

Sujet E3A 2015 PSI Physique et Modélisation – Calcul d'intégrale par la méthode des rectangles

F Calcul d'une intégrale

L'objectif de cette partie est d'étudier une méthode générale d'intégration. On l'utilisera pour

obtenir une valeur numérique approchée de : $I = \int_0^\pi \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta} d\theta$

L'application $f : x \mapsto \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos(x)\right)}{\sin(x)}$ est continue sur $]0,\pi[$ et est prolongeable par continuité en 0 et π en posant $f(0) = f(\pi) = 0$. L'intégrale I est donc bien définie.

La méthode des rectangles consiste à approcher l'intégrale par la suite $(R_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie pour notre fonction f par :

$$R_1 = 0 \text{ et pour tout } n \geq 2, R_n = \lambda_n \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$

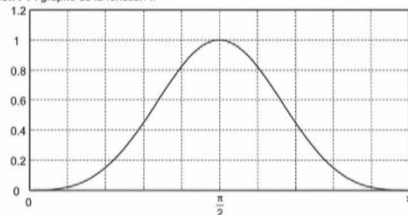
où λ_n désigne un nombre réel qu'il faudra préciser.

Annexe : Document réponse

Question E1 : fonction Resolution en langages Python et Scilab.

En langage Python :	En langage Scilab :
<pre>def Resolution(N,eps) : valeurs=[i*300/N for i in range(-N,N+1)] for X1 in valeurs : for X2 in valeurs : if abs(X1(X1,X2))<eps : sol1=sol1.append(X1) sol2=sol2.append(X2) return [sol1,sol2]</pre>	<pre>function [sol1,sol2]=Resolution(N,eps) valeurs=-300 : 300/N : 300 ; for X1=valeurs for X2=valeurs if abs(X1(X1,X2))<eps then sol1=[sol1, X1] ; sol2=[sol2, X2] ; end ; end ; end ; endfunction</pre>

Question F1 : graphe de la fonction f.



Tous les algorithmes demandés dans cette partie devront être réalisés dans un même langage. Ce langage pourra être le langage Python ou le langage Scilab. On n'utilisera aucune librairie particulière mais on considérera que les fonctions $\cos$ et $\sin$ ainsi que le nombre π ont été importés dans Python. On rappelle que le nombre π se note `%pi` dans Scilab.

Il n'est pas demandé de vérifier dans les algorithmes que les variables d'entrée sont bien du type voulu. Il est ainsi par exemple inutile dans la question **F2**, de tester si la variable d'entrée x est bien dans l'intervalle $]0,\pi[$.

F1. Illustrer le principe de la méthode des rectangles en représentant R_{10} sur le graphe de la fonction f fourni en annexe. Donner l'expression de λ_n en fonction de n .

F2. Écrire une fonction **f(x)** qui retourne la valeur de f pour un nombre réel x de $]0,\pi[$.

F3. Écrire une fonction **Rectangle1(n)** qui, pour un nombre entier $n \geq 1$, retourne la valeur de R_n .

F4. Combien d'évaluations de l'application f nécessite cet algorithme pour une valeur de n donnée ?

Il faut déterminer une valeur de n pour laquelle R_n fournit une bonne estimation de I . La méthode 1 consiste à calculer les termes successifs de la suite R_n jusqu'à ce que celle-ci semble se stabiliser.

F5. Écrire une fonction **Integrale1(eps)** qui calcule, pour $\text{eps} > 0$, les termes successifs de la suite $(R_n)_{n \geq 1}$ jusqu'à ce qu'on obtienne $|R_n - R_{n-1}| < \text{eps}$, puis qui retourne la dernière valeur R_n calculée.

F6. Pour $\text{eps} = 10^{-7}$, **Integrale1(eps)** s'arrête pour $n = 34$. Vérifier que cela a nécessité plus de 500 évaluations de la fonction f .

F7. Quelle contrainte informatique empêche d'obtenir un résultat pertinent pour des valeurs arbitrairement petites de eps ?

Il est possible d'améliorer la méthode 1. La méthode 2 repose sur la relation de récurrence suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, R_{2n} = \frac{R_n}{2} + \frac{\pi}{2n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k - \frac{1}{2}}{n} \pi\right)$$

F8. Écrire la relation de récurrence pour un entier n de la forme $n = 2^{m-1}$. Écrire une fonction récursive **Rectangle2(m)** qui pour un nombre entier m retourne la valeur de R_{2^m} .

F9. Combien d'évaluations de la fonction f nécessite cet algorithme pour une valeur de m donnée ?

F10. Écrire une fonction **Integrale2(eps)** qui calcule, pour $\text{eps} > 0$, les termes successifs de la suite $(R_{2^m})_{m \geq 0}$ jusqu'à ce qu'on obtienne $|R_{2^m} - R_{2^{m-1}}| < \text{eps}$, puis qui retourne la dernière valeur R_{2^m} calculée. Cet algorithme doit impérativement être élaboré dans le but de minimiser le nombre total d'évaluations de f .

F11. Pour $\text{eps} = 10^{-7}$, **Integrale2(eps)** s'arrête pour $m = 7$. Combien d'évaluations de la fonction f ont été nécessaires ?

Sujet CCINP 2023 PSI – Modélisation et ingénierie numérique
Calcul numérique d'intégrale
Commentaire : peu de programmation

Partie I - Modélisation du cœur, un organe indispensable et parfois défaillant

Objectif

L'objectif de cette partie est de comparer les performances d'un cœur sain à celles du cœur d'un patient atteint d'*hypertrophie myocardique*; l'intérêt de la pompe d'assistance cardiaque sera ainsi mis en avant pour compenser les effets de ce type de pathologie.

I.1 - Modélisation d'un cœur sain

En ne considérant que la moitié gauche du cœur, le cycle thermodynamique (noté Γ_{th}) subi par le sang contenu dans le ventricule et l'oreillette peut être tracé dans un diagramme pression - volume (**figure 3**). Les étapes du cycle Γ_{th} sont détaillées ci-après :

- **A → B remplissage ventriculaire** : la valve oriculo-ventriculaire gauche (valve mitrale numérotée ① sur la **figure 1**) s'ouvre, le volume du ventricule gauche ③ passe rapidement d'environ $V_0 = 70$ mL à $V_1 = 140$ mL suivant une courbe appelée "*courbe de compliance*";
- **B → C phase de diastole** : remplissage lent du ventricule, déjà quasiment plein. L'afflux de peu de sang est alors responsable d'une forte augmentation de la pression dans le ventricule. La pression monte jusqu'à la *tension systolique* $p_1 = 1,70 \cdot 10^4$ Pa;
- **C → D éjection systolique** : l'oreillette gauche ⑤ se contracte, éjectant le sang dans l'artère aorte par la valve aortique ② ouverte. Le volume du ventricule redescend à $V_0 = 70$ mL;
- **D → A relaxation isovolumétrique** : toutes les valves se ferment, les cellules musculaires ventriculaires se relâchent et la pression retombe à la *tension diastolique* $p_0 = 1,00 \cdot 10^4$ Pa.

