

## Phénomènes de transport – bloc 2 – Transfert thermique par conduction

### Rappel du programme : Objectifs généraux de la formation

Le bloc 2 est consacré à la conduction thermique en relation avec le cours de thermodynamique de première année. Après avoir écrit les premier et second principes sous forme infinitésimale, on s'attache à l'étude de la diffusion thermique avec une visée applicative, concrète.

L'établissement de l'équation de diffusion thermique est limité au cas des systèmes de volume constant et les mises en équation locale sont faites exclusivement en géométries unidimensionnelles. On admet ensuite les formes générales des équations en utilisant les opérateurs d'analyse vectorielle, ce qui permet de traiter des problèmes tridimensionnels en fournissant les expressions de la divergence et du laplacien. Même si cette rubrique contribue à asseoir la maîtrise des opérateurs d'analyse vectorielle (gradient, divergence, laplacien), le formalisme doit rester au deuxième plan.

L'étude de l'équation de diffusion thermique sans terme source, en régime stationnaire est menée par analogie avec l'électrocinétique. La notion de résistance thermique, dont la connaissance des conditions d'application est aussi importante que son utilisation, ne doit pas rester théorique. Son intérêt doit être illustré par des exemples pratiques à forte ou à faible résistance thermique.

Aucune connaissance sur les termes sources n'est exigible sauf pour l'effet Joule. On néglige le rayonnement thermique. Dans le cadre de l'interface liquide-solide, la loi phénoménologique de Newton peut être utilisée, mais ni sa mémorisation ni aucune connaissance sur son établissement ne peuvent être exigées.

Aucune méthode générale de résolution ne peut être demandée aux étudiants, mais les solutions de l'équation de diffusion en géométrie unidimensionnelle cartésienne, sans terme source, en régime stationnaire ou en régime d'ondes harmoniques doivent être connues.

Notions et contenus	Capacités exigibles
<b>2. Transfert thermique par conduction</b>	
<b>2.1. Formulation infinitésimale des principes de la thermodynamique</b>	
Premier principe : $dU + dE_c = \delta W + \delta Q$	Énoncer et exploiter les principes de la thermodynamique pour une transformation élémentaire.  Utiliser avec rigueur les notations $d$ et $\delta$ en leur attachant une signification.
Deuxième principe : $dS = \delta S_e + \delta S_c$ avec	
$\delta S_c = \frac{\delta Q}{T_0}$ pour une évolution monotherme.	

<b>2.2. Équation de la diffusion thermique</b>	
Les différents modes de transfert thermique : diffusion, convection et rayonnement.	Citer les trois modes de transfert thermique.  Expliquer que la diffusion est un déplacement d'énergie de proche en proche dans la matière macroscopiquement immobile.
Vecteur densité de courant thermique $\vec{j}_Q$ .	Exprimer le flux thermique comme le flux du vecteur $\vec{j}_Q$ à travers une surface orientée.
Équilibre thermodynamique local.	Utiliser les champs scalaires intensifs (volumiques ou massiques) associés à des grandeurs extensives de la thermodynamique.
Loi phénoménologique de Fourier.	Énoncer et utiliser la loi de Fourier. Citer quelques ordres de grandeur de conductivité thermique dans les conditions usuelles : air, eau, béton, acier.

Bilan d'énergie.	Pour un milieu évoluant à volume constant, établir l'équation locale traduisant le premier principe dans le cas d'un problème ne dépendant qu'une d'une seule coordonnée d'espace en coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques.  Admettre et utiliser une généralisation en géométrie quelconque en utilisant l'opérateur divergence et son expression fournie.
Équation de la diffusion thermique.	Établir l'équation de diffusion vérifiée par la température, avec ou sans terme source.  Analyser une équation de diffusion en ordre de grandeur pour relier des échelles caractéristiques spatiale et temporelle.  Relier l'équation de diffusion à l'irréversibilité temporelle du phénomène.  Exploiter la linéarité de l'équation de diffusion.  Manipuler le terme source local et intégral de l'effet Joule.
Conditions aux limites.	Exploiter la continuité du flux thermique.  Exploiter la continuité de la température pour un contact thermique parfait.  Utiliser la relation de Newton (fournie) à l'interface solide-fluide.  Traduire le contact avec une paroi calorifugée.
<b>2.3. Régime stationnaire, ARQS</b>	
Résistance ou conductance thermique.	Définir la notion de résistance thermique par analogie avec l'électrocinétique. Énoncer les conditions d'application de l'analogie.  Établir l'expression de la résistance thermique d'un cylindre calorifugé latéralement.  Exploiter des associations de résistances

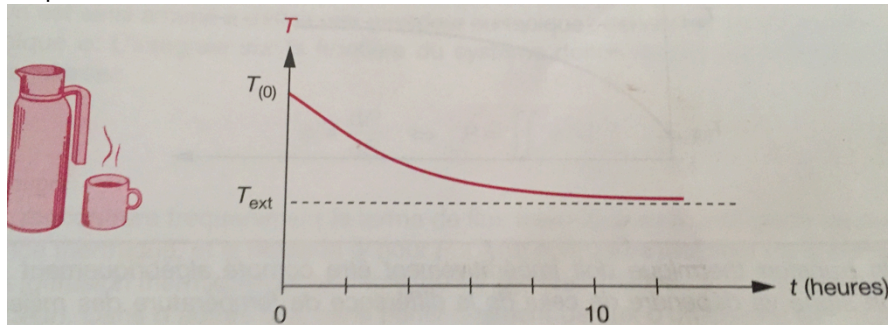
	thermiques en série ou en parallèle.
ARQS, analogie électrocinétique avec un circuit RC.	Mettre en évidence un temps caractéristique d'évolution de la température. Justifier l'ARQS. Établir l'analogie avec un circuit électrique RC.
<b>2.4. Ondes thermiques</b>	
Relation de dispersion.	Établir la relation de dispersion des ondes thermiques en géométrie unidirectionnelle.
Effet de peau thermique.	Mettre en évidence le déphasage lié à la propagation.  Établir une distance caractéristique d'atténuation.

# I. Les transferts thermiques : formulation infinitésimale des principes de la thermodynamique

## 1. Les trois modes de transfert thermique

### Notion : les différents modes de transfert thermique : diffusion, convection et rayonnement

Lorsque deux corps à des températures différentes sont mis en contact thermique, on observe un **transfert thermique du corps le plus chaud vers le corps le plus froid**, qui tend à **homogénéiser les températures**. Le cours de première année a mis en évidence ce **transfert thermique Q** entre systèmes thermodynamiques. Nous pouvons prendre comme exemple un thermos initialement rempli de café chaud. Au cours du temps, la température du liquide va décroître et tendre vers la température du milieu extérieur.



**Capacité** : citer les trois modes de transfert thermique

### 1.1 Transfert thermique par conduction

**Capacité** : expliquer que la diffusion est un déplacement d'énergie de proche en proche dans la matière macroscopiquement immobile

Considérons une cuillère métallique plongée dans de l'eau chaude. Elle voit son extrémité à l'air libre s'échauffer rapidement. On privilégie une cuillère en bois pour ne pas se brûler. La section et la longueur de l'objet jouent également un rôle important.

Ce transfert thermique a donc lieu dans un **milieu macroscopiquement immobile**. Une **interprétation microscopique** est donc nécessaire : c'est l'**agitation thermique** des particules du milieu qui est à l'origine du transfert. Dans un **solide**, les atomes placés aux nœuds du réseau vibrent autour de leurs positions, comme les électrons de conduction du matériau. De **proche en proche**,

ces vibrations communiquent l'agitation thermique, et se diffusent aux zones voisines. Dans les **fluides**, l'agitation thermique est communiquée par des **chocs entre particules**, toujours sans déplacement macroscopique global.

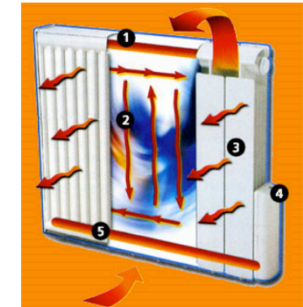
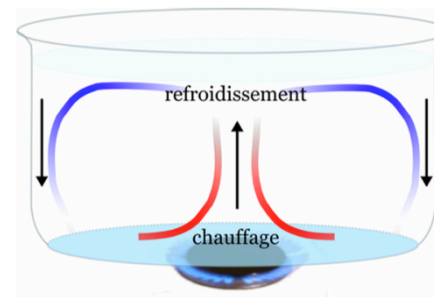
La **conduction** (ou diffusion) **thermique** correspond donc à un **transfert d'énergie** dans un support matériel, **sans mouvement macroscopique de matière**. La **diffusion thermique** est un **phénomène de transport**, au même titre que le transport électrique.

**Remarque** : le bois est un mauvais conducteur thermique qui limitera le phénomène.

### 1.2 Transfert thermique par convection

A l'inverse de la conduction thermique (de type « diffusif »), la convection correspond à des **transports supportés par des mouvements macroscopiques** de la matière.

Par exemple, dans un fluide (gaz ou liquide), les différences de température au sein du milieu entraînent des **mouvements convectifs**. L'air chaud au voisinage d'un radiateur d'une pièce d'habitation est plus léger, tend ainsi à s'élever et à être remplacé par de l'air plus froid, provoquant de la sorte une convection qui tend à uniformiser la température de la pièce.

