\sin \theta_t}{c_2} \end{cases}$$

Quelles lois retrouve-t-on ?

### IV.B.3) Propagation d'une onde acoustique dans un milieu inhomogène

Les lois permettant de déterminer la direction de propagation d'une onde sonore sont analogues à celles de l'optique géométrique. On assimile dans la suite l'onde acoustique à un rayon sonore dont on cherche à déterminer la trajectoire.

On considère que la vitesse de propagation  $c(z)$  dans le milieu varie continument avec la profondeur. On appelle  $n(z) = \frac{c_0}{c(z)}$  l'indice du milieu à la profondeur  $z$ , avec  $c_0$  la vitesse de propagation en  $z = 0$ , et  $\theta(z)$  l'angle algébrique que fait un rayon avec la verticale.

**Q 33.** D'après la question 32, quelle grandeur faisant intervenir  $\theta$  et  $c$  est conservée au cours du trajet des ondes acoustiques ?

**Q 34.** Dessiner l'allure des trajets des rayons émis quasi verticalement en  $z = 0$  en supposant que  $c$  est une fonction croissante de  $z$ .

La figure 6 représente le profil d'évolution de la vitesse de propagation des ondes acoustiques dans l'océan au niveau de la fosse des Mariannes avec une température de surface de 30 °C, un profil de température typique et une salinité de 34 ‰ (d'après National Physical Laboratory, UK).

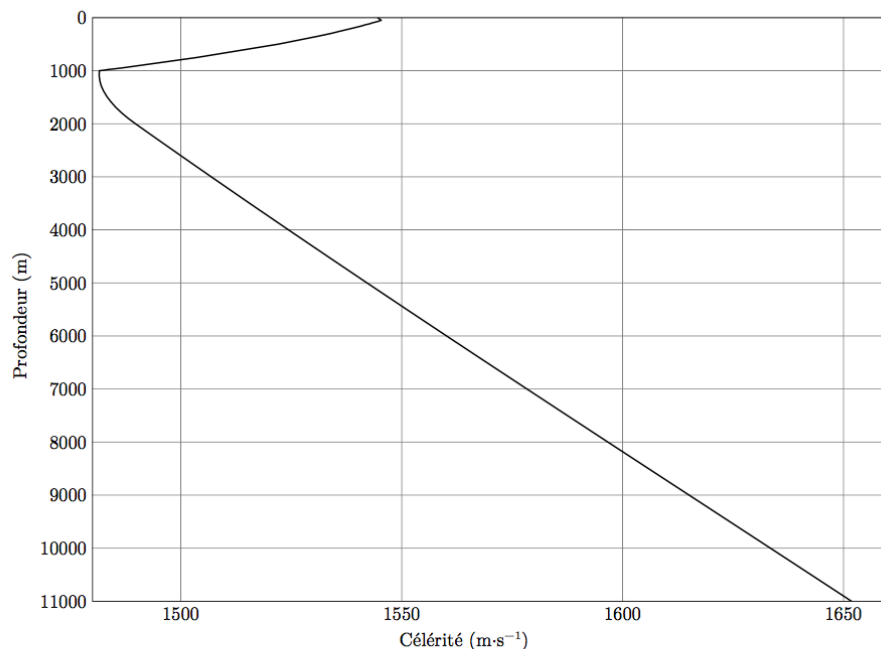


Figure 6

**Q 35.** Quelle est la valeur de l'angle maximal avec lequel le rayon doit être émis en surface pour qu'il atteigne le fond de la fosse des Mariannes.

On cherche désormais à déterminer la forme exacte des rayons sonores. On décompose le trajet en une infinité de petites déviations au niveau de dioptries horizontaux et on cherche à établir l'équation de la trajectoire des rayons. La figure 7 isole une déviation à la profondeur  $z$ .