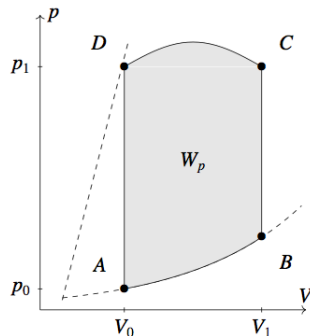


Figure 3 - Cycle thermodynamique Γ_{th} subi par le sang

Q1. Justifier le sens de parcours de ce cycle dans le diagramme (p, V) au vu du rôle du cœur dans le corps humain. Identifier alors la signification de W_p , l'aire algébrique grisée définie positive :

$$W_p = - \oint_{\Gamma_{th}} p \, dV. \quad (1)$$

Considérons l'équation différentielle suivante :

$$-\frac{dW}{dV}(V) = p(V) \quad \text{soit} \quad W(V_{n-1}) - W(V_n) = \int_{V_{n-1}}^{V_n} p \, dV. \quad (2)$$

Il est possible de discrétiser l'équation (2) en approximant l'intégrale par les trois surfaces représentées **figure 4** :

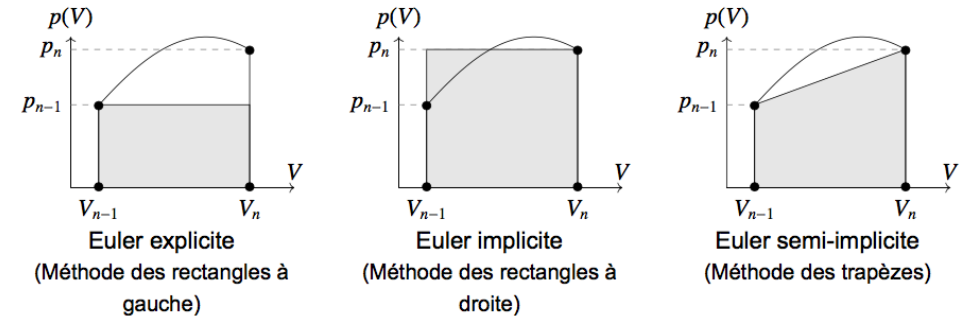


Figure 4 - Différents schémas de discrétisation d'une intégrale

V_{n-1} et V_n seront les volumes du ventricule à deux instants consécutifs, indicés $n-1$ et n en référence au pas de temps du modèle numérique. De même, les notations suivantes seront utilisées : $W_n = W(V_n)$, $W_{n-1} = W(V_{n-1})$, $p_n = p(V_n)$ et $p_{n-1} = p(V_{n-1})$, avec $0 < n \leq N$, $N \in \mathbb{N}$ étant le nombre de points de la simulation numérique.

Q2. Pour les trois schémas de la **figure 4**, préciser le lien qui existe entre W_n , W_{n-1} , p_n , p_{n-1} , V_n et V_{n-1} en fonction du schéma de discrétisation choisi pour le calcul de l'intégrale en utilisant l'équation (2).

Le calcul numérique de $W_p = W_N - W_0$ permet d'obtenir le résultat suivant : $|W_p| = 0,5$ USI.

Q3. Par un raisonnement graphique sur le diagramme (p, V) , montrer que cette valeur obtenue est cohérente. Préciser son signe et son unité.

Q4. En supposant que la partie droite du cœur a un fonctionnement similaire à la partie gauche, exprimer et calculer numériquement la puissance mécanique $\mathcal{P}_{\text{cœur}}$ développée par le cœur pour pomper le sang à une fréquence de $f = 60$ batt·min⁻¹.

Q5. En prenant un rendement $\eta = 20$ % du muscle cardiaque, estimer la fraction x de l'énergie consommée par le cœur pour un individu ayant un apport énergétique journalier de $\mathcal{E} = 2,4$ kWh (ce qui représente environ 2 000 kcal, soit l'apport énergétique journalier moyen d'un adulte).

I.2 - Modélisation d'un cœur déficient

Il arrive que le cœur d'un individu présente une déficience (**figure 5**). Dans le cas d'une *hypertrophie myocardique*, les parois des ventricules s'épaississent et se raidissent. Le volume V_{1h} du cœur atteignable en fin de diastole est alors plus faible et la courbe de compliance est relevée. Chez certains patients, $V_{1h} = 100$ mL peut être atteint contre $V_1 = 140$ mL en moyenne chez les patients adultes sains.

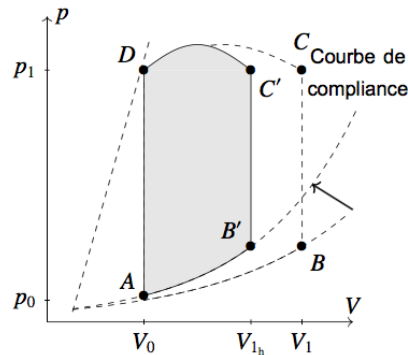


Figure 5 - Hypertrophie myocardique

- Q6.** En effectuant l'application numérique associée, comparer le volume $V_{1h} - V_0$ d'éjection systolique à chaque battement de cœur d'un individu malade à celui d'un individu sain. En déduire l'influence de la maladie sur le volume de sang éjecté à chaque battement du cœur. Proposer une compensation naturelle du cœur pour maintenir un débit moyen de sang dans le corps égal à celui d'un individu sain.

Afin de soulager le muscle cardiaque lors d'une défaillance de fonctionnement, une pompe d'assistance cardiaque peut être installée entre le ventricule gauche et l'artère aorte.

- Q7.** En modélisant les cycles de la **figure 3** et de la **figure 5** par des rectangles de hauteur $[AD]$ et en déterminant leurs aires, estimer la perte maximale de puissance hydraulique (en watt - W) du ventricule gauche d'un cœur de patient atteint d'hypertrophie myocardique par rapport à un patient avec un cœur sain pour une même fréquence de battement $f = 60 \text{ batt} \cdot \text{min}^{-1}$. En déduire la valeur de la puissance hydraulique supplémentaire qu'une pompe d'assistance cardiaque doit fournir, sachant qu'elle assiste uniquement le ventricule gauche.

Sujet E3A 2023 PSI – Résolution de l'équation de la chaleur Euler d'ordre 2 à deux variables

Partie III - Stockage des déchets radioactifs

Le projet français Cigéo vise à enfouir, sous 500 m de roches argileuses, les déchets nucléaires dits « de moyenne et haute activité à vie longue » ($T_{1/2} > 31$ a) - soit les plus dangereux - sur un terrain situé à cheval sur les départements de la Meuse et de la Haute-Marne (site de Bure). Afin de préparer ce projet, un laboratoire souterrain a été mis en service sur ce site en 2 000 par l'Agence nationale pour la gestion des déchets radioactifs (Andra).

Les combustibles usés, qui constituent l'essentiel des déchets de haute activité et qui resteront radioactifs des centaines de milliers d'années, sont actuellement entreposés dans les installations d'Orano (ex-Areva) à La Hague (Manche) sous forme de « colis » vitrifiés.

On étudie de manière très simplifiée la possibilité de stocker de tels déchets radioactifs, sous une couche argileuse d'épaisseur $L = 5,0 \cdot 10^2$ m.