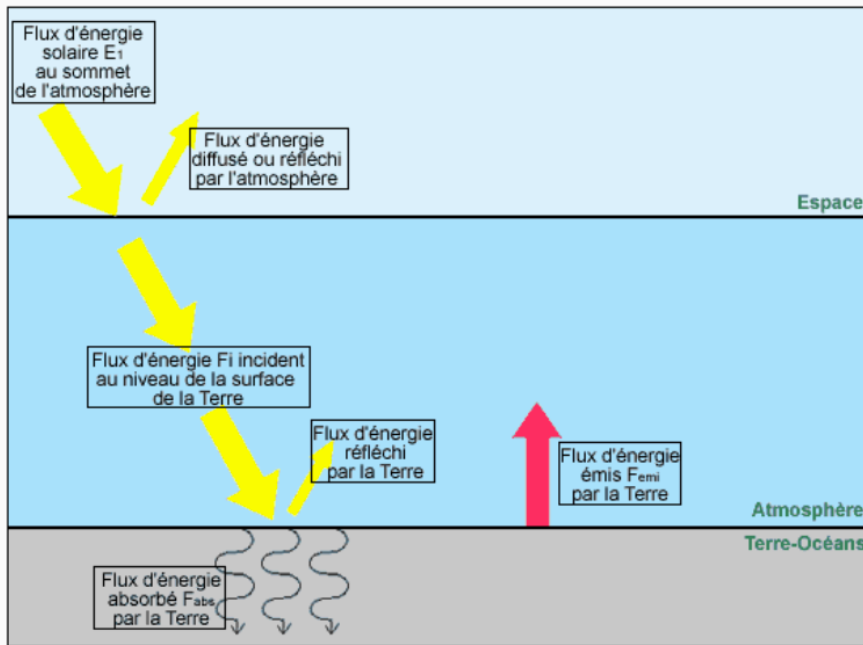


**Remarque** : pour les gaz, la convection est bien plus efficace que la conduction dans un même gaz immobile. La conduction existera toujours dans les fluides, même si la convection est prépondérante.

### 1.3 Transfert thermique par rayonnement

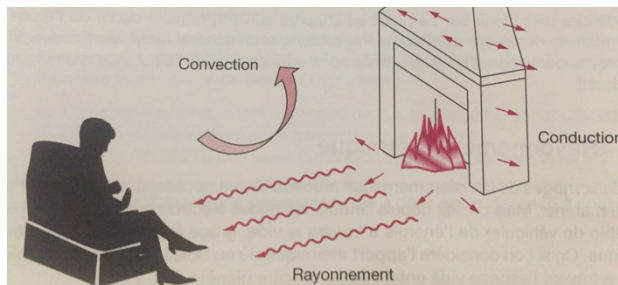
Les **corps chauffés émettent un rayonnement électromagnétique EM** : c'est le phénomène de **rayonnement thermique**. Il ne s'agit pas d'un transfert thermique à proprement dit, mais radiatif. En particulier, il peut **se propager dans le vide** alors que la **conduction** thermique nécessite un **support matériel**. Toutefois, le rayonnement thermique devra intervenir dans les **bilans énergétiques**, comme

autre cause d'échange d'énergie.



Au **niveau microscopique**, le rayonnement thermique a pour origine le **mouvement des charges électriques présentes dans la matière**, qui génèrent alors une **onde EM par agitation thermique**. Il est d'autant plus intense que la température est élevée.

Un métal chauffé donne lieu au phénomène d'incandescence, caractérisé par une émission de lumière, exploité pour l'éclairage avec des lampes à incandescence. Le métal apparaît d'abord rougeâtre, puis jaune, en fin de plus en plus blanc à mesure que la température s'élève. A l'inverse, à température ambiante, c'est le rayonnement infra-rouge qui domine.



**Remarque**  
 bien souvent les trois modes interviennent simultanément ->

## 2. Formulation infinitésimale des principes de la thermodynamique

### 2.1 Rappels de première année

En première année, nous avons introduit une grandeur  $U$  **extensive** ( $U_{1+2} = U_1 + U_2$ ), **fonction d'état** appelée **énergie interne**. C'est une fonction d'état : à l'équilibre thermodynamique, elle ne dépend que d'un faible nombre de variables d'état macroscopiques ( $V$  le volume,  $P$  la pression...), et elle ne dépend du chemin suivi lors de la transformation du système.

Pour un **système fermé, évoluant entre deux états d'équilibre**, la variation d'énergie totale est pilotée par le **premier principe de la thermodynamique** :

$$\Delta(U + E_m) = W + Q$$

- $E_m = E_c + E_p$  représente l'**énergie mécanique** du système, somme de l'énergie cinétique  $E_c$  et de l'énergie potentielle  $E_p$
- $Q$  est le **transfert thermique de l'extérieur vers le système** -> positif si reçu
- $W$  est le **travail reçu** par le système. Lors d'une **évolution monobare**, à pression extérieure constante, le travail des forces de pression est  $W = -P_{ext} \Delta V$ .

Au **premier principe**, utile pour les **bilans énergétiques**, nous avons ajouté le **deuxième principe**, qui détermine le sens des transformations possibles. En introduisant une deuxième **fonction d'état S l'entropie (extensive)**, nous avons énoncé le deuxième principe, applicable à un système fermé :

$$\Delta S = S_e + S_c$$

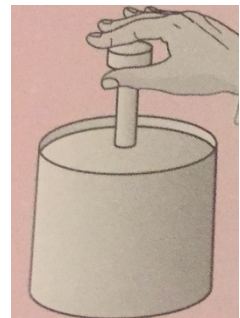
- $S_e = \frac{Q}{T_{ext}}$  désigne un terme d'échange lié au flux thermique à travers la limite extérieure du système, pour une évolution monotherme
- $S_c \geq 0$  désigne un terme de création, supérieur à 0 pour des transformations irréversibles (égal pour réversibles)

### 2.2 Expression différentielle des principes

**Notion** : premier et deuxième principe sous forme différentielle, avec entropie échangée pour une évolution monotherme

On envisage ici des **transformations infinitésimales** au cours desquelles chacune des **variables d'états varient très peu** : **chaque étape élémentaire** de la transformation peut être considérée comme un état d'équilibre, la succession de ces étapes passe par des « **états très voisins** », **considérés comme des états d'équilibre**.

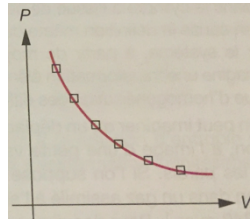
Pour illustrer ce type de transformation infinitésimale, prenons le cas de la compression d'un volume à l'aide d'un piston, où l'on mesure pression





et volume.

✓ En envisageant, par exemple, qu'un déplacement du piston provoque un front de pression se déplaçant à la vitesse du son dans l'air soit  $340 \text{ m.s}^{-1}$ , et pour une dimension de l'ordre de  $10 \text{ cm}$ , évaluer le temps nécessaire pour un aller/retour de cette onde.



L'**homogénéisation** de la **pression** est **très rapide**, et entre chaque mesure, le système a atteint son **équilibre mécanique**, comme thermodynamique. L'hypothèse de transformations infinitésimales est justifiée.

**Capacité** : énoncer et exploiter les principes de la thermodynamique pour une transformation élémentaire

On envisage les **transformations élémentaires**, ou **infinitésimales**, d'un système fermé. Les deux principes de la thermodynamique s'expriment sous leurs formes différentielles :

$$\boxed{dU + dE_m = \delta W + \delta Q} \quad \text{avec } \delta W = -P_{ext} dV \text{ pour transfo. monobare}$$

$$\boxed{dS = \delta S_e + \delta S_i} \quad \text{avec } \delta S_e = -\frac{\delta Q}{T_0} \text{ pour transfo. monotherme}$$

**Capacité** : utiliser avec rigueur les notations  $d$  et  $\delta$  en leur attachant une signification

On remarque la différence de notation entre :

- $d$  réservée aux variations d'une variable ou fonction d'état, qui ne dépend pas du chemin suivi lors des transformations élémentaires
- $\delta$  qui s'applique à une grandeur qui n'est pas une fonction d'état, donc dépend du chemin suivi, et n'est pas défini correctement au cours des transformations, par exemple le travail, ou le transfert thermique.

## II. Equation de la diffusion thermique

### 1. Vecteur densité de courant thermique

**Notion** : vecteur densité de courant thermique  $\vec{J}_Q$

Dans tous les **phénomènes de transport**, la **densité de courant** est associée au **flux d'une grandeur  $\chi$  transportée** : c'est donc la **quantité de  $\chi$  qui traverse une surface par unité de temps, et de surface**. Du point de vue des dimensions :

$$\boxed{[j] = \frac{[\chi]}{S \cdot T} = [\chi] \cdot m^{-2} \cdot s^{-1}}$$

Pour le transport électrique, transport de charge  $q$  :  $[j] = [q] \cdot m^{-2} \cdot s^{-1} = \frac{I}{S}$

Pour le **transfert thermique**, la grandeur échangée est une **énergie « thermique »** : **Q en J**.

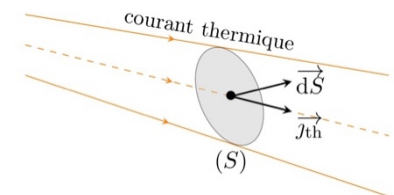
$$\text{Donc } [j] = [Q] \cdot m^{-2} \cdot s^{-1} = J \cdot s^{-1} \cdot m^{-2} = W \cdot m^{-2}$$

On généralise cette définition de la quantité de  $\chi$  qui traverse une surface élémentaire orientée  $d\vec{S}$  pendant l'intervalle  $dt$ , sous la forme différentielle :

$$\delta^2 \chi = \vec{j} \cdot d\vec{S} dt$$

**Capacité** : exprimer le flux thermique comme le flux du vecteur  $\vec{J}_Q$  à travers une surface orientée

✓ Exprimer  $\delta^2 Q$  le flux élémentaire de chaleur traversant  $d\vec{S}$  pendant  $dt$  en fonction de  $\vec{J}_Q$  le vecteur densité thermique. En déduire l'expression du flux thermique élémentaire  $d\phi$ , et du flux  $\phi$  en fonction de ce vecteur.