**Q 36.** Exprimer le rapport  $\frac{dz}{dx}$  en fonction de  $\theta$ .

**Q 37.** À l'aide de la grandeur conservée déterminée précédemment, en notant  $\theta_0$  l'angle d'incidence à la surface ( $z = 0$ ), montrer que

$$\tan^2 \theta(z) = \frac{\frac{\sin^2 \theta_0}{n^2(z)}}{1 - \left(\frac{\sin \theta_0}{n(z)}\right)^2}.$$

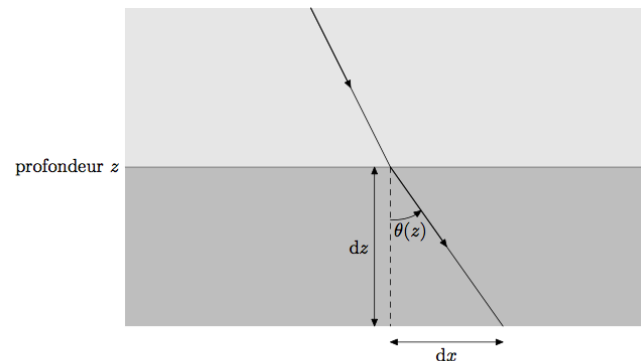


Figure 7

**Q 38.** En déduire l'équation différentielle de la trajectoire

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = \left(\frac{n(z)}{\sin \theta_0}\right)^2 - 1.$$

**Q 39.** Par quelle équation simple peut-on décrire l'évolution de la vitesse de propagation du son  $c(z)$  dans l'océan avec la profondeur, pour des profondeurs inférieures à 1000 m ? Donner une évaluation numérique des différents paramètres intervenant dans cette équation.

**Q 40.** Reprendre la même démarche pour des profondeurs supérieures à 1000 m.

L'équation différentielle déterminée précédemment étant difficile à résoudre, l'équation de la trajectoire n'est pas accessible directement. En revanche, on peut exprimer le rayon de courbure  $R$  de la trajectoire en tout point (rayon du cercle tangent à la trajectoire qui l'approche au mieux). On obtient la relation

$$R(z) = \left| \frac{n^2(z)}{\frac{dn(z)}{dz} \sin \theta_0} \right|.$$

**Q 41.** Montrer que, pour des profondeurs inférieures ou supérieures à 1000 m, les rayons acoustiques ont une forme simple que l'on précisera. Déterminer l'expression des rayons de courbure  $R_1$  et  $R_2$  dans ces deux intervalles. On fera intervenir les paramètres évalués aux questions précédentes.

On souhaite déterminer dans quelle direction orienter l'émetteur pour communiquer entre le bateau en surface et le sous-marin au fond de la fosse des Mariannes si ces derniers sont séparés d'une distance horizontale de 1 km.

**Q 42.** Proposer, en le justifiant, un majorant raisonnable pour la valeur de l'angle d'incidence de l'émetteur par rapport à la verticale.

**Q 43.** En déduire les valeurs numériques des rayons de courbure  $R_1$  et  $R_2$  pour cette incidence. Conclure sur l'orientation de l'émetteur.

## Données et formulaire

### Constantes diverses

Permittivité diélectrique du vide	$\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ F}\cdot\text{m}^{-1}$
Perméabilité magnétique du vide	$\mu_0 = 12,6 \times 10^{-7} \text{ H}\cdot\text{m}^{-1}$
Constante de Faraday	$\mathcal{F} = 96,5 \times 10^3 \text{ C}\cdot\text{mol}^{-1}$
Accélération de la pesanteur	$g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$

### Données sur l'alliage AZ31

Masse volumique	$\rho_{\text{AZ31}} = 1,74 \times 10^3 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$
Masse molaire	$M_{\text{AZ31}} = 24,4 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$
Couple d'oxydoréduction	$\text{AZ31}^{2+}/\text{AZ31}$

### Données sur l'eau de mer

Masse volumique	$\rho_0 = 1,02 \times 10^3 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$
Viscosité dynamique à 20 °C	$\eta = 1,00 \times 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s}$
Coefficient de compressibilité isotherme	$\chi_T = 4,41 \times 10^{-10} \text{ Pa}^{-1}$
Coefficient de compressibilité isentropique	$\chi_S = 4,10 \times 10^{-10} \text{ Pa}^{-1}$
Permittivité diélectrique relative	$\epsilon_r = 75$
Conductivité électrique	$\gamma = 5 \text{ S}\cdot\text{m}^{-1}$