Du fait de la radioactivité des produits de fission, les déchets sont exothermiques. Ils sont vitrifiés dans des colis qui dégagent une puissance $\mathcal{P}_0 = 2,0$ kW dans la première décennie du stockage et décroissante dans le temps. N colis sont entreposés à 500 m sous la surface. Ils sont uniformément répartis sur une surface S .

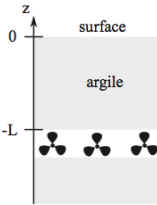


FIGURE 9 – Paramétrage du problème

La température dans l'argile est notée $T(z, t)$. L'argile a une masse volumique ρ_a , une conductivité thermique λ_a , une capacité thermique massique c_a et une diffusivité thermique D_a , toutes uniformes. L'épaisseur de la couche dans laquelle seront entreposés les déchets radioactifs est négligeable devant L .

Q33. Citer la loi de Fourier en nommant les différentes grandeurs physiques qui interviennent et en précisant les unités. Quel est son contenu physique ?

Q34. En réalisant un bilan d'énergie interne sur une tranche d'argile de surface S d'épaisseur dz , montrer que $T(z, t)$ est solution de l'équation de la diffusion thermique (5) où le coefficient de diffusivité thermique D_a sera exprimé en fonction de ρ_a , c_a et λ_a . La simplifier dans le cas stationnaire. Préciser l'unité de D_a .

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D_a \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}. \quad (5)$$

Q35. Interpréter les deux conditions aux limites suivantes :

$$\left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=-L} = -\frac{N \cdot \mathcal{P}_0}{2 \lambda_a \cdot S} \quad \text{et} \quad T(z=0, t) = T_{\text{ext}}. \quad (6)$$

Q36. Donner l'expression de $T(z)$ en régime permanent. Que vaut $T(-L)$?

Donnée numérique :

- Température annuelle moyenne de l'atmosphère sur le site de Bure : $T_{\text{ext}} = 13^\circ\text{C}$.

Q37. La température dans l'argile ne doit pas dépasser T_{max} afin que ses propriétés de confinement ne soient pas dégradées. Le stock total de déchets français représente $N = 3,6 \cdot 10^4$ colis. Estimer la surface S nécessaire à leur enfouissement, si $T_{\text{max}} = 100^\circ\text{C}$.

Q38. On envisage d'attendre 30 ans avant d'enfouir les déchets, pendant lesquels ils sont entretenus en surface. Pourquoi ?

On se propose dans la suite de simuler numériquement l'évolution temporelle du champ de température $(z, t) \mapsto T(z, t)$ de la couche supérieure d'argile au cours du temps.

L'objectif sera donc d'approcher la fonction $(z, t) \mapsto T(z, t)$.

Notations

- h est le pas de la subdivision uniforme $(t_i)_{i \in [0, N_t]}$ de l'intervalle de temps $[0, \Delta t = 3\tau]$ où τ est la durée caractéristique de diffusion thermique.

$t_i = i \cdot h$ et $\tilde{T}^i(z)$ est l'approximation de $T(z, t_i)$ pour $i \in [0, N_t]$

- k est le pas de la subdivision uniforme $(z_n)_{n \in [0, N_z]}$ de l'intervalle $[-L, 0]$

$z_n = n \cdot k$ et $\tilde{T}_n(t)$ est l'approximation de $T(z_n, t)$ pour $n \in [0, N_z]$

En conclusion : $\tilde{T}_n^i$ est l'approximation numérique de la solution $T(z = n \cdot k, t = i \cdot h)$ sur un maillage spatial de pas k et une discrétisation temporelle de pas h .

Présentation du schéma numérique explicite centré en espace :

$$\frac{\tilde{T}_n^{i+1} - \tilde{T}_n^i}{h} = D_a \frac{\tilde{T}_{n+1}^i - 2\tilde{T}_n^i + \tilde{T}_{n-1}^i}{k^2}. \quad (7)$$

Stabilité du schéma numérique : le schéma numérique est stable si $r \leq \frac{1}{2}$ avec $r = \frac{D_a \cdot h}{k^2}$.

On propose les lignes de code suivantes. Initialement, le champ de température de l'argile est uniforme de valeur égale à T_{ext} .

```
1  #Constantes numériques
2  lambda_a, c_a, rho_a = 1.5, 7e2, 1.7e3
3  D_a = ... #coefficient de diffusivité thermique
4  P0, N, L, S = 2e3, 36000, 5e2, 1e8
5  tau = ... #temps caractéristique de diffusion thermique
6  Text = 13.
7  Nt, Nx = 30000, 50
8  h = ... #pas discrétisation temporelle
9  k = ... #pas discrétisation spatiale
10 #coefficient r
11 r = D_a * h / k**2
12 assert(r < 0.5)
13 #initialisation champ température
14 T = [[Text for j in range(Nx)] for i in range(Nt)]
15 T[0][0] = T[0][1] + N * P0 / (2 * lambda_a * S) * k
16 #Schéma numérique explicite
17 for t in range(Nt - 1):
18     for x in range(1, Nx - 1):
19         T[t + 1][x] = T[t][x] + ...
20     T[t+1][0] = T[t+1][1] + N * P0 / (2 * lambda_a * S) * k
```

Après traitement des données, on obtient le réseau de courbes page suivante (figure 10).

Q39. Donner l'expression du pas de discrétisation temporelle h en fonction de Δt et N_t .

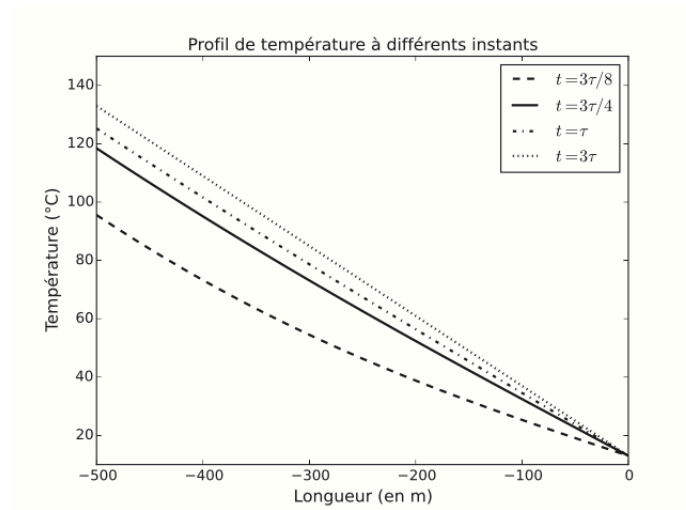


FIGURE 10 – Évolution temporelle du champ de température dans la couche d'argile

Q40. Donner une estimation de la durée caractéristique τ de diffusion thermique. Faire l'application numérique.

Q41. Justifier que $\left. \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right|_{z_n, t_i} \approx \frac{\tilde{T}_{n+1}^i - 2\tilde{T}_n^i + \tilde{T}_{n-1}^i}{k^2}$.

Q42. Quel est l'intérêt de la ligne 12 ? Que traduisent les lignes 15 et 20 ?

Q43. Compléter la ligne 19 sur votre copie.