## 2. Equilibre thermodynamique local

**Capacité** : utiliser les champs scalaires intensifs (volumiques ou massiques) associés à des grandeurs extensives de la thermodynamique

### ➔ Equilibre thermodynamique

Un système thermodynamique à l'équilibre est décrit par un petit nombre de paramètres d'état, tels que la pression  $P$ , la température  $T$  (variables intensives), la masse  $m$  ou le volume  $V$  (extensives), et de fonctions d'états, telles que l'énergie interne  $U$  (extensive)...

Pour les **grandeurs extensives**, comme **U et m**, on peut leur associer des **grandeurs massiques intensives**, correspondant à un élément de masse  $dm$  :  **$u = dU/dm$  et  $\mu = dm/dV$**  ->  $dV$  représentant l'élément de volume associé à  $dm$ .

**A l'équilibre thermodynamique** (pour un corps pur sous une phase), ces **grandeurs** sont **homogènes**. Ainsi le système est bien défini par un petit nombre de **champs scalaires** :  **$p(M)$ ,  $T(M)$ ,  $u(M)$  et  $\mu(M)$** , qui sont **uniformes**. En fait, la



situation est simplifiée à l'équilibre, car les fluctuations de ces grandeurs sont faibles, pour un nombre élevé de particules composant le système.

### → Equilibre thermodynamique local

Pour cet équilibre local, nous supposons que chaque élément de volume du système, de taille mésoscopique, est à chaque instant **infiniment près d'un état d'équilibre local**. On peut donc y définir une **température  $T(M,t)$**  et une **énergie interne massique  $u(M,t)$**  en tout point, constituants des **champs scalaires locaux** : dans cet équilibre thermodynamique local, ils **dépendent a priori du point  $M$ , et du temps**.

### 3. Loi phénoménologique de Fourier

**Capacité** : énoncer et utiliser la loi de Fourier

La présence, dans un **milieu matériel sans mouvement macroscopique**, d'une **inhomogénéité de température** fait apparaître un **transfert thermique par conduction**, qui possède les propriétés suivantes :

- la diffusion thermique cesse lorsque la température est homogène  $\rightarrow \vec{j}_Q$  doit s'annuler lorsque le gradient de température est nul :  $\overrightarrow{\text{grad}}T = \vec{0}$
- le **transfert thermique est orienté des zones de température élevée vers les zones de température faible**, donc  $\vec{j}_Q$  est orienté selon les températures décroissantes, **en sens opposé au gradient  $\overrightarrow{\text{grad}}T$**
- le **vecteur densité** est relié **linéairement à la cause** qui lui donne naissance :  $\overrightarrow{j}_Q$

$$\vec{j}_Q = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}}T$$

Le coefficient de proportionnalité désigne la **capacité du milieu à conduire le flux thermique** :  $\lambda$  est la **conductivité thermique** qui dépend du matériau, et de la température.

**Capacité** : distinguer une loi phénoménologique et une loi universelle

Cette loi est une **loi phénoménologique, déduite de l'expérience**, qui n'a pas un caractère universel. Elle s'applique dans un **cadre limité** : **milieu homogène** (conductivité uniforme) **et isotrope** (conductivité = scalaire), **gradient de température « pas trop » intense** (loi linéaire soit du premier ordre), et **variant « lentement » dans le temps...**

### → Ordres de grandeur

**Capacité** : citer quelques ordres de grandeur de conductivité thermique dans les conditions usuelles : air, eau, béton, acier

Par analyse dimensionnelle, déterminer l'unité de la conductivité.

--	--	--	--	--	--	--

Matériau	Cuivre	Granite	Béton	Bois	Eau	Air
$\lambda$ en $W \cdot K^{-1} \cdot m^{-1}$	$4 \cdot 10^2$	2,8	1,4	0,2	0,6	$2,6 \cdot 10^{-2}$

métaux bons conducteurs électriques	$\lambda \approx 10^2 W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$
métaux médiocres conducteurs électriques	$\lambda \approx 10 W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$
béton, verre, eau	$\lambda \approx 1 W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$
air, laine de verre	$\lambda \approx 10^{-2} W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$

La conductivité thermique est une grandeur positive.

### → Analogie avec la loi d'Ohm locale

**Capacité** : mettre en évidence l'analogie entre les différentes équations locales traduisant le bilan d'une grandeur scalaire extensive

Avec  $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V$  (régime stationnaire), la loi de Fourier de la conduction thermique est analogue à la loi d'Ohm de la conduction électrique.

Conduction électrique	Diffusion thermique
transfert de charges ( $q$ )	transfert thermique ( $Q$ )
vecteur densité de courant $\vec{j}$	$\vec{j}_{th}$
intensité électrique $I = \iint \vec{j} \cdot d\vec{S} = \frac{\delta q}{dt}$	flux thermique $\Phi = \iint \vec{j}_{th} \cdot d\vec{S} = \frac{\delta Q}{dt}$
loi d'Ohm $\vec{j} = -\gamma \overrightarrow{\text{grad}}V$	loi de Fourier $\vec{j}_{th} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}}T$
conductivité électrique $\gamma$	conductivité thermique $\lambda$
potentiel électrique $V$	température $T$

Ce rapprochement n'est pas seulement formel : pour un conducteur ohmique, par exemple, les mouvements des électrons de conduction participent à la conduction thermique comme électrique, qui sont liées. Plus un métal conduit l'électricité, plus sa conductivité thermique est élevée.

#### 4. Bilan d'énergie

##### Capacités :

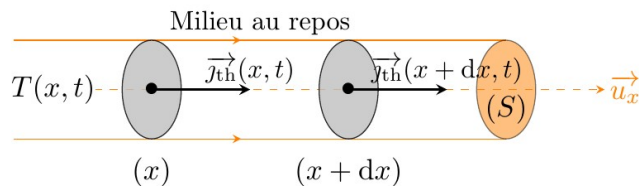
- réaliser des bilans sous forme globale et locale
- pour un milieu évoluant à volume constant, établir l'équation locale traduisant le premier principe de la thermodynamique, dans le cas d'un problème ne dépendant que d'une seule coordonnée d'espace en coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques

##### → Modélisation unidirectionnelle en coordonnées cartésiennes

On considère un matériau de **masse volumique  $\mu$  supposée ici constante**, de **capacité thermique massique  $c$** , à l'intérieur duquel peuvent exister des **sources internes d'énergie** (exemples : radioactivité, effet Joule...), on note  **$P_{th}$  la puissance volumique** apportée par ces processus.

Il évolue à **volume constant** de sorte que sa **variation d'énergie interne** s'exprime par  **$dU = C dT$**  avec la capacité calorifique (à volume constant).

On considère une **diffusion thermique unidirectionnelle** selon  $\vec{u}_x$ , avec un **vecteur densité de courant  $\vec{j}_Q = j_Q(x, t) \vec{u}_x$** , et l'on s'intéresse au volume  $dV$  compris entre  $x$  et  $x+dx$ , de section  $S$ , dont les **parois latérales sont calorifugées**, selon le schéma à suivre :



✓ Pour cet élément de volume, montrer qu'au premier ordre, la variation d'énergie interne  $d^2U$  entre  $t$  et  $t+dt$  s'exprime par :  $d^2U = c \mu S dx \frac{\partial T}{\partial t} dt$

Le **flux thermique élémentaire  $\delta^2 Q$**  associé à ce volume est la composition de deux termes : **flux échangé  $\delta^2 Q_e$  et flux créé  $\delta^2 Q_c$**  par les sources.

✓ En exploitant le vecteur densité de courant, montrer que le flux échangé s'exprime par :  $\delta^2 Q_e = - \frac{\partial j_Q}{\partial x} S dx dt$

✓ En exploitant la **puissance volumique thermique  $P_{th}$** , exprimer le flux thermique créé  $\delta^2 Q_c$  en fonction de cette puissance.

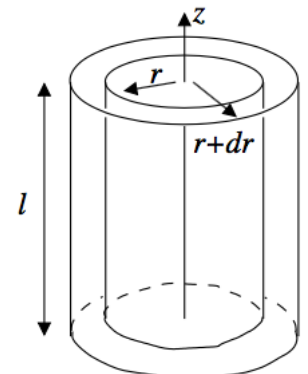
✓ Exploiter enfin le premier principe de la thermodynamique entre  $t$  et  $t+dt$  pour établir l'**équation locale du bilan énergétique** (appliqué à ce volume) :

$$\frac{\partial j_Q}{\partial x} + \mu c \frac{\partial T}{\partial t} = P_{th}$$

##### → Modélisation unidirectionnelle en coordonnées cylindriques

On considère maintenant un dispositif pour lequel le **champ de température** admet une **invariance par translation et rotation autour d'un axe  $Oz$** . La **température  $T(r, t)$**  ne dépend que du temps et de la variable  $r$  des coordonnées cylindriques.

On donne ici l'expression du gradient en coordonnées



cylindriques :  $\overrightarrow{\text{grad}} T = \frac{\partial T}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial T}{\partial z} \vec{u}_z$

✓ Montrer que dans cette configuration le vecteur densité de courant thermique est radial, et donner son expression.