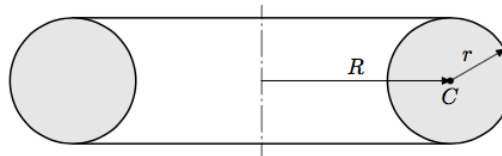
### Données sur Deepsea Challenger

Profondeur de la fosse des Mariannes	$z_{\text{max}} = 10,9 \text{ km}$
Diamètre équivalent du sous-marin	$D_{DC} = 2,11 \text{ m}$
Diamètre intérieur équivalent de la zone habitable du sous-marin	$D = 1,09 \text{ m}$
Hauteur du sous-marin	$H_{DC} = 7,30 \text{ m}$

### Formulaire

$$\overline{\text{rot}(\text{rot } \vec{a})} = \overline{\text{grad}(\text{div } \vec{a})} - \Delta \vec{a}$$

Un tore est un volume produit par la rotation d'un disque de rayon  $r$  autour d'un axe, situé dans son plan à la distance  $R$  de son centre.



Sa surface est donnée par

$$S = 4\pi^2 r R$$

et son volume par

$$V = 2\pi^2 r^2 R$$

# La lévitation acoustique

La lévitation acoustique consiste à maintenir de la matière en suspension au sein d'un milieu fluide ambiant, l'air par exemple, en opposant au poids de l'objet lévitant la force résultant de la pression de radiation d'ondes sonores intenses. La possibilité de mettre en lévitation des échantillons solides ou liquides, de faible masse, est maintenant bien établie, et des avancées récentes laissent entrevoir des applications concrètes de ce procédé.

En 2013, une équipe de chercheurs suisses<sup>1</sup> a mis au point un dispositif de lévitation acoustique permettant un transport *contrôlé* de petits objets. Ils sont ainsi parvenus à mélanger une gouttelette d'eau et un granulé de café soluble. Cette expérience *a priori* ludique recèle en réalité des applications technologiques et industrielles extrêmement précieuses, telle que le contrôle de certains procédés chimiques ou biologiques.

En 2015, c'est une équipe de recherche sud-américaine<sup>2</sup> qui a mis au point un dispositif de lévitation acoustique permettant de transporter des objets avec une grande *stabilité* donc sans aucun risque d'en perdre le contrôle mécanique, ce qui intéresse particulièrement les secteurs sensibles du nucléaire et de la chimie, où la dangerosité de la matière transportée impose de prendre en compte les risques inhérents aux chocs ou à la dissémination.

Ce problème aborde le principe de la lévitation acoustique de manière simplifiée. Il comporte 2 parties largement indépendantes : la première modélise le phénomène de lévitation acoustique, alors que la seconde présente un dispositif de conversion d'énergie pouvant alimenter le transducteur générant les ondes sonores.

Les vecteurs seront surmontés d'un chapeau s'ils sont unitaires ( $\hat{e}$ ) et d'une flèche dans le cas général ( $\vec{a}$ ). Ainsi dans l'espace cartésien on notera  $\vec{a} = a_x \hat{e}_x + a_y \hat{e}_y + a_z \hat{e}_z$ . À l'exception de  $j$ , tel que  $j^2 = -1$ , les nombres complexes seront soulignés.

Dans tout le problème, **exprimer** signifie donner l'expression littérale et **calculer** signifie donner la valeur numérique avec deux chiffres significatifs.

## I. — La lévitation grâce à une onde sonore

Le dispositif de lévitation acoustique est présenté et modélisé sur la figure 1.

Un transducteur, de surface  $S = 10 \text{ cm}^2$ , est en vibration au voisinage de la hauteur  $h$  à la vitesse  $\vec{u}_m(t) = U_m \sin(\omega t) \hat{e}_z$  avec  $U_m = 10 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$ . Il génère une onde sonore de fréquence  $f = 20 \text{ kHz}$  supposée plane, harmonique, et progressive selon la verticale descendante. Cette onde est *totale*ment réfléchiée par une paroi fixe placée en  $z = 0$ .