Q44. Commenter le réseau de courbes obtenu. Quelle(s) critique(s) pourrait-on formuler au sujet des lignes de code proposées ?

Sujet CCINP 2020 PSI – Modélisation et ingénierie numérique

Résolution de l'équation de Laplace $\Delta T(x,y) = 0$

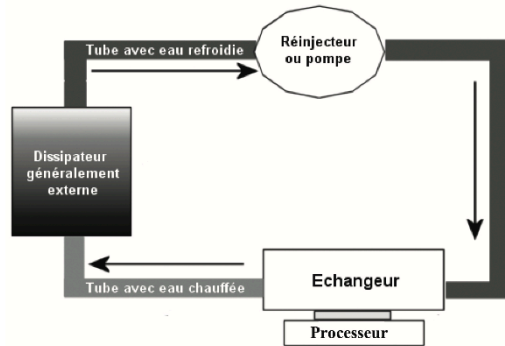


Figure 13 - Schématisation d'un système de watercooling

On s'intéresse ici à un échangeur thermique (figure 14) constitué d'un ensemble de micro-canaux percés dans le corps de l'échangeur et d'ailettes de refroidissement. Ces dispositifs sont fabriqués dans des métaux conduisant la chaleur. Les plus rencontrés sont le cuivre de conductivité thermique $401 \text{ W}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{m}^{-1}$ et l'aluminium de conductivité thermique $237 \text{ W}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{m}^{-1}$. L'eau circule dans les canaux et emporte l'énergie thermique produite par le processeur.

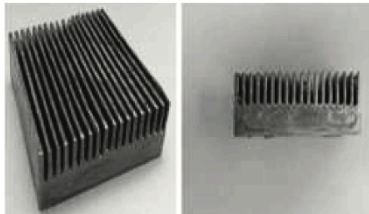


Figure 14 - Photographie d'un échangeur thermique à micro-canaux (sans son "courvercle")

Q22. Lequel des deux métaux (aluminium ou cuivre) est le plus adapté pour réaliser l'échangeur thermique. Quel est son inconvénient ?

Q23. Le débit massique D_m de l'écoulement à travers l'échangeur est de l'ordre de $10^{-2} \text{ kg}\cdot\text{s}^{-1}$. À l'aide d'un bilan d'énergie sur un système bien choisi, estimer la température du fluide en sortie de l'échangeur pour une puissance thermique dissipée de 100 W. On rappelle la valeur de la capacité thermique massique de l'eau liquide $c_e = 4,18 \text{ kJ}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1}$.

II.3 - Détermination du champ de température dans l'échangeur

On souhaite maintenant déterminer le nombre nécessaire d'ailettes de refroidissement ainsi que la température dans ces ailettes en régime permanent.

Nous allons pour cela déterminer le champ de température dans l'échangeur et en particulier dans la base métallique en contact avec le processeur (figure 15).

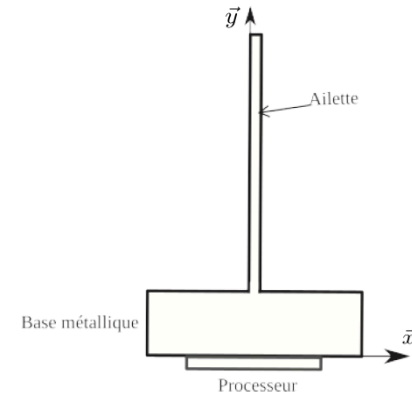


Figure 15 - Schématisation de l'échangeur et d'une ailette de refroidissement

Dans cette partie du système, l'équation vérifiée par le champ de température en régime permanent est :

$$\frac{\partial^2 T(x,y)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T(x,y)}{\partial x^2} = 0.$$

Le problème est toujours supposé invariant selon l'axe (Oz). Pour illustrer le principe de la méthode, l'ailette est modélisée par un rectangle. Considérons le rectangle figure 16 dont trois côtés sont à la température T_1 et le dernier à la température T_2 . Ce rectangle est découpé en 8 petits carrés de côté h (appelé pas de discrétisation) dont les sommets forment un réseau de points de coordonnées (ih, jh) auxquels correspondent les températures $T(ih, jh)$ que l'on mémorise dans un tableau $T_{(i,j)}$. L'objectif est de déterminer les températures $T_{(1,1)}$, $T_{(1,2)}$ et $T_{(1,3)}$ aux points de coordonnées (h, h) , $(h, 2h)$ et $(h, 3h)$.

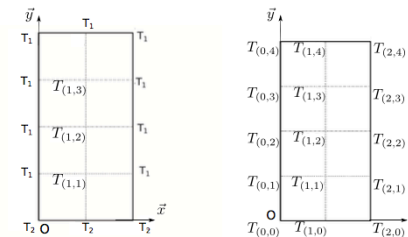


Figure 16 - Discrétisation de l'ailette

La méthode des différences finies centrées avec le pas de h est utilisée pour déterminer le champ de température dans l'échangeur et en particulier dans la base métallique en contact avec le processeur.

$$\frac{\partial T}{\partial x}(x, y) \cong \frac{T_{(x+\frac{h}{2}, y)} - T_{(x-\frac{h}{2}, y)}}{h}$$

$$\frac{\partial T}{\partial y}(x, y) \cong \frac{T_{(x, y+\frac{h}{2})} - T_{(x, y-\frac{h}{2})}}{h}$$

Q24. Selon une logique analogue, expliquer comment approcher $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x, y)$ et $\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}(x, y)$, d'abord à partir des dérivées premières de $T(x, y)$, puis sans aucune dérivée. Les expressions finales pourront faire intervenir $T(x+h, y)$, $T(x-h, y)$, $T(x, y+h)$, $T(x, y-h)$ et $T(x, y)$.

Q25. En déduire les coefficients a , b , c , d et e de l'équation différentielle sous forme discrétisée suivante :

$$a \cdot T_{(i-1, j)} + b \cdot T_{(i+1, j)} + c \cdot T_{(i, j-1)} + d \cdot T_{(i, j+1)} + e \cdot T_{(i, j)} = 0.$$

Q26. Écrire les équations pour $i=1$, $j=1$, pour $i=1$, $j=2$ et pour $i=1$, $j=3$.

Q27. En déduire le système d'équations à résoudre, le mettre sous forme de deux matrices A et B tel que :

$$A \cdot T = B$$

$$T = \begin{bmatrix} T_{(1,1)} \\ T_{(1,2)} \\ T_{(1,3)} \end{bmatrix}$$

avec A une matrice 3×3 et B un vecteur de 3 composantes.

La discrétisation de la base métallique n'est pas suffisamment fine et ne prend pas en compte les effets à l'interface ailette/embase.



Figure 17 - Calcul sur différentes géométries

Pour permettre d'obtenir une bonne approximation du champ de température T sur l'ensemble de la structure (Ω) et de connaître le pas de discrétisation optimal, il est nécessaire de calculer l'énergie interne pour différentes discrétisations. L'énergie interne s'exprime par :

$$E_i = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \lambda \nabla T \cdot \nabla T d\Omega.$$

Il est possible de montrer qu'en prenant une discrétisation très fine (non demandé), l'énergie interne va tendre vers une valeur exacte (E_i) correspondant à une valeur calculée numériquement pour une discrétisation suffisamment fine.