Le **vecteur densité** ne dépend donc que de **r**, et de **t**.  
On réalise alors un bilan d'énergie pour un volume infinitésimal dV, compris entre deux cylindres coaxiaux de rayon r et r + dr et de longueur l.

✓ Pour cet élément de volume, montrer qu'au premier ordre, la variation d'énergie interne d<sup>2</sup>U entre t et t+dt s'exprime par :  $d^2U = c \mu S dr \frac{\partial T}{\partial t} dt$  avec S surface latérale  $S = 2\pi r l$

Le **flux thermique élémentaire**  $\delta^2 Q$  associé à ce volume est la composition de deux termes : **flux échangé**  $\delta^2 Q_e$  et **flux créé**  $\delta^2 Q_c$  par les sources.

✓ En exploitant le vecteur densité de courant, montrer que le flux échangé s'exprime par :  $\delta^2 Q_e = (\phi(r, t) - \phi(r + dr, t)) dt = -\frac{\partial(rj_Q)}{\partial r} \frac{S}{r} dr dt$

✓ En exploitant la **puissance volumique thermique**  $P_{th}$ , exprimer le flux

thermique  $\delta^2 Q_c$  créé en fonction de cette puissance.

✓ Exploiter enfin le premier principe de la thermodynamique entre t et t+dt pour établir l'**équation locale du bilan énergétique** (appliqué à ce volume) :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(rj_Q)}{\partial r} + \mu c \frac{\partial T}{\partial t} = P_{th}$$

### ➔ Modélisation unidirectionnelle en coordonnées sphériques

On considère maintenant un dispositif pour lequel le champ de température est à **symétrie sphérique**. La **température T(r,t)** ne dépend que du temps et de la variable r des coordonnées sphériques.

Dans une telle configuration, l'expression du gradient impose un **vecteur densité**

**de courant radial** :  $\vec{j}_Q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r} \vec{u}_r$

On réalise le bilan d'énergie pour un volume infinitésimal compris entre deux sphères concentriques de rayon r et r + dr.

✓ En reprenant les étapes du processus, montrer qu'en géométrie sphérique, pour un problème ne dépendant que d'une variable d'espace, le bilan thermique conduit

à l'équation locale :  $\frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 j_Q)}{\partial r} + \mu c \frac{\partial T}{\partial t} = P_{th}$



→ **Généralisation**

**Capacité** : admettre une généralisation en géométrie quelconque en utilisant l'opérateur divergence

Le premier principe de la thermodynamique se traduit par la relation locale (universelle), appliquée à un système de volume constant, dont la masse volumique est constante.

$$\text{div } \vec{J}_Q + \mu c \frac{\partial T}{\partial t} = P_{th}$$

Cette équation est à rapprocher de l'**équation de conservation de la charge**. La différence vient du second membre non nul avec la **présence d'un terme source**.

**5. Equation générale de la diffusion thermique**

**Capacité** : établir l'équation diffusion vérifiée par la température, avec ou sans terme source

→ **Outils mathématiques**

Notions et contenus	Capacités exigibles
<b>2. Analyse vectorielle</b>	
d) laplacien d'un champ scalaire	Définir $\Delta f = \text{div}(\text{grad } f)$ . Exprimer le laplacien en coordonnées cartésiennes.

On donne ici la relation générale qui permet d'expliciter la composition des opérateurs spatiaux différentiels, appliquée à un champ scalaire  $f(M)$ , dans un repérage quelconque :  $\Delta f = \text{div}(\text{grad } f)$  avec  $\Delta$  l'opérateur laplacien

En coordonnées cartésiennes, les opérateurs individuels s'expriment selon :

- **divergence** appliquée à un **champ de vecteur** :  $\vec{A} = A_x \vec{e}_x + A_y \vec{e}_y + A_z \vec{e}_z$

$$\text{div } \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

- **gradient** appliqué à un **champ scalaire**  $f(M)$  :  $\text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z$

✓ Exprimer la composition d'opérateurs  $\text{div}(\text{grad } f)$  en coordonnées cartésiennes. Montrer que cette composition est en adéquation avec la formule générale de composition, le laplacien s'exprimant par :

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$



→ Equation pilote en présence de sources

✓ En exploitant la loi de Fourier dans le bilan d'énergie, montrer que l'équation pilote de la diffusion de température, en présence de sources, s'exprime par :

$\mu c \frac{\partial T}{\partial t} - \lambda \Delta T = P_{th}$  -> en coordonnées cartésiennes à 1D  $\mu c \frac{\partial T}{\partial t} - \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = P_{th}$

→ Equation pilote sans terme source

Sans terme source, on obtient facilement :  $\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\lambda}{\mu c} \Delta T = \frac{\partial T}{\partial t} - D_{th} \Delta T = 0$

Il ne s'agit pas d'une équation de propagation, car la **dérivée temporelle** est **d'ordre 1** seulement. On parle d'**équation de diffusion**.

Les propriétés du matériau vis-à-vis de la diffusion thermique font apparaître un paramètre scalaire appelé **diffusivité thermique**, ou **coefficient de diffusion**, noté **D<sub>th</sub>**.

✓ Par analyse dimensionnelle, montrer que la dimension de D<sub>th</sub> est :

$[D_{th}] = \frac{[longueur]^2}{[temps]}$

Le tableau ci-dessous donne des ordres de grandeurs de diffusivité thermique pour un solide bon conducteur thermique (cuivre), des solides mauvais conducteurs (granite, béton, bois), un liquide (eau) et un gaz (air).

Matériau	Cuivre	Granite	Béton	Bois	Eau	Air
D <sub>th</sub> en m <sup>2</sup> .s <sup>-1</sup>	1,2.10 <sup>-4</sup>	1,4.10 <sup>-6</sup>	7.10 <sup>-7</sup>	1,3.10 <sup>-7</sup>	1,5.10 <sup>-6</sup>	2,2.10 <sup>-5</sup>

→ Analyse dimensionnelle et lien entre les échelles caractéristiques spatiale et temporelle

**Capacité** : analyser une équation de diffusion en ordre de grandeur pour relier des échelles caractéristiques spatiale et temporelle

On nomme L la distance caractéristique de la diffusion, et τ son temps caractéristique.

✓ En analysant l'équation pilote de diffusion en ordre de grandeur, montrer que les échelles spatiale et temporelle de la diffusion sont reliées par :  $L = \sqrt{D_{th} \tau}$

Les variations dans l'espace et le temps sont donc « **dissymétriques** ».

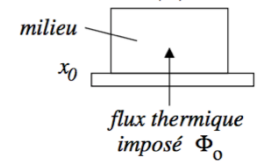
✓ Evaluer les durées nécessaires pour homogénéiser la température d'un solide de diffusivité D<sub>th</sub> = 10<sup>-4</sup> m<sup>2</sup>.s<sup>-1</sup>, dans le cas d'une taille typique L<sub>1</sub> = 1 cm et L<sub>2</sub> = 1 m (longueur \*100).

Les **phénomènes diffusifs** ne sont **efficaces** qu'à **faible échelle spatiale** (faible distance). Dans les gaz et les liquides, les phénomènes de diffusions seront rapidement masqués par les phénomènes de convection à grande échelle spatiale. D'autre part, la diffusion est un **phénomène très rapide aux temps courts**, qui **s'essouffle aux temps longs** (s'il n'est pas entretenu).

→ Comportement par renversement du temps

**Capacité** : relier l'équation de diffusion à l'irréversibilité temporelle de la diffusion thermique

La dérivée partielle  $\frac{\partial T}{\partial t}$  est un taux d'accroissement, renverser le temps revient à changer dt en - dt, et change donc  $\frac{\partial T}{\partial t}$  en  $-\frac{\partial T}{\partial t}$



**L'équation de diffusion** (contrairement à l'équation d'Alembert de propagation), n'est **pas invariante par renversement du temps**.

Ce résultat est conforme au deuxième principe de la thermodynamique : la **diffusion thermique** présente un caractère **irréversible**, autrement dit il est impossible de transférer de la chaleur d'un corps froid vers un corps chaud sans travail (énoncé de Clausius du second principe).

➔ **Linéarité de l'équation de diffusion**

**Capacité** : exploiter la linéarité de l'équation de diffusion  
L'équation de diffusion est une équation aux dérivées partielles **linéaire** (à coefficients constants). On peut donc superposer des solutions particulières connues pour la résoudre, et exploiter les **solutions harmoniques** comme base de solutions (notation complexe...).

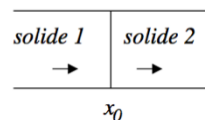
## 6. Conditions aux limites

L'équation de diffusion dépend du temps et de variables spatiales. Pour la **résoudre**, il faut donc disposer de **conditions initiales sur la température**, par exemple « en  $t = 0$ , la température est de 295 K en tout point du volume du système », mais aussi de **conditions aux limites** : contraintes sur les variables spatiales, à la frontière extérieure du système (surface extérieure). C'est la grande variété de ces conditions qui engendre une grande diversité de solutions pour l'équation de diffusion. Nous allons donc insister sur les conditions aux limites les plus souvent rencontrées. Nous détaillons d'abord **deux cas du contact entre solides**, puis nous réserverons un paragraphe au **contact fluide/solide**.