Le milieu de propagation est de l'air, supposé homogène et compressible. Il est caractérisé au repos (en l'absence d'onde sonore) par une masse volumique  $\mu_0 = 1,2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  uniforme. Les champs de température et pression sont eux aussi stationnaires ; la température  $T_0$  étant en outre uniforme alors que la pression est une fonction de  $z$  soit  $P_0 = P_0(z)$ .

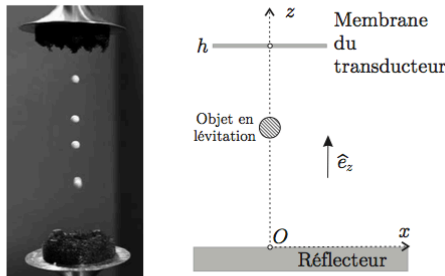


FIGURE 1 — À gauche : lévitation acoustique de particules de polystyrène expansé. À droite : schéma de principe du dispositif de lévitation acoustique.

On suppose que la propagation est unidimensionnelle, de célérité  $c = 3,4 \times 10^2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  dans le milieu. Dans l'approximation acoustique, les champs de pression, masse volumique, et vitesse sont alors décrits respectivement par :

$$\begin{cases} P(z,t) = P_0(z) + p_1(z,t) \\ \mu(z,t) = \mu_0 + \mu_1(z,t) \\ \vec{v}(z,t) = v_1(z,t) \hat{e}_z \end{cases}$$

Les termes  $p_1$  et  $\mu_1$  sont perturbatifs : pour toutes les valeurs de  $t$  et de  $z$  concernées on a donc  $|p_1| \ll |P_0|$  et  $|\mu_1| \ll |\mu_0|$ . L'évolution du fluide mis en mouvement par l'onde sonore est supposée adiabatique et réversible. Le coefficient de compressibilité isentropique sera noté  $\chi_S$  et assimilé à une constante.

□ 1 — Rappeler les hypothèses de l'approximation acoustique. Sauf mention contraire, on suppose ces hypothèses vérifiées par la suite.

□ 2 — On considère une particule fluide, de volume  $d\tau$ , mise en mouvement par le passage de l'onde sonore. Montrer que, dans l'approximation acoustique, son accélération peut s'écrire  $\vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ .

□ 3 — Écrire, en projection sur  $\hat{e}_z$ , l'équation aux dérivées partielles obtenue en appliquant la relation fondamentale de la dynamique à une particule de fluide de volume  $d\tau$  et de masse  $\mu_0 d\tau$ . Que donne cette relation si la particule est au repos ? Compte-tenu de cette seconde relation, déterminer finalement une équation aux dérivées partielles reliant les seules grandeurs  $\mu_0$ ,  $v_1$  et  $p_1$ .

□ 4 — Donner les expressions linéarisées des relations locales traduisant, d'une part la conservation de la masse, et d'autre part le caractère isentropique de l'évolution du fluide sous l'effet de l'onde acoustique.

□ 5 — Montrer que le champ des vitesses  $v_1(z,t)$  vérifie une équation de propagation de la forme

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} = 0$$

Quel est le nom de cette équation ? Exprimer  $c$  en fonction des paramètres pertinents.

□ 6 — On note  $\lambda$  la longueur d'onde associée au phénomène propagatif décrit à la question précédente. On suppose que les transferts thermiques dans le milieu sont de type diffusif. On note  $\kappa = 3,0 \times 10^{-2} \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$  la conductivité thermique de l'air et  $c_p = 1,0 \times 10^3 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$  sa capacité thermique massique à pression constante. Par un raisonnement en ordre de grandeur, montrer que l'hypothèse d'adiabaticité n'est valide que si la fréquence  $f$  de l'onde est inférieure à une valeur  $f_{\max}$  que l'on exprimera, en fonction de  $\kappa$ ,  $\mu_0$ ,  $c_p$  et  $c$ . Qu'en est-il dans le cadre de cette expérience ?

□ 7 — On note  $z_m(t)$  la position de la membrane du transducteur au voisinage de  $h$ . Exprimer puis calculer l'amplitude  $Z_m$  de vibration de  $z_m(t)$ . On pourra prendre  $(4\pi)^{-1} = 8,0 \times 10^{-2}$ .