On note E_i^n l'énergie interne approchée calculée numériquement en fonction du nombre d'inconnues de discrétisation n . On peut ensuite tracer l'erreur sur l'énergie interne $(E_i^n - E_i)/E_i^n$ en fonction de n en échelle log (**figure 18**). Pour ne pas effectuer ensuite des calculs trop importants, on choisit une valeur de discrétisation n correspondant à une erreur de 5 %.

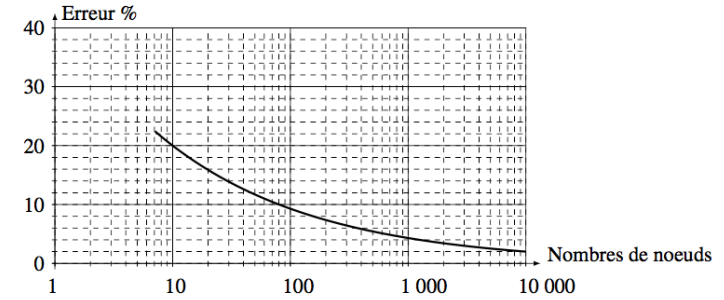


Figure 18 - Erreur sur l'énergie interne $(E_i^n - E_i)/E_i^n$ en fonction du nombre de nœuds n

Q28. Déterminer la valeur de n correspondant à l'énergie interne permettant d'assurer que la discrétisation du domaine Ω soit suffisamment fine pour avoir une bonne approximation du champ de température $T(x, y)$ sur l'ensemble de la structure.

Après discrétisation sur un modèle plus complexe (**figure 17**), le système à résoudre est toujours du type $A \cdot T = B$ mais la dimension de la matrice A devient très élevée. La matrice obtenue est une matrice tridiagonale, pentadiagonale par morceau. Plusieurs résolutions sont effectuées autour de quelques températures critiques tel que la résolution devienne :

$$A \cdot (T + \delta T) = (B + \delta B).$$

L'objectif de cette résolution est de regarder l'influence de cette incertitude δB sur la température finale obtenue.

Il est possible de montrer que la variation du premier membre sur le résultat est majorée par la variation du second membre sur les données multipliées par $\|A\| \cdot \|A^{-1}\|$, c'est-à-dire :

$$\frac{\|\delta T\|}{\|T\|} = \left(\|A\| \cdot \|A^{-1}\| \right) \frac{\|\delta B\|}{\|B\|}.$$

Le nombre $\|A\| \cdot \|A^{-1}\|$, appelé $\text{cond}(A)$, définit un bon conditionnement de la matrice A , c'est-à-dire une faible influence des variations de B sur le résultat de T .

Q29. Parmi les valeurs $\{-10\,000, -1\,000, -1, 1, 1\,000, 10\,000\}$ pour $\text{cond}(A)$, donner la valeur de $\text{cond}(A)$ qui entraînera un bon conditionnement de notre matrice.

La norme de A est définie par :

$$\|A\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^n |A_{ij}|.$$

Une partie représentative de la matrice obtenue est représentée ci-dessous :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 & 8 \\ 2 & 5 & 15 & 23 \\ 6 & 15 & 46 & 73 \\ 8 & 23 & 73 & 130 \end{bmatrix}$$

et la matrice inverse :

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 41 & 28 & -24 & 6 \\ 28 & 35 & -23 & 5 \\ -24 & -23 & 17 & 4 \\ 6 & 5 & -4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Q30. Calculer $\|A\|_{\infty}$ et $\|A^{-1}\|_{\infty}$.

Q31. Calculer $\text{cond}(A)$. Est ce bien conditionné ?

Fonctions et constantes autorisées - Python	
len(L)	renvoie le nombre d'éléments de la liste L.
L = []	création d'une liste vide.
L = [x]*n	création d'une liste de n éléments ayant tous la valeur contenue dans la variable x.
L = [x for i in range(n)]	même opération que précédemment (alternative avec une compréhension de liste).
L.append(elt)	ajoute l'élément elt à la liste L. La méthode <code>append</code> ne renvoie aucune valeur.
cos(x)	renvoie la valeur du cosinus de x radians.
sin(x)	renvoie la valeur du sinus de x radians.
tan(x)	renvoie la valeur de la tangente de x radians.
sqrt(x)	renvoie la racine carrée de x.
pi	constante dont la valeur est $\pi = 3.141592\dots$ à la précision disponible.
random()	renvoie un nombre pseudo-aléatoire compris entre 0 et 1 avec une densité de probabilité uniforme.

Sujet E3A 2019 PSI - Modélisation et ingénierie numérique

Méthode de Monte Carlo et plus

Étude numérique

On se propose d'étudier quelques aspects associés au traitement numérique du signal d'un magnétomètre à vanne de flux.

On utilisera uniquement les fonctions données en annexe. Les bibliothèques correspondantes seront supposées avoir été préalablement importées sous Python. L'usage d'autres fonctions sur les listes telles que `max(liste)`, `min(liste)` ou encore `sum(liste)` est interdit. Ces fonctions devront être programmées explicitement si nécessaire.

G / Quelques aspects algorithmiques associés au traitement des données

Dans l'étude du magnétomètre torique effectuée dans la partie **F**, on est amené à évaluer l'intégrale $\alpha = \iiint_V \frac{\cos^2 \theta}{r^2} dV$ (question **F8**). On cherche à déterminer numériquement la valeur de α .

- G1.** Écrire une fonction `f(x,y,z)` recevant pour paramètres les coordonnées x , y et z d'un point M et qui renvoie la valeur $\frac{\cos^2 \theta}{r^2}$.
On pourra noter que $\frac{\cos^2 \theta}{r^2} = \frac{x^2}{(x^2+y^2)^2}$.
- G2.** Écrire une fonction `Choisir(a,b)` qui renvoie une valeur choisie aléatoirement de manière uniforme entre les bornes a et b passées en argument.

On propose de déterminer la valeur de $\alpha = \iiint_V f(M) dV$ par une méthode numérique

appelée *intégration Monte Carlo*. L'intégrale s'effectue sur le tore de volume V correspondant au noyau de la bobine ferromagnétique étudiée dans la partie **F**.

L'intégration Monte Carlo est basée sur le fait que l'intégrale de $f(M)$ sur le volume V peut être approximée par $\alpha \simeq V \langle f \rangle$ avec $\langle f \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(M_i)$ où les N points M_i sont choisis aléatoirement et uniformément à l'intérieur du volume V .

L'écart typique entre la valeur exacte de l'intégrale $\iiint_V f(M) dV$ et $V \langle f \rangle$ est donné par

$$V \sqrt{\frac{\langle f^2 \rangle - \langle f \rangle^2}{N}} \text{ avec } \langle f^2 \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(M_i)^2.$$

Quand le nombre N est suffisamment grand, $V \langle f \rangle$ tend vers $\iiint_V f(M) dV$.

On donne un algorithme permettant de déterminer l'intégrale α effectuée sur le volume V , ainsi que l'erreur relative sur α . On suppose que le nombre de points N est une variable globale préalablement fixée.