➔ **Cas du contact entre deux solides sans flux imposé**

**Capacités** :  
- exploiter la continuité de la température de la température pour un contact thermique parfait  
- exploiter la continuité du flux thermique

On envisage le cas d'un contact entre deux solides sur une frontière infiniment mince. Pour éviter que le flux thermique, qui met en jeu les dérivées spatiales de la température (divergence de la température), ne diverge sur cette frontière, la **température** doit être **continue sur l'interface** à tout instant:



$$T_1(x_0^-, t) = T_2(x_0^+, t) \rightarrow \text{c'est la condition de contact thermique parfait}$$

D'autre part, sur cette interface, considérée comme infiniment mince (de section  $S$ ), il ne peut pas y avoir d'accumulation d'énergie, ce qui y impose l'**égalité des flux thermiques** qui s'écrit :

$$S\lambda_1 \frac{\partial T}{\partial x}(x_0^-, t) = S\lambda_2 \frac{\partial T}{\partial x}(x_0^+, t) \text{ soit } \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x}(x_0^-, t) = \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x}(x_0^+, t)$$

Pour une situation plus générale que cet exemple unidimensionnel, on admettra :

A l'interface entre deux solides fixes, la **composante normale du vecteur densité de courant est continue** ( $\vec{J}_{Q1} \cdot \vec{n} = \vec{J}_{Q2} \cdot \vec{n}$ ).

➔ **Cas du contact entre deux solides avec flux imposé : nul dans le cas du contact avec un paroi calorifugée**

Toujours dans le cas d'une modélisation unidimensionnelle, si on impose un flux thermique  $\phi_0$  à travers une section  $S$  située à l'extrémité  $x_0$  du matériau :

$$\phi_0 = \vec{J}_Q(x_0, t) S = -\lambda S \frac{\partial T}{\partial x}(x_0, t)$$

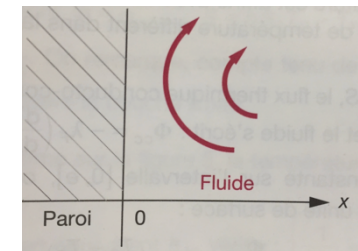
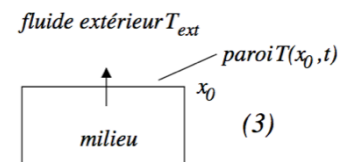
**Capacité** : traduire le contact avec une paroi calorifugée

En particulier, si la **paroi est calorifugée** :  $\frac{\partial T}{\partial x}(x_0, t) = 0$

Plus généralement, une **paroi calorifugée impose la nullité de la composante normale du vecteur densité de courant** ( $\vec{J}_Q \cdot \vec{n} = 0$ ).

## 7. Conditions aux limites : focus sur l'interface fluide/solide

➔ **Présentation de la modélisation**



On s'intéresse particulièrement ici au cas de l'**échange thermique entre un corps solide et un fluide** animé de mouvements convectifs, c'est la situation très fréquente d'un solide plongé dans un gaz (air d'une pièce pour un radiateur...), ou un liquide (bain thermostaté).



Pour modéliser simplement ce système, nous considérons un problème unidimensionnel en régime stationnaire (figures ci-dessus).

Discutons avec attention les conditions aux limites sur l'interface solide/fluide.

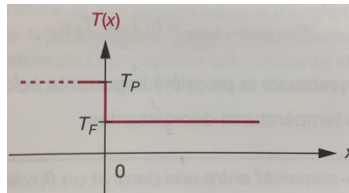
**- première hypothèse : prépondérance de la conduction**

Supposons d'abord que, naturellement, le fluide impose sa température  $T_{ext}$  ou  $T_F$  (température du fluide) à la surface du solide, la condition aux limites serait  $T_F = T_P$  (température de la paroi  $T(x_0, t)$ ). Ainsi la température du fluide serait identique au voisinage de la paroi qu'à distance dans le fluide, et il serait **impossible au fluide d'évacuer de la chaleur provenant du solide par transfert diffusif** (flux nul en l'absence de gradient).

**- deuxième hypothèse : prépondérance de la convection**

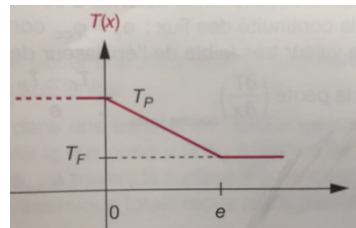
Le fluide est animé de mouvements de convection qui provoquent une **homogénéisation de sa température** : le brassage est suffisant pour que la température du fluide soit constante spatialement, égale à  $T_F$ . On observe alors un gradient de température « brutal » à l'interface (selon le graphe ci-contre).

Mais selon cette hypothèse, la **discontinuité de température impose un gradient divergent** (infini), ce qui ne reflète pas une situation physiquement acceptable.



En réalité, la **solution est intermédiaire** : dans une zone située au voisinage immédiat de l'interface, côté fluide, le fluide est immobile sur la surface de contact (pour respecter la continuité des vitesses au contact de la paroi immobile), puis sa vitesse augmente dans cette zone jusqu'à atteindre une vitesse limite.

Dans cette portion de fluide, appelée **couche limite**, la vitesse est suffisamment faible, pour y envisager un **transport dominé par la conduction**. Ainsi un exemple de profil de température est représenté ci-contre : on y trouve un **gradient de température important dans une couche limite** (d'épaisseur  $e$ ). Dans cet exemple, le fluide est considéré immobile dans la couche limite, avec un transport diffusif uniquement. On obtient alors un gradient constant dans la couche limite, la réalité est souvent plus complexe.



➔ **Coefficient de transfert conducto-convectif**

Pour rendre compte de cette **compétition entre transports diffusif et convectif**, au **voisinage de l'interface solide/fluide**, on utilise une **loi phénoménologique**, appelée **loi de Newton** qui exprime le **courant conducto-convectif** (cc) :

$$j_{cc}(\text{paroi} \rightarrow \text{fluide}) = h(T_P - T_F) \quad \text{soit} \quad \delta^2 Q_{cc} = h(T_P - T_F) dS dt$$

Le **vecteur densité de courant** est **proportionnel à la différence de température solide/fluide** (discontinuité apparente dans nos hypothèses). Cette relation est **l'équivalent de la loi de Fourier** pour un contact solide/fluide. Le transfert se réalise aussi dans le sens des températures décroissantes.

Le **coefficient h** de transfert conducto-convectif est homogène à :

$$\left[ \frac{\lambda}{\text{longueur}} \right] = \text{W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$$

Remarque

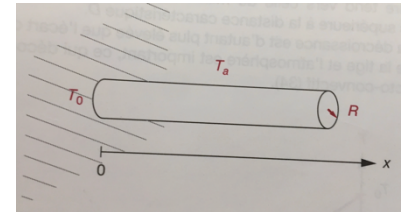
Dans la modélisation d'un **fluide immobile dans la couche limite**, on peut démontrer que  **$h = \lambda/e$** , car le **gradient de température y est constant** égal à  $(T_P - T_F) / e$  (approximation « naturelle » au premier ordre en variation de température), en effet par égalité des flux au travers de la couche limite totale :

$$\phi_{cc}(\text{paroi}) S = h(T_P - T_F) S = \phi(\text{couche limite}) S = -\lambda(\text{fluide}) \frac{dT}{dx}(\text{couche})$$

$$\rightarrow \frac{\lambda}{e} h(T_P - T_F) = h(T_P - T_F) \rightarrow h = \frac{\lambda}{e}$$

La valeur du **coefficient h** dépend de la **nature du fluide**, et de l'**épaisseur de la couche limite** (par la viscosité du fluide notamment). Ce coefficient h est **plus élevé pour un liquide** :  $h > 100 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$ , **que pour un gaz**  $h \approx 10 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$ .

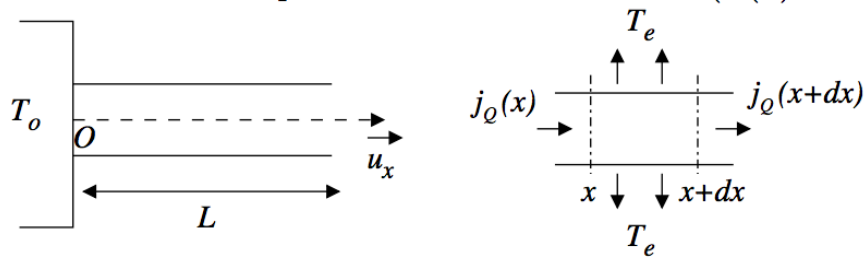
Par ailleurs, **h augmente fortement** dans le cas d'une **convection forcée** (on impose le mouvement au fluide). On prendra attention dans son bain, déjà trop chaud, de ne pas s'agiter pour ne pas amplifier les échanges thermiques, et renforcer la sensation de chaud !! Ou inversement, souffler sur son bol de lait chaud pour amplifier le transfert thermique conducto-convectif et le refroidir plus vite.



➔ **Résolution d'un cas pratique : ailette de refroidissement**

Mise en situation

Pour mettre en évidence un système intégrant des transferts diffusifs et conducto-convectifs, on cherche à déterminer le **profil de température T(x)** atteint en **régime stationnaire** dans ailette de refroidissement (en forme de tige), dont une extrémité est maintenue à **T\_0**.



La **température de l'air** environnant est **constante et uniforme** de valeur  $T_e$ . Le **transfert thermique latéral** entre la tige et l'extérieur est régi par la **loi de Newton**, caractérisée par un coefficient  $h$ . On envisage un **problème unidimensionnel**, avec une température qui ne dépend que de  $x$ .

Mise en équation de la température : obtention de l'équation différentielle pilote

**Capacité** : utiliser la loi de Newton à l'interface solide/fluide

On note  $R$  le rayon de la barre.