□ 8 — On s'intéresse à l'onde sonore résultante entre le transducteur et le réflecteur. Justifier la condition aux limites

$$u_m(t) \approx v_1(h,t)$$

□ 9 — Déterminer complètement la vitesse  $v_1(z,t)$  dans l'espace  $0 \leq z \leq h$  et exprimer son amplitude maximale  $V_1$  en fonction de  $U_m$ ,  $h$ ,  $\omega$  et  $c$ .

1. D. Foresti, M. Nabavi, M. Klingauf, A. Ferrari and D. Poulikakos, « Acoustophoretic contactless transport and handling of matter in air », *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.*, vol. 110 no. 31, Janvier 2013, 12549 - 12554

2. M. A. B. Andrade, N. Pérez, J. C. Adamowski, « Particle manipulation by a non-resonant acoustic levitator », *Appl. Phys. Lett.*, 106, 014101, Janvier 2015

□ 10 — Déterminer les positions spatiales des maxima de vitesse en fonction de  $\lambda$  et d'un entier  $n$ . Commenter ce résultat. Montrer que l'amplitude  $V_1$  des maxima diverge pour certaines pulsations  $\omega_n$ . En pratique, quels phénomènes limitent la valeur de  $V_1$  ?

□ 11 — Exprimer la surpression  $p_1(z,t)$  associée à  $\vec{v}_1(z,t)$ . On considère une bille, de rayon  $a \ll \lambda$  et donc assimilable à un volume élémentaire sans influence sur la propagation de l'onde acoustique. Déterminer la résultante  $\vec{F}$  des forces de pression s'exerçant sur la bille, ainsi que sa moyenne temporelle  $\langle \vec{F} \rangle$ . Le modèle étudié jusqu'à présent permet-il d'interpréter la lévitation de cette bille ?

□ 12 — On règle dorénavant la valeur de  $h$  de manière à obtenir  $V_1 = 50 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . Pourquoi n'est-il plus possible de se placer dans l'approximation acoustique ?

On pose maintenant :

$$\begin{cases} P(z,t) = P_0(z) + p_1(z,t) + p_2(z,t) \\ v(z,t) = v_1(z,t) + v_2(z,t) \end{cases}$$

où les termes d'indice 0 sont les grandeurs constantes au repos (en l'absence d'onde sonore), les termes d'indice 1 sont les solutions étudiées précédemment et les termes d'indice 2 sont des corrections d'ordre 2, résultant des termes non linéaires des équations aux dérivées partielles décrivant le phénomène.

□ 13 — On admet que la surpression  $p_2(z,t)$  est de la forme

$$p_2(z,t) = \frac{1}{4} \mu_0^\ell V_1^q \cos\left(\frac{2\omega z}{c}\right) + f(z) \cos(2\omega t)$$

où  $f(z)$  est une fonction dont il n'est pas nécessaire de connaître l'expression.

Déterminer les valeurs des entiers  $\ell$  et  $q$ . Déterminer la moyenne temporelle  $\langle F_z \rangle(z)$  de la résultante des forces de pression qui s'exercent sur la bille.

□ 14 — Montrer, sans les déterminer explicitement, qu'il existe des positions d'équilibre tant que la masse volumique  $\mu_b$  de la bille reste inférieure à une valeur  $\mu_{b,\text{max}}$  dont on précisera l'expression. En vous appuyant sur une représentation graphique de la force moyenne  $\langle F_z \rangle(z)$ , discuter la stabilité des positions d'équilibre.

□ 15 — Calculer  $\mu_{b,\text{max}}$  et proposer une estimation de la masse maximale  $m_{b,\text{max}}$  d'une bille susceptible de léviter avec le dispositif présenté ici. Commenter les valeurs numériques.

□ 16 — Comme on le voit sur la figure 1 le dispositif permet de faire léviter plusieurs objets. Quelle est la distance qui les sépare ? Exprimer le nombre maximal de ces objets en fonction de  $\lambda$  et  $h$ .

□ 17 — On observe que les objets en lévitation dans ce dispositif ont un petit mouvement d'oscillation de pulsation  $\tilde{\omega}$  au voisinage de leurs positions d'équilibre. Déterminer l'expression de  $\tilde{\omega}$  en fonction des paramètres du problème.