- Initialiser les variables I et $I2$ à 0.
- Effectuer les opérations suivantes jusqu'à obtenir N points dans le tore :
 - Choisir un point M au hasard dans le parallélépipède rectangle (de volume minimal) contenant le tore.
 - Si le point M est dans le tore, on détermine $f(M)$. On ajoute cette valeur à I , et la valeur de $f(M)^2$ à la variable $I2$.
- Renvoyer l'estimation de la valeur de α et l'erreur relative associée.

On considérera le parallélépipède rectangle défini par :

$$-(R+a) \leq x \leq R+a, \quad -(R+a) \leq y \leq R+a \quad \text{et} \quad -a \leq z \leq a.$$

On pourra noter qu'un point M de coordonnées cartésiennes (x,y,z) appartient au tore si $(\sqrt{x^2+y^2}-R)^2 + z^2 \leq a^2$.

- G3.** Écrire une fonction `Est_dans_tore(x,y,z)` recevant pour paramètres les coordonnées x , y et z et qui renvoie `True` si le point M est dans le tore et `False` sinon. Les rayons R et a caractérisant le tore seront supposés être des variables globales.
- G4.** Écrire une fonction `Choix_point()` qui renvoie les coordonnées x , y et z d'un point choisi au hasard dans le parallélépipède rectangle de volume minimal contenant le tore.
- G5.** Implémenter le calcul de l'intégrale α et de l'erreur relative associée par la méthode Monte Carlo décrite ci-dessus.

Les différentes opérations décrites dans les parties **D** à **E** du problème peuvent être implémentées de façon numérique. On considère que le signal $u_s(t)$ a été numérisé avec une période d'échantillonnage T_e . Les valeurs numériques associées au signal sont disponibles dans une liste u de taille N . La valeur $u_s(kT_e)$ du signal à l'instant kT_e correspond au k ème élément de la liste u .

L'opération de multiplication apparaissant dans la chaîne de traitement de données (figure 8) peut être implémentée numériquement.

G6. Écrire une fonction `Produit(sx,sy)` qui renvoie le produit des deux listes `sx` et `sy` passées en argument. Les deux listes seront supposées être de même longueur.

On note s la liste obtenue. On a vu dans la partie **E** que l'information utile correspond à la moyenne de s .

G7. Écrire une fonction `Moyenne(L)` qui renvoie la valeur moyenne des éléments de la liste L passée en argument.

La moyenne m de la liste s est liée à l'intensité du champ magnétique à mesurer. Elle dépend aussi du déphasage entre les signaux sx et sy . La valeur de m est maximale quand le déphasage est nul. Il est donc intéressant de chercher à annuler le déphasage entre les signaux sx et sy avant de procéder à l'étape de multiplication.

Pour cela, on commence par rechercher le décalage temporel entre les deux signaux sx et sy de même période. Ce décalage peut être déterminé à l'aide de la fonction d'inter-corrélation $C(n)$ définie numériquement par :

$$C(n) = \sum_{k=n}^{M+n} sx_k \cdot sy_{k-n} \quad (8)$$

où M définit la taille de la fenêtre pour effectuer le calcul. L'idée est de rechercher le retard (ou translation nTe) qui permet de maximiser la ressemblance entre les signaux sx et sy . On cherche alors la plus petite valeur de n pour laquelle $C(n)$ est maximale. La fonction $C(n)$ est elle-même définie pour n compris entre 0 et $N-1-M$ où N est le nombre d'éléments dans la liste sx (ou sy).

On souhaite déterminer la fonction d'inter-corrélation des signaux sx et sy supposés de même longueur $N = 2\ell$ et de moyenne nulle.

G8. Proposer une fonction `Valeur_max(L)` qui renvoie la valeur maximale de la liste L passée en argument.

G9. On souhaite que les listes `sx` et `sy` soient de moyenne nulle, ce qui n'est pas a priori le cas. Écrire une fonction `Moyenne_nulle(L)` qui modifie la liste L passée en argument de façon à ce que sa moyenne soit nulle.

G10. On choisit de calculer la fonction d'inter-corrélation pour $M = \ell$. Écrire la fonction `Intercorr(sx,sy)` qui renvoie la liste contenant les valeurs de la fonction d'inter-corrélation $C(n)$ pour n compris entre 0 et $\ell - 1$.

G11. Quelle est la longueur de la liste renvoyée par la fonction `Intercorr(sx,sy)`? Quelle est la complexité temporelle associée à l'exécution de cette fonction dans les conditions précisées ici?

Sujet Centrale 2023 PC

Euler ordre 2

Méthode de Monte Carlo – Incertitude de type A et B

I Une première évolution de la forme du casque : du casque classique vers le casque profilé en goutte d'eau

L'objectif de cette partie est de quantifier le gain de puissance que procure ce type de casque par rapport à un casque dit « classique ».

I.A – Évaluation du gain en puissance par une approche empirique

Afin de quantifier l'apport d'un casque profilé par rapport à un casque traditionnel, on étudie une phase de descente en roue libre (c'est-à-dire sans pédalage) sur route rectiligne, de pente constante. La figure 3 précise le système de coordonnées cartésiennes utilisé.

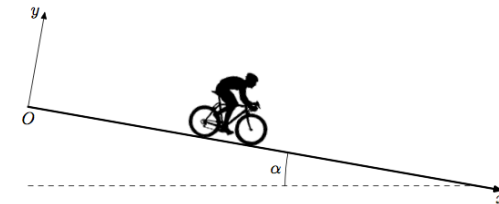


Figure 3 Représentation schématique du système étudié

Pour toute cette partie, on considérera le système {cycliste + vélo}, assimilé à un point matériel M . On supposera ce système soumis aux seules actions extérieures suivantes :

- l'action de la pesanteur, notée $\vec{P}$;
- l'action de la route sur les roues, notée $\vec{R}$ incluant :
 - la réaction normale, notée $\vec{N}$,
 - la résistance au roulement, notée $\vec{F}_r$, et supposée telle que $\vec{F}_r = -\mu_r N \vec{e}_x$ où N est la norme de la réaction normale et μ_r le coefficient de résistance au roulement ;
- l'action de l'air sur le système.

On note m la masse du système, $\vec{v}$ la vitesse du système dans le référentiel terrestre, $\vec{g}$ l'accélération de la pesanteur, α l'angle entre la direction horizontale et la direction de la route.

I.A.1) Étude de la phase de démarrage

Avant d'envisager une étude en régime permanent, il est nécessaire de caractériser la phase de démarrage pour déterminer la distance que parcourt le cycliste avant d'atteindre sa vitesse limite. On supposera que le cycliste est initialement à la position $x = 0$ à l'instant $t = 0$ et se lance dans la pente sans vitesse initiale.

On modélise l'action de l'air sur le système {cycliste + vélo} par une force de trainée de la forme

$$\vec{F}_T = -\frac{1}{2} \rho S C_x v \vec{v}$$

où ρ est la masse volumique de l'air, S la surface frontale projetée sur le plan perpendiculaire à l'écoulement, C_x le coefficient de trainée aérodynamique du système {cycliste + vélo} et v , la norme de $\vec{v}$ sa vitesse par rapport à la route.