✓ En régime stationnaire, exploiter le premier principe pour réaliser un bilan local appliqué entre  $x$  et  $x+dx$ , et montrer que l'équation différentielle qui pilote

l'évolution de la température est :  $\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{T-T_e}{l^2} = 0$

Exprimer la distance caractéristique  $L$ .

Conditions aux limites

**Capacité** : exploiter la continuité de la température pour un contact thermique parfait

✓ Pour l'extrémité en  $x = 0$  (contact solide/solide), exprimer la condition aux limites pour ce contact parfait.

Pour l'autre extrémité de la tige, on retient le modèle simple d'une tige de longueur infinie.

Résolution

✓ Montrer que le profil de température s'exprime par :  $T(x) = (T_0 - T_e)e^{-\frac{x}{L}} + T_e$   
Représenter le profil de température de l'ailette.

- la **température tend vers celle du milieu** lorsque la distance à l'origine est très supérieure à  $L$
- la **pente de décroissance** est d'autant **plus élevée** que l'**écart de température** est **grand**, conformément à la loi de Newton

- L la **distance caractéristique d'homogénéisation** de la température dépend des caractéristiques du milieu environnant ( $h$ ) et de la tige ( $\lambda, R$ )

Ordre de grandeur de la distance caractéristique  $L$

✓ Le rayon de l'ailette est de  $R = 2$  mm, sa longueur de  $l = 20$  cm, sa conductivité thermique  $\lambda = 16$  W.m<sup>-1</sup>.K<sup>-1</sup> et  $h = 150$  SI. L'hypothèse de la tige infiniment longue est-elle validée ?

Flux thermique et puissance évacuée par l'ailette

Pour déterminer le flux évacué par l'ailette, deux méthodes se présentent : soit évaluer le flux diffusif entrant en  $x = 0$ , soit évaluer le flux conducto-convectif évacué par la totalité de la surface latérale de l'ailette. En effet, ces deux flux sont égaux en régime stationnaire, car le flux sortant en  $x = l$  (en bout de tige) est nul : la température  $y$  est égale à la température extérieure dans le modèle de l'ailette infiniment longue.

On choisit d'évaluer le flux entrant en  $x = 0$ .

**Capacité** : exploiter la continuité du flux thermique

✓ Montrer que le flux de conduction entrant s'exprime par  $\Phi_c(0) = \frac{\lambda}{l} \pi R^2 (T_0 - T_e)$   
 Evaluer la puissance thermique associée pour  $T_0 = 60^\circ\text{C}$  et  $T_e = 20^\circ\text{C}$

En l'absence d'ailette, le flux conducto-convectif évacué par une le disque de rayon  $R$  est :  $\Phi_{cc} = j_{cc} \pi R^2 = h \pi R^2 (T_0 - T_e)$

✓ Comparer les ordres de grandeurs des flux en présence et absence d'ailette pour justifier son efficacité.

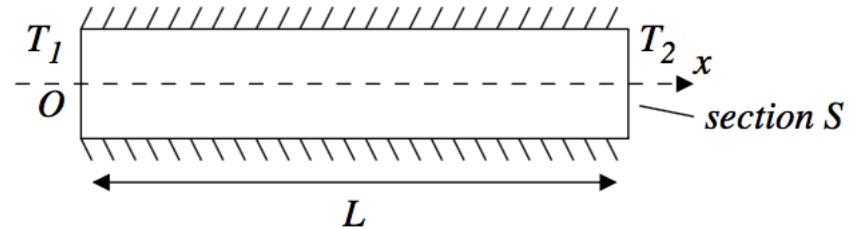
Résumé des conditions aux limites

Frontière $\Sigma$ en contact avec un thermostat à la température $T_0$	La température est continue $T(M, t) = T_0 \quad \forall M \in \Sigma.$
Frontière calorifugée.	Le flux thermique est nul à travers la frontière.
Jonction entre deux solides	Le flux thermique et la température sont continus à la traversée de la jonction.
Frontière solide $\Sigma$ au contact d'un fluide à la température $T_0$	Loi de Newton : $j_{th}(M, t) = h(T(M, t) - T_0) \quad \forall M \in \Sigma.$

III. Régime stationnaire, ARQS

1. Résistance ou conductance thermique

➔ Exemple d'un barreau calorifugé



Mise en situation

On considère un barreau **calorifugé latéralement** de grande longueur  $L$ , de conductivité  $\lambda$ , soumis à ces deux extrémités aux températures  $T_1$  et  $T_2$  ( $T_1 > T_2$ ). Le problème est **unidirectionnel** avec  $\vec{j}_Q = j_Q(x) \vec{u}_x$ . On respecte ainsi la condition d'une composante normale aux parois latérales calorifugées qui impose sa nullité.

Expression de la résistance thermique

**Capacité** : établir l'expression de la résistance thermique d'un cylindre calorifugé latéralement

✓ Dans le cadre d'un **régime stationnaire**, exploiter la **conservation du flux thermique**, pour établir l'expression du gradient de température  $\frac{dT}{dx}$  en fonction du flux thermique, noté  $\phi$ .

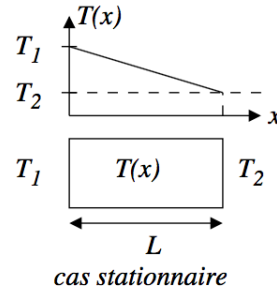
✓ Intégrer cette expression pour établir la relation qui définit la **résistance thermique**  $R_{th}$  :  $T_1 - T_2 = R_{th} \phi$



**En régime stationnaire** l'équation pilote de diffusion thermique, en l'absence de termes sources devient :

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\lambda}{\rho c} \Delta T = 0 \rightarrow \Delta T = \frac{d^2 T}{dx^2} = 0$$

-> la nullité du laplacien impose une **fonction affine de x pour la température** :  $T(x) = T_1 + (T_2 - T_1) x/L$



On obtient le même flux en exploitant la loi de Fourier, et la même résistance thermique :  $\phi = jS = -\lambda S \frac{dT}{dx} = \frac{\lambda S}{L} (T_1 - T_2)$

### → Généralisation

#### Capacité :

- définir la notion de résistance thermique par analogie avec l'électrocinétique
- énoncer les conditions d'application de l'analogie

L'expression de la résistance thermique  $R_{th}$  présente une analogie formelle remarquable avec la loi d'Ohm applicable à un conducteur ohmique de résistance électrique R :

$$T_1 - T_2 = R_{th} \phi \quad \leftrightarrow \quad V_1 - V_2 = R I$$

L'exemple précédent a montré que trois conditions sont nécessaires pour définir la notion de résistance thermique -> **régime permanent** -> **absence de sources internes** -> **aucune perte latérale**.

On définit aussi la **conductance thermique**  $G_{th} = 1/R_{th}$

### → Association de résistances thermiques en série et parallèle

**Capacité** : exploiter des associations de résistances thermiques en série ou en parallèle

#### Association en série

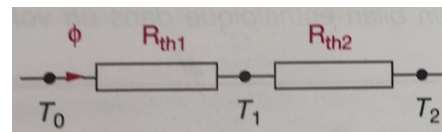
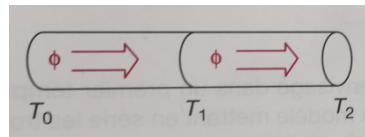
Considérons deux tiges caractérisées par leur résistances thermiques et mises bout à bout : en série. En l'absence de fuites thermiques aux interfaces, le flux thermique est constant.

Pour chaque tige :  $(T_0 - T_1) / \phi = R_{th1}$  et  $T_1 - T_2 / \phi = R_{th2}$

et l'association série  $T_0 - T_2 / \phi = R_{eq}$

La relation simple  $T_0 - T_2 = (T_0 - T_1) + (T_1 - T_2)$  divisée par  $\phi$  donne :

$$R_{eq} = R_{th1} + R_{th2}$$

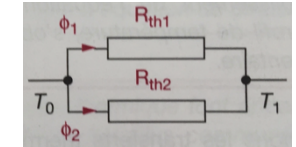
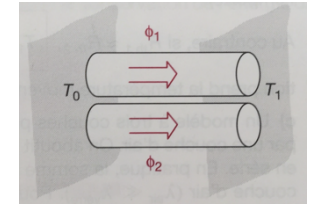


#### Association en parallèle

Considérons deux tiges dont les températures aux extrémités sont identiques : association en parallèle. Le flux thermique total est défini comme la somme des flux traversant chaque tige :  $\phi = \phi_1 + \phi_2$ . Avec  $(T_0 - T_1) = R_{eq} \phi$  ;  $(T_0 - T_1) = R_{th1} \phi_1$  et  $(T_0 - T_1) = R_{th2} \phi_2$ , on aboutit à :

$$R_{eq} = \frac{R_{th1} R_{th2}}{R_{th1} + R_{th2}}$$

On aurait pu raisonner sur les conductances qui s'ajoutent simplement.



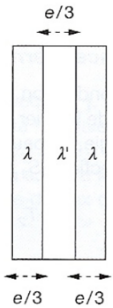
#### Pont diviseur de température

Dans le cas de l'association série précédente pour déterminer la température intermédiaire  $T_1$ , on peut utiliser le pont diviseur :

$$T_1 - T_2 = \frac{R_{th2}}{R_{th1} + R_{th2}} (T_0 - T_2)$$

#### Application au double vitrage

Prenons le cas d'un double vitrage associant une vitre de surface S, d'épaisseur  $e/3$  et de conductivité  $\lambda$ , une épaisseur de gaz peu dense de conductivité faible  $\lambda' \approx \lambda/100$  et une deuxième vitre identique à la première.



