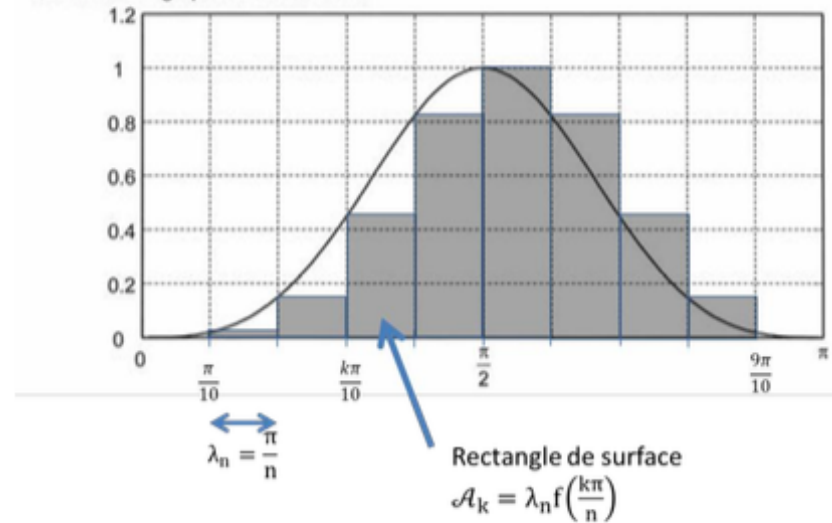


F1. Illustrer le principe de la méthode des rectangles en représentant R_{10} sur le graphe de la fonction f fourni en annexe. Donner l'expression de λ_n en fonction de n .

Question F1 : graphe de la fonction f .



R_{10} est l'aire grisée sous les rectangles. En effet :

$$R_{10} = \sum_{k=1}^9 \mathcal{A}_k = \lambda_n \sum_{k=1}^9 f\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$

On a :

$$\lambda_n = \frac{\pi}{n}$$

F2. Écrire une fonction $f(x)$ qui retourne la valeur de f pour un nombre réel x de $]0, \pi[$.



```
def f(x):
    return (cos(pi/2*cos(x)))*2/sin(x)
```

F3. Écrire une fonction `Rectangle1(n)` qui, pour un nombre entier $n \geq 1$, retourne la valeur de R_n .



```
def Rectangle1(n):
    Rn=0
    lambdan=pi/n
    for k in range(1,n):
        Rn=Rn+lambdan*f(k*pi/n)
    return Rn
```

F4. Combien d'évaluations de l'application f nécessite cet algorithme pour une valeur de n donnée ?

f est évaluée autant de fois que le nombre d'éléments dans `range(1,n)` soit :
 $n-1$ fois

F5. Écrire une fonction `Integrale1(eps)` qui calcule, pour $\text{eps} > 0$, les termes successifs de la suite $(R_n)_{n \geq 1}$ jusqu'à ce qu'on obtienne $|R_n - R_{n-1}| < \text{eps}$, puis qui retourne la dernière valeur R_n calculée.



```
def Integrale1(eps):
    n=2
    u=Rectangle1(n-1)
    v=Rectangle1(n)
    while abs(v-u)>eps:
        n=n+1
        u=v
        v=Rectangle1(n)
    return v
```

F6. Pour $\text{eps} = 10^{-7}$, `Integrale1(eps)` s'arrête pour $n = 34$. Vérifier que cela a nécessité plus de 500 évaluations de la fonction f .

Dans la fonction précédente, la fonction `Rectangle1(n)` a été appelée une fois pour chaque n allant de 1 à 34.

Nombre d'évaluations de f =

$$\sum_{n=1}^{34} \text{nb d'appel dans Rectangle1}(n) = \sum_{n=1}^{34} (n-1) = \sum_{1}^{33} n$$

$$= \frac{33 \times 34}{2} = 561 > 500$$

F7. Quelle contrainte informatique empêche d'obtenir un résultat pertinent pour des valeurs arbitrairement petites de eps ?

De même que pour la question E3, les calculs n'ont d'intérêt que lorsque eps est plus grand que la limite de l'écart relatif entre deux nombres R_n consécutif : $2^{-(52+N)}$ où N est l'exposant de R_n dans son écriture à virgule flottante.

F8. Écrire la relation de récurrence pour un entier n de la forme $n = 2^{m-1}$. Écrire une fonction récursive `Rectangle2(m)` qui pour un nombre entier m retourne la valeur de R_{2^m} .