Dans cette section I.A.1, on prendra pour les applications numériques $S C_x = 0,30 \text{ m}^2$ et $\alpha = 0,10 \text{ rad}$ (descente sur une pente de 10 %).

Q 1. Rappeler l'expression du nombre de Reynolds, noté Re , de l'écoulement de l'air autour du cycliste et rappeler ce qu'il caractérise. Donner un ordre de grandeur de Re pour un cycliste roulant à $40 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$. En considérant que, si $10^3 < Re < 10^6$, la trainée est proportionnelle au carré de la vitesse, le modèle de trainée proposé paraît-il adapté ?

Q 2. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par v , la norme de la vitesse du système {cycliste + vélo}. On l'écrira sous la forme suivante, en précisant les expressions littérales et les valeurs numériques des paramètres a et b ,

$$\frac{dv(t)}{dt} + av^2(t) = b. \quad (I.1)$$

Q 3. En utilisant l'équation différentielle précédemment établie, déterminer la norme de la vitesse limite atteinte en régime permanent, que l'on écrira sous la forme

$$v_{\text{lim}} = \sqrt{\frac{K}{SC_x}} \quad (\text{I.2})$$

où K est une constante que l'on déterminera en fonction de m , g , ρ , α et μ_r .

Q 4. Calculer la valeur numérique de v_{lim} . Commenter.

La figure 4 propose un programme Python pour résoudre numériquement l'équation (I.1).

```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 def r(f, v, t):
4     V = [v]
5     for i in range(len(t) - 1):
6         V.append(V[i] + (t[i+1] - t[i]) * f(V[i]))
7     return V
8 def g(u):
9     return 0.92 - 2.3e-3 * u * u
10 x = np.linspace(0, 120, 1000)
11 y = r(g, 0, x)
12 plt.plot(x, y)
13 plt.show()
```

Figure 4 Résolution numérique de l'équation (I.1)

Q 5. En explicitant les lignes concernées du programme de la figure 4, expliquer son principe. Quelle méthode de résolution utilise-t-il ?

Le programme de la figure 4 est exécuté avec plusieurs versions de la ligne 10. Les courbes obtenues sont données figure 5.

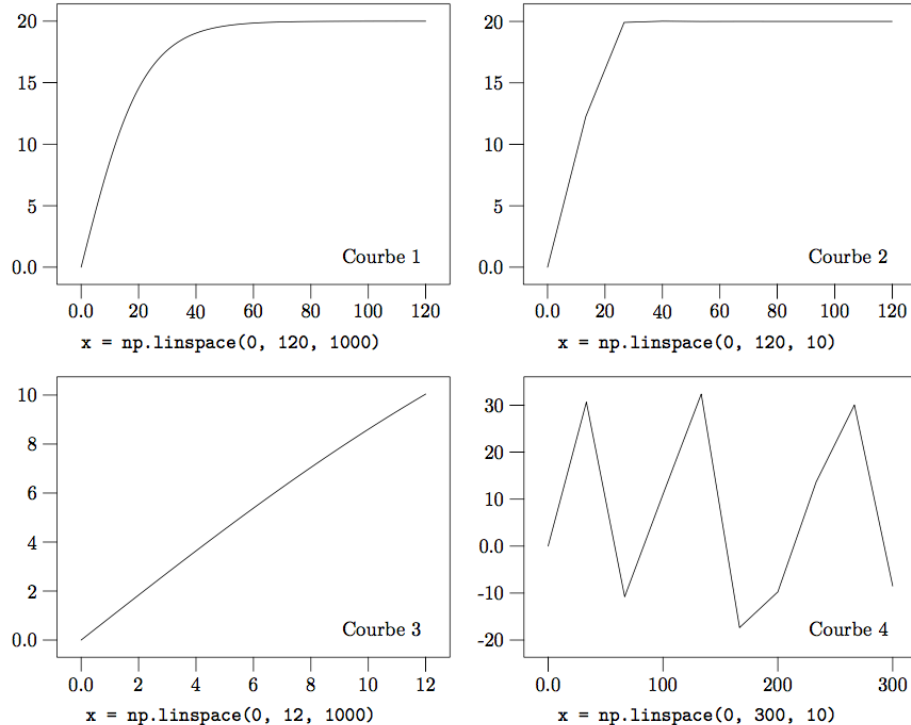


Figure 5

Q 6. Expliciter la signification physique des valeurs figurant dans la ligne 10 et commenter l'allure de ces courbes au regard des valeurs utilisées.

On souhaite déterminer la distance L_{RP} parcourue avant d'atteindre le régime permanent.

Q 7. À partir des courbes proposées sur la figure 5 et en détaillant la démarche suivie, estimer un ordre de grandeur de cette distance.

Q 8. Écrire une fonction Python permettant d'accéder à cette valeur à partir des données numériques issues de ces courbes.

I.A.2) Étude du régime permanent dans la descente de Laffrey

L'objectif est ici de déterminer le gain de puissance que procure un casque profilé par rapport à un casque classique. Pour ce faire, le cycliste est muni d'un capteur GPS permettant de repérer sa position au cours du temps. Différents essais sont réalisés dans la descente de Laffrey en Isère. Cette descente présente l'avantage d'être rectiligne et de pente quasiment constante sur 6,5 km.

On suppose dans cette section que la distance L_{RP} calculée précédemment a été parcourue et que le régime permanent est atteint. Pour cela, on limite l'étude à un sous-segment, de longueur $L' = 5,00$ km et de pente constante 10% en descente (donc d'angle $\alpha = 0,10$ rad), rectiligne. Diverses applications gratuites disponibles sur internet permettent d'accéder au temps mis par le cycliste pour parcourir ce tronçon. On modélise l'action de l'air sur le système par la force de traînée aérodynamique.

Nous avons vu précédemment l'effet du SC_x sur la vitesse du cycliste. Différents paramètres impactent la valeur de ce SC_x . Afin de quantifier l'effet du casque uniquement, nous considérons dans cette partie le même cycliste, muni du même vélo, des mêmes vêtements et dans la même position. Seul le choix du casque diffère. On note alors $SC_{x,c}$ le SC_x du système {cycliste + vélo} lorsque le cycliste est muni d'un casque classique et $SC_{x,p}$ ce SC_x lorsque le cycliste est muni d'un casque profilé. On note respectivement $v_{\text{lim},c}$ et $v_{\text{lim},p}$ les vitesses en régime permanent sur le tronçon considéré.

a) Résultats expérimentaux

Le protocole expérimental mis en œuvre est le suivant : le cycliste parcourt ce tronçon, de longueur L' , 10 fois muni d'un casque de vélo classique, puis 10 fois muni d'un casque de contre-la-montre profilé. Les résultats obtenus sont présentés dans le tableau 1 ci-après.

Numéro de l'essai	Temps de parcours casque classique (en s)	Temps de parcours casque profilé (en s)
1	270	258
2	267	261
3	269	259
4	272	262
5	271	260
6	269	260
7	268	259
8	272	258
9	270	263
10	271	258

Tableau 1 Mesures expérimentales des temps de parcours dans la descente de Laffrey avec casques classique et profilé

Deux sources d'incertitudes sont ici présentes :

- celle de précision de la mesure temporelle, résultant du défaut de précision de la localisation par le GPS. Cet aspect est négligé ici et fera l'objet de la sous-partie I.B ;
- celle de répétabilité du protocole, que nous allons quantifier ici.