✓ Montrer que la résistance équivalente s'exprime par  $R_{eq} = \frac{e}{\lambda S} \left( \frac{2}{3} + \frac{\lambda}{3\lambda'} \right)$   
Quelle serait la résistance thermique d'une vitre de même encombrement ?  
Conclure.

## 2. ARQS, analogie électrocinétique avec un circuit RC

### → Condition d'application de l'ARQS : temps caractéristiques

#### Capacités :

- mettre en évidence un temps caractéristique d'évolution de la température
- justifier l'ARQS

L'analyse dimensionnelle de l'équation de diffusion thermique en régime variable a fait apparaître le temps caractéristique  $\tau_{diff}$  :

$$\tau_{diff} = \frac{L^2}{D_{th}}$$

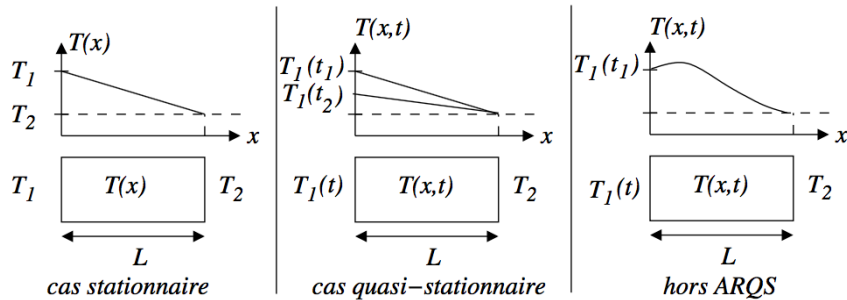
L'approximation des régimes quasi-stationnaires ARQS est valable si le temps caractéristique d'évolution de la température  $\tau$  (par exemple la période d'une évolution sinusoïdale) est grand devant la durée du régime transitoire  $\tau_{diff}$  :

$$\tau \gg \tau_{diff} = \frac{L^2}{D_{th}}$$

Le système a alors le temps d'adapter le profil de température réel au profil de température stationnaire, quelque soit la position dans le barreau.

Dit autrement, il s'agit d'une approximation pour les « régimes de **température lentement variable** ».

Précisons cette idée sur l'exemple du barreau conducteur.



Considérons (ci-dessus) une évolution de la température  $T_1$  à une extrémité du barreau.

Pour un temps donné comme  $t_1$ , en ARQS, on obtient un profil analogue au cas stationnaire, contrôlé par exemple par  $\Delta T = 0 \rightarrow$  profil de température affine, les résultats établis en régime stationnaire s'appliquent (résistance thermique...).

Un temps plus tard, il y a variation de  $T_1$  entre  $t_1$  et  $t_2$ . Cette évolution est suffisamment lente pour que le profil demeure affine en  $t_2$ , la durée du régime transitoire est négligeable en comparaison de la durée de d'évolution de  $T_1$ , le barreau se met immédiatement à l'équilibre (profil affine).

Hors ARQS, le profil de température dans le barreau n'est plus celui du régime permanent, la notion de résistance thermique n'est plus applicable.

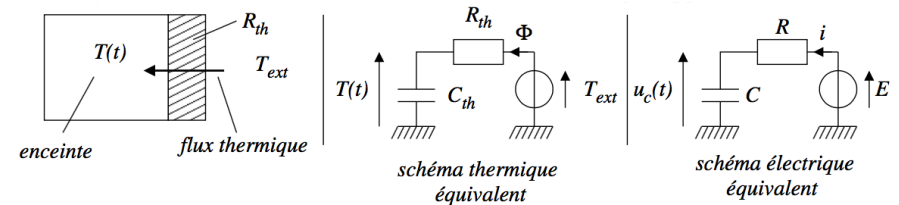
### ➔ Application : analogie électrocinétique

**Capacité** : établir l'analogie avec un circuit électrique RC

On considère une enceinte de capacité thermique  $C_{th}$  à la température  $T(t)$  mise au contact d'une source de chaleur à la température  $T_{ext}$  via une isolation de résistance thermique  $R_{th}$ .

La capacité  $C_{th}$  de l'enceinte est supposée suffisante pour que les conditions de

l'ARQS soient vérifiées et la notion de résistance thermique applicable.



Problème thermique	Problème électrique
Premier principe enceinte	caractéristique condensateur
$C_{th} dT = \delta Q = \Phi dt$	$C \frac{du_c}{dt} = i$
$\Phi = \frac{T_{ext} - T(t)}{R_{th}}$	$i = \frac{E - u_c}{R}$
$R_{th} C_{th} \frac{dT}{dt} + T = T_{ext}$	$RC \frac{du_c}{dt} + u_c = E$

## IV. Ondes thermiques

Après avoir considéré les cas du régime stationnaire et de l'ARQS, on s'intéresse à un problème nécessitant de prendre en compte l'équation de diffusion sous sa forme générale.

### 1. Relation de dispersion

On cherche des solutions harmoniques de l'équation de diffusion linéaire, dans un problème à géométrie cartésienne unidimensionnelle, se propageant selon  $\vec{u}_x$  :

$$T(x, t) = \Re_e(\underline{T}(x, t)) \text{ avec } \underline{T}(x, t) = \underline{T}_M e^{j(\omega t - kx)}$$

Nous rappelons ici les équivalences des dérivées partielles en notation complexe :

$$\frac{\partial \underline{T}}{\partial t} = j\omega \underline{T} \text{ et } \frac{\partial \underline{T}}{\partial x} = -jk \underline{T}$$

**Capacité** : établir la relation de dispersion des ondes thermiques en géométrie unidirectionnelle



On cherche alors à caractériser le **profil de la température dans le sous-sol en régime forcé**.

Le sol est modélisé par un demi-espace  $x > 0$  homogène, de conductivité thermique  $\lambda$ , de capacité thermique massique  $c$  et de masse volumique  $\mu$ , telles que  $D_{th} = 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ .

✓ En superposant  $T_0$  à la solution générale de l'onde amortie, montrer que la température s'exprime par :  $T(x,t) = T_0 + T_1 e^{-\frac{x}{\delta}} \cos(\omega t - \frac{x}{\delta})$   
 Identifier le terme d'amortissement.

✓ Evaluer la distance caractéristique d'atténuation pour l'alternance jour/nuit, et pour l'alternance des saisons (on prendra un temps d'une année).

On remarque un **déphasage présent dans cette onde en « t - x/v », ou retard de propagation** par le terme  $\frac{x}{\delta}$  dans le cosinus, du à la **diffusion de l'onde à la vitesse  $v = \omega / \text{Re}(k)$**  :

$$\cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right) = \cos\left(\omega t - \text{Re}(k)x\right) = \cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\right) = \cos\left(\omega t - \text{Re}(k)x\right)$$

Pour des **profondeurs différentes**, les **fluctuations oscillent avec des déphasages, ou retards, différents**.

Cependant, le terme de déphasage est impropre pour cette onde qui **s'atténue rapidement sur la distance  $\delta$**  : pas de propagation selon  $x$  à proprement parler. Il s'agit de « pseudo-propagation » avec **atténuation exponentielle sur une distance  $\delta$**  -> 0,5 % à  $3 \delta$ , et **pour une période spatiale de  $2\pi \delta \sim 6 \delta$**  -> soit environ **une demi-oscillation** -> cf graphe d'évolution de la température selon  $x$  (à  $t$  fixé) ci-dessous.

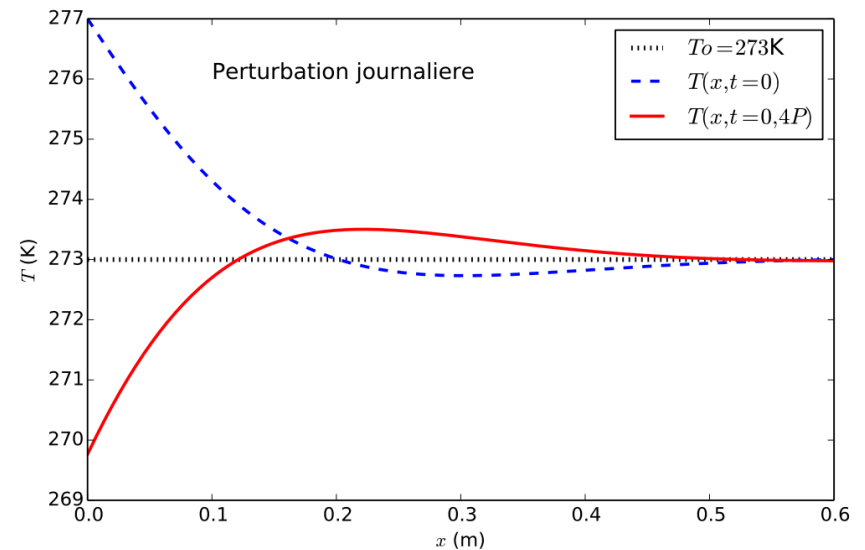
Dans notre exemple, on comprend bien l'intérêt des caves profondes, pour préserver des produits, comme le champagne, des fluctuations extérieures de température.