Si $n = 2^{m-1}$, alors :

$$R_{2^m} = \frac{R_{2^{m-1}}}{2} + \frac{\pi}{2^m} \sum_{k=1}^{2^{m-1}} f\left(\frac{(k-\frac{1}{2})\pi}{2^{m-1}}\right)$$



```
def Rectangle2(m):
    if m==0:
        return 0
    else:
        s=0
        for k in range(1,2**(m-1)+1):
            s=s+f(((k-0.5)*pi)/2**(m-1))
        return 0.5*Rectangle2(m-1)+s*pi/(2**m)
```

F9. Combien d'évaluations de la fonction f nécessite cet algorithme pour une valeur de m donnée ?

Pour l'indice m , f est appelée :

2^{m-1} fois dans la somme + le nombre d'appel à l'indice $m-1$

Le nombre d'appel est donc :

$$\sum_{k=1}^m 2^{k-1} = \sum_{k'=0}^{m-1} 2^{k'} = 2^m - 1 (= 2n - 1)$$

F10. Écrire une fonction `Integrale2(eps)` qui calcule, pour $\text{eps} > 0$, les termes successifs de la suite $(R_{2^m})_{m \geq 0}$ jusqu'à ce qu'on obtienne $|R_{2^m} - R_{2^{m-1}}| < \text{eps}$, puis qui retourne la dernière valeur R_{2^m} calculée. Cet algorithme doit impérativement être élaboré dans le but de minimiser le nombre total d'évaluations de f .



```
def Integrale2(eps):
    m=1
    u=Rectangle2(m-1)
    v=Rectangle2(m)
    while abs(v-u)>eps:
        m=m+1
```

```

u=v
v=Rectangle2(m)
return m

```

F11. Pour $\text{eps}=10^{-7}$, **Integrale2(eps)** s'arrête pour $m=7$. Combien d'évaluations fonction f ont été nécessaires ?

Nombre d'appel =

$$\sum_{m=0}^7 \text{nombre d'appel dans Rectangle2}(m) = \sum_{m=0}^7 (2^m - 1) = \frac{1 - 2^8}{1 - 2} - 8 = 248$$

On a bien réduit ainsi le nombre d'appel de la fonction f .

G1. Proposer une façon d'estimer, à partir des données disponibles, la valeur moyenne temporelle $\langle \vec{\Pi}(M, t) \rangle$ du vecteur de Poynting dû à l'antenne en un point M du maillage.

Etape 1 :

On calcule au point M :

$$\vec{\Pi}(M, t) = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{1}{\mu_0} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = \frac{1}{\mu_0} \begin{pmatrix} E_y B_z - E_z B_y \\ E_z B_x - E_x B_z \\ E_x B_y - E_y B_x \end{pmatrix}$$

Etape 2 :

On moyenne les coordonnées du vecteur précédent sur une période de l'expérience en appliquant la formule suivant à chaque composante

$$\langle \vec{\Pi}(M, t) \rangle = \frac{1}{100} \sum_{p=0}^{99} \vec{\Pi}\left(M, \frac{p}{100f}\right)$$

G2. On souhaite maintenant estimer la puissance moyenne rayonnée par l'antenne à travers une surface fermée contenant l'antenne. Compte tenu des données disponibles, quelle est parmi les surfaces suivantes la plus pertinente pour obtenir une estimation précise de P_a

(et donc de R_a) : la surface du cube $\left[\frac{-1}{10}, \frac{1}{10}\right]^3$, celle du cube $[-5, 5]^3$, la sphère de centre

O et de rayon $\frac{1}{10}$ ou la sphère de centre O et de rayon 5 ?

Le maillage étant cartésien par pas de 0.1m suivant x , y et z , il convient de choisir une surface fermée cubique plutôt que sphérique pour permettre le calcul du flux du vecteur de Poynting.

De plus, pour calculer la puissance rayonnée par l'antenne, il faut intégrer le vecteur de Poynting sur une surface choisie qui englobe l'antenne, de dimension

inférieure à 16cm. Enfin, afin de minimiser l'erreur due à l'approximation de l'intégrale par une somme, on a intérêt à ce qu'une surface élémentaire discrétisée (d'aire h^2 , avec $h = 0.1\text{m}$ le pas de discrétisation) soit petite devant la surface d'intégration.

⇒ On choisit alors le cube $[-5; 5]^3$ pour réaliser le calcul intégral.

G3. Notons $(\langle \Pi_x(M, t) \rangle, \langle \Pi_y(M, t) \rangle, \langle \Pi_z(M, t) \rangle)$ les coordonnées de la valeur moyenne du vecteur de Poynting en un point M du maillage. Proposer une formule permettant d'estimer numériquement la résistance de rayonnement R_a .

$$R_a = \frac{P_a}{(1A)^2} = \iint_{\text{Surface extérieure du cube } [-5, 5]^3} \langle \vec{\Pi}(M, t) \rangle \cdot d\vec{S}$$

$$= - \sum_{j=-50}^{49} \sum_{k=-50}^{49} \frac{\Pi_x(-50, j, k)}{100} + \sum_{j=-50}^{49} \sum_{k=-50}^{49} \frac{\Pi_x(50, j, k)}{100}$$

$$- \sum_{i=-50}^{49} \sum_{k=-50}^{49} \frac{\Pi_y(i, -50, k)}{100} + \sum_{i=-50}^{49} \sum_{k=-50}^{49} \frac{\Pi_y(i, 50, k)}{100}$$

$$- \sum_{i=-50}^{49} \sum_{j=-50}^{49} \frac{\Pi_z(i, j, -50)}{100} + \sum_{i=-50}^{49} \sum_{j=-50}^{49} \frac{\Pi_z(i, j, 50)}{100}$$

G4. Proposer une démarche, qui en faisant varier la surface choisie, permettrait de s'assurer une bonne précision de la valeur estimée de R_a .

Le calcul précédent a été effectué sur une surface cubique dont l'arête est de 10m, constituée de $2n=100$ pas de calculs h ($h = 0.1\text{m}$).

On peut implémenter le calcul précédent dans une fonction **Resistance(n)** qui calcule R_a en intégrant le vecteur $\vec{\Pi}$ sur la surface cubique $\left[-\frac{n}{10}, \frac{n}{10}\right]^3$.

On cherche ensuite, à l'aide d'une boucle while par exemple, la valeur minimale de n telle que $|\text{Resistance}(n) - \text{Resistance}(n-1)| < \text{eps}$ où eps est choisi suffisamment petit en fonction de la précision désirée.

CCINP 2023 PSI – Modélisation et ingénierie numérique

Calcul numérique d'intégrale

I.1 - Modélisation d'un cœur sain

Q1 Le cœur est une pompe. Lors de l'étape CD, les explications indiquent que, à pression la plus élevée, le sang est évacué vers l'aorte (le volume diminue). Cela correspond bien au sens direct sur le diagramme $p(V)$.

$W_p = -\oint_{\Gamma_{th}} p dV$ représente le travail algébrique reçu par le sang lors d'un cycle. Il est positif pour une pompe.

NB : p est une surpression. La pression est $P = P_0 + p$, et $\oint_{\Gamma_{th}} P_0 dV = P_0 \oint_{\Gamma_{th}} dV = 0$.

Q2 On suppose l'évolution de la pression connue pendant un cycle, ce qui physiquement est loin d'être évident !

Schéma numérique dans chacun des trois cas :

$W_{n-1} - W_n = p_{n-1} (V_n - V_{n-1})$ pour la méthode des rectangles à gauche

$W_{n-1} - W_n = p_n (V_n - V_{n-1})$ pour la méthode des rectangles à droite

$W_{n-1} - W_n = \frac{P_{n-1} + P_n}{2} (V_n - V_{n-1})$ pour la méthode des trapèzes

Il me semble que les noms des schémas Euler explicite et implicite sont liés à l'évaluation de solutions d'équations différentielles et non d'intégrales. Il n'y a ici rien d'implicite.

Q3 Si on approxime l'aire par celle d'un rectangle de hauteur $P_1 - P_0 = 0,7 \cdot 10^4 \text{ Pa}$ et de largeur

$V_1 - V_0 = 70 \text{ mL} = 7 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3$, on obtient $W_p = 49 \cdot 10^{-2} \text{ J} \approx 0,5 \text{ J}$.

Conformément à la réponse de la Q1, c'est une aire et un travail positifs.

Q4 La partie droite du cœur fournit le même travail, soit au total 1 J par battement.

A raison de 60 battements par minute, soit 1 par seconde, cela correspond à une puissance transférée au sang de $P_{Coeur} = 1 \text{ W}$.

Q5 Avec un rendement $\eta = 20\% = 0,20$, la puissance consommée par le muscle est

$$P_{Consommée} = P_{Coeur} / \eta = 5 \text{ W}.$$

L'énergie pour un battement est donc 5 J , soit une énergie consommée par jour

$$5 \times 3600 \times 24 \text{ J} = 5 \times 24 = 120 \text{ Wh}.$$

Cela fait une fraction $x = \frac{120}{2400} = 0,05 = 5\%$ de l'apport journalier.

I.2 - Modélisation d'un cœur déficient

Q6 $V_{1h} - V_0 = 100 \text{ mL} - 70 \text{ mL} = 30 \text{ mL}$ contre $V_1 - V_0 = 70 \text{ mL}$ pour un cœur en bonne santé.

Pour compenser et garder le même débit, il faudrait augmenter la fréquence cardiaque à

$$f_{batt h} = 60.70 / 30 = 140 \text{ batt / mn}.$$

Q7 La puissance fournie au sang par le ventricule gauche est cette fois

$$P_h = f (V_{1h} - V_0) (P_h - P_0) = 1 \times 30 \cdot 10^{-6} \times 0,7 \cdot 10^4 = 0,2 \text{ W} \text{ contre } 0,5 \text{ W} \text{ pour un ventricule sain.}$$

La pompe d'assistance doit donc fournir une puissance supplémentaire de $0,3 \text{ W}$ au sang.

(C'est conforme à ce qui est mentionné p9)

Partie III - Stockage des déchets radioactifs

Q33. La loi de Fourier donne la relation suivante :

$$\vec{j}_{\text{cond}} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}T}$$

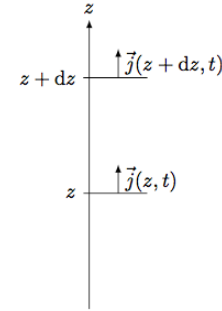
où :

- $\vec{j}_{\text{cond}}$ est la densité volumique de flux thermique exprimée en $\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$.
- λ est la conductivité thermique du matériau exprimée en $\text{W} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$.
- T est la température en K .

Physiquement, cette loi traduit le fait que le flux thermique est orienté dans le sens opposé au gradient de température, la conduction thermique se fait donc des zones chaudes vers les zones froides.

1. Ici, $\mathcal{P} = 4 \times 1300 \text{ MW}$ d'après le document 1.

Q34. On considère une tranche d'argile d'épaisseur dz :



Le premier principe appliqué à cette tranche entre t et $t + dt$ donne (la tranche n'est soumise à aucun travail et est immobile macroscopiquement) :

$$dU = \delta Q$$

où :

- $dU = U(t + dt) - U(t) = S \rho_a dz (u(z, t + dt) - u(z, t))$ où $u(z, t)$ est l'énergie interne massique de l'argile. On le considère comme une phase condensée incompressible donc : $u(z, t) = c_a T(z, t)$ ainsi, à l'ordre 1 en dt , on obtient :

$$dU = S c_a \rho_a dz dt \frac{\partial T}{\partial t}(z, t)$$

- $\delta Q = \vec{j}(z, t) \cdot \vec{u}_z S dt - \vec{j}(z + dz, t) \cdot \vec{u}_z S dt$ soit, à l'ordre 1 en dz :

$$\delta Q = -\frac{\partial j_z}{\partial z}(z, t) S dz dt$$

Or, d'après la loi de Fourier, $j_z(z, t) = -\lambda_a \frac{\partial T}{\partial z}(z, t)$ donc :

$$\delta Q = S \lambda_a dz dt \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}(z, t)$$

Le premier principe devient donc :

$$S c_a \rho_a dz dt \frac{\partial T}{\partial t} = S \lambda_a dz dt \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad \text{soit} \quad \boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda_a}{c_a \rho_a} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}}$$

On pose ainsi : $\boxed{D_a = \frac{\lambda_a}{c_a \rho_a}}$ diffusivité thermique exprimée en $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$.

Dans le cas stationnaire, l'équation devient :

$$\boxed{\frac{d^2 T}{dz^2} = 0}$$

Q35. En $z = -L$, le flux thermique est continu et provient directement des déchets. Chaque colis libère une puissance $\mathcal{P}_0$ et les N colis diffusent une puissance à travers la surface S vers le haut et vers le bas, par définition du flux thermique :

$$j_z(-L^-, t) S = N \frac{\mathcal{P}_0}{2}$$

De plus, d'après la loi de Fourier : $j_z(-L^+, t) = -\lambda_a \frac{\partial T}{\partial z}(-L^+, t)$. La continuité du flux assure :

$$\frac{\partial T}{\partial z}(-L, t) = -\frac{N \mathcal{P}_0}{2 \lambda_a S}$$

En $z = 0$, on admet que le contact thermique est parfait, ainsi : $T(0^-, t) = T(0^+, t) = T_{\text{ext}}$.

Q36. En reprenant l'équation obtenue en régime stationnaire, on peut intégrer une première fois entre $-L$ et z :

$$\frac{dT}{dz}(z) = \frac{dT}{dz}(-L) = -\frac{NP_0}{2\lambda_a S}$$

On intègre alors entre 0 et z :

$$T(z) - T(0) = -\frac{NP_0}{2\lambda_a S}z \quad \text{soit} \quad T(z) = T_{\text{ext}} - \frac{NP_0}{2\lambda_