Q 9. Déterminer la vitesse moyenne $\langle v_c \rangle$ et l'incertitude-type de type A $u(\langle v_c \rangle)$ sur cette moyenne dans le cas du casque classique.

Le même calcul avec le casque profilé donne $\langle v_p \rangle = 19,25 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, $u(\langle v_p \rangle) = 0,041 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

Afin d'estimer l'impact de cette variabilité de mesures sur la faisabilité de l'expérience, on utilise le programme présenté en figure 6 qui simule un grand nombre de valeurs aléatoires répondant aux paramètres calculés à la question précédente. Les résultats obtenus sont présentés sous forme d'histogrammes dans la figure 7.

Q 10. Conclure quant à la pertinence de cette démarche expérimentale.

```

1 import matplotlib.pyplot as plt
2 import numpy.random as rd

3 def MonteCarlo(
4     vitesseMoyenne:float, # vitesse moyenne du cycliste (m/s)
5     incertitudeType:float, # incertitude type sur la vitesse (m/s)
6     N:int, # nombre d'échantillons à produire
7 ) -> [float]: # tableau de N vitesses simulées
8     generateur = rd.default_rng()
9     return generateur.normal(vitesseMoyenne, incertitudeType, N)

10 classique = MonteCarlo(██████, ██████, 10000);
11 profilé = MonteCarlo(19.25, 0.13, 10000);
12 plt.hist([classique, profilé], bins=60)
13 plt.show()

```

Figure 6 Programme de simulation (les valeurs utilisées ligne 10 ont été volontairement masquées)

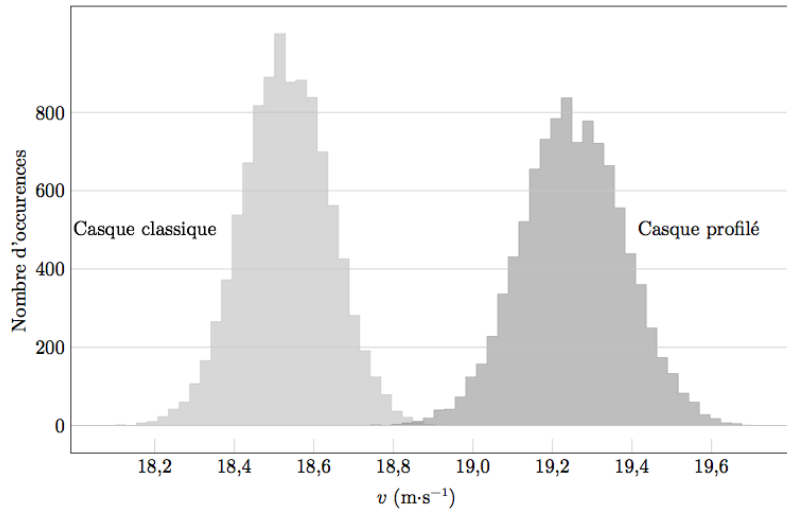


Figure 7 Histogrammes de répartition des vitesses simulées

Q 11. Écrire une fonction Python `MonteCarlo2(vitesseMoyenne, incertitudeType, N, K)`, où K est la constante intervenant dans l'expression (I.2) de la question 3. Cette fonction est une adaptation de la fonction `MonteCarlo` de la figure 6 qui renvoie un couple de valeurs : une évaluation du SC_x et une incertitude-type associée.

Une application de cette fonction conduit aux valeurs du tableau 2.

	Configuration avec casque classique	Configuration avec casque profilé
SC_x (m ²)	0,3051	0,2937
incertitude-type (m ²)	0,0036	0,0037

Tableau 2 Valeurs de SC_x et incertitude-type associées

b) *Exploitation des résultats de l'expérience*

Q 12. Exprimer les différentes puissances s'appliquant sur le système {cycliste + vélo} en fonction de m , v , g , ρ , α , μ_r et SC_x .

Q 13. En utilisant le tableau 2, évaluer numériquement le gain en puissance procuré par le casque profilé à $v_{\text{lim}} = 54,5 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$, vitesse moyenne de Greg Lemond lors du contre-la-montre final du Tour 1989. Déterminer également une incertitude-type sur ce résultat. Commenter.

Évaluation des incertitudes

Évaluation de type A :

Si l'on dispose de N mesures y_i d'une grandeur y , alors

Valeur moyenne	Incrtitude-type sur une mesure	Incrtitude-type sur la moyenne
$\langle y \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i$	$u(y) = \sigma_y = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (y_i - \langle y \rangle)^2}$	$u(\langle y \rangle) = \frac{u(y)}{\sqrt{N}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (y_i - \langle y \rangle)^2}$

Évaluation de type B :

Si la grandeur mesurée y suit une loi uniforme sur l'intervalle $[a, b]$, l'incrtitude-type est alors

$$u(y) = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}.$$

Opérations et fonctions Python

On suppose avoir exécuté l'instruction

```
import numpy as np
```

Fonctions

— `range(n:int)` renvoie la séquence des n premiers entiers ($0 \rightarrow n-1$)
`list(range(5))` $\rightarrow$ `[0, 1, 2, 3, 4]`.

Opérations sur les listes

— `len(u)` donne le nombre d'éléments de la liste u ;
`len([1, 2, 3])` $\rightarrow$ 3, `len([[1, 2], [3, 4]])` $\rightarrow$ 2.
 — `u.append(e)` ajoute l'élément e à la fin de la liste u (identique à `u[len(u):] = [e]`).

Opérations sur les tableaux

— `a.ndim` nombre de dimensions du tableau a .
 — `a.shape` tuple donnant la taille du tableau a pour chacune de ses dimensions.
 — `len(a)` taille du tableau a dans sa première (ou seule) dimension (identique à `a.shape[0]`).
 — `np.linspace(start, stop, num=50)` crée un vecteur contenant `num` valeurs équiréparties dans l'intervalle `[start, stop]` ;
`np.linspace(1, 10, 4)` $\rightarrow$ `array([1., 4., 7., 10.])`.
 — `np.arange(start, stop, step)` crée un vecteur contenant des valeurs régulièrement espacées de `step` dans l'intervalle `[start, stop]` ;
`np.arange(1, 2, 0.2)` $\rightarrow$ `array([1., 1.2, 1.4, 1.6, 1.8])`.
 — `np.mean(a)`, `np.std(a)` calcule respectivement la moyenne et l'écart-type des éléments du tableau a .
 — `np.sqrt(a)` crée un tableau de même forme que a dont les éléments sont les racines carrées des éléments de a .

Générateurs pseudo-aléatoires

— `np.random.default_rng()` crée un générateur de nombres pseudo-aléatoires utilisant l'algorithme *permutation congruential generator* (PGC-64).
 — `g.normal(loc=0.0, scale=1.0, size=None)` où g est un générateur de nombres pseudo-aléatoires, renvoie un vecteur de `size` échantillons suivant une loi normale d'espérance `loc` et d'écart-type `scale`.