Remarque

Pour cette pseudo-onde plane progressive « t - x/v » (dans le cosinus), la vitesse est  $v_\varphi = \delta \omega = \sqrt{2D_{th}\omega}$  : la vitesse de propagation de la phase dépend de  $\omega$   
 -> le milieu est donc dispersif vis-à-vis des ondes thermiques  
 -> la vitesse de diffusion est plus grande pour les ondes

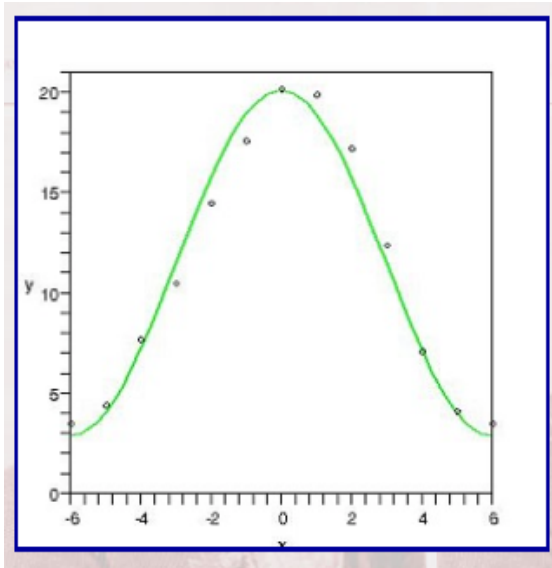
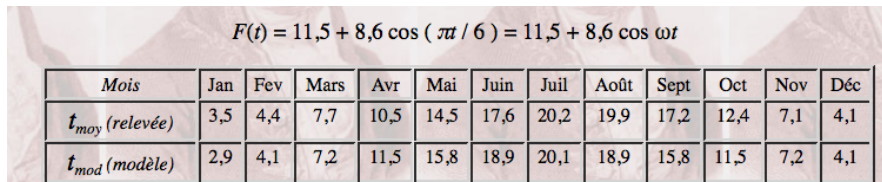
Exemple d'évolution de températures selon x

T(x,t) à t donné, pour deux différents instants  $t = 0$  et  $t = 0,4 P$



### Exemple d'évolution de températures selon t

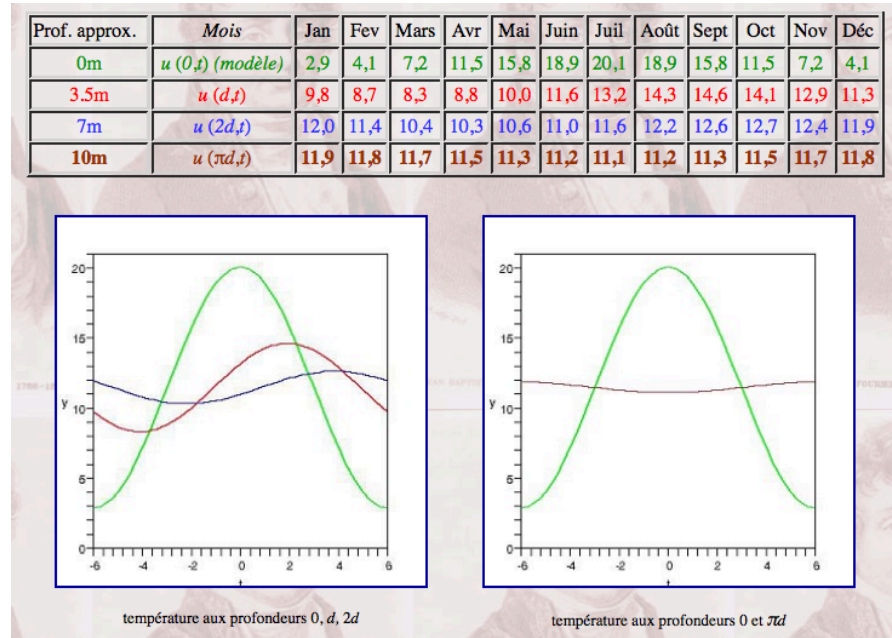
Si vous avez visité des grottes, des caves de vigneron, on vous aura inmanquablement dit : « La température n'y varie pratiquement pas tout au long de l'année, et vaut... » (idéal pour la conservation de ces précieux liquides...) Prenons l'exemple d'un relevé de température atmosphérique annuel pour la ville d'Auxerre (cf wikipedia par exemple). Une **modélisation sinusoïdale de ces fluctuations** semble tout à fait acceptable, avec un écart faible de moins de 1°C (mis à part la douceur relative des mois d'août et de septembre, bien utile à la réussite des vendanges !!).



Avec  $D_{\text{th}} = 1,2 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$   
 $\omega = 2 \cdot 10^{-7} \text{ rd} \cdot \text{s}^{-1}$

On obtient une épaisseur de peau  $d = 3,5 \text{ m}$ .

Les courbes ci-dessous montrent l'évolution temporelle de la température pour différentes profondeurs :  $x = 0$  ;  $x = d$  ;  $x = 2d$  ;  $x = \pi d$



La valeur moyenne en sous-sol demeure toujours la même (tant qu'il n'y a pas de source froide par exemple en sous-sol), alors que l'amplitude des fluctuations diminue rapidement avec la profondeur.

La valeur particulière  $x = \pi d$  permet d'avoir un déphasage de  $\pi$  entre température au sol ( $x=0$ ) et température à la profondeur ( $x=\pi d$ ) : pour cette profondeur, il fait le plus froid en sous-sol alors qu'il fait le plus chaud en surface !!



## Conclusion : ce qu'il faut retenir !!

### • Loi de Fourier

Pour décrire la conduction thermique, on est amené à définir un vecteur *densité de courant thermique*  $\vec{j}_Q$ , dont le flux à travers une surface donne la puissance transférée :

$$\Phi = \iint_S \vec{j}_Q \cdot d\vec{S}$$

La loi de Fourier lie  $\vec{j}_Q$  au gradient de température et à la conductivité du matériau :

$$\vec{j}_Q = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T$$

### • Analogies

Les lois de conduction thermique et électrique sont tout à fait analogues, le tableau ci-dessous résume les correspondances.

Thermique	Électrique
$\vec{j}_Q = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T$	$\vec{j}_e = -\gamma \overrightarrow{\text{grad}} V$
$\Phi = \iint_S \vec{j}_Q \cdot d\vec{S}$	$I = \iint_S \vec{j}_e \cdot d\vec{S}$
$T$	$V$
$\lambda$	$\gamma$
$\Phi$	$I$

### • Résistance thermique

En régime stationnaire, on peut proposer une relation intégrale mettant en évidence une résistance thermique  $R_{th}$  :

$$T_0 - T_1 = R_{th} \Phi$$

Pour un cylindre de longueur  $L$  et section  $S$ ,  $R_{th} = \frac{L}{\lambda S}$ .

En série et parallèle, les règles d'association donnent :

$$R_{th \text{ 1 série 2}} = R_{th \text{ 1}} + R_{th \text{ 2}} \quad \text{et} \quad R_{th \text{ 1 // 2}} = \frac{R_{th \text{ 1}} R_{th \text{ 2}}}{R_{th \text{ 1}} + R_{th \text{ 2}}}$$

## ÉQUATION DE LA CHALEUR

### • Cas unidimensionnel

Dans un milieu unidimensionnel homogène, la température est fonction d'une variable d'espace  $x$  et du temps  $t$ . L'équation de conservation de l'énergie thermique prend la forme locale suivante :

$$\frac{\partial j_Q}{\partial x} + \mu c_p \frac{\partial T}{\partial t} = 0$$

En tenant compte de la loi de Fourier, on obtient l'équation de la diffusion thermique :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{\mu c_p}{\lambda} \frac{\partial T}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} - D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$$

La dérivée temporelle est d'ordre 1 seulement (équation de diffusion).

La diffusivité thermique est définie comme  $D = \frac{\lambda}{\mu c_p}$ . Sa dimension est  $\frac{[\text{longueur}]^2}{[\text{temps}]}$ .

### • Cas tridimensionnel

L'équation de la diffusion thermique, dans le cas tridimensionnel, s'écrit :

$$\frac{\partial T}{\partial t} - D \Delta T = 0$$

### • Prise en compte d'un terme de source

Si  $p$  est la densité volumique de puissance traduisant l'apport thermique en chaque point considéré, l'équation de diffusion avec terme de source s'écrit :

$$\mu c \frac{\partial T}{\partial t} - \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = P_{th}$$

$$\mu c \frac{\partial T}{\partial t} - \lambda \Delta T = P_{th}$$

Dans le cas tridimensionnel,

## RÉSOLUTION DANS LE CAS GÉNÉRAL

Le régime transitoire d'un phénomène de diffusion thermique s'étudie à partir de l'équation locale de diffusion, des conditions aux limites et des conditions initiales.

- On peut rechercher des solutions par séparation de variables :  $\theta(x, t) = X(x) \cdot \Gamma(t)$ .
- Les conditions aux limites conduisent à des solutions faisant apparaître des nombres entiers (quantification).
- On peut construire une solution générale par combinaison linéaire de modes, en utilisant les séries de Fourier pour vérifier les conditions initiales.

## TRANSFERT CONDUCTO-CONVECTIF

### • Modèle

L'échange thermique entre une paroi solide et un fluide animé de mouvements convectifs fait apparaître un profil de température semblant présenter une discontinuité.

En réalité, une couche limite existe où règne un gradient de température.

La loi de Newton exprime le flux conducto-convectif par unité de surface :

$$\varphi_{cc \text{ paroi} \rightarrow \text{fluide}} = h(T_p - T_f) = j_{cc}$$

où  $h$  est le coefficient de transfert conducto-convectif (en  $\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$ ).

En fonction de la conductivité du fluide et de l'épaisseur de la couche limite,  $h = \frac{\lambda_f}{e}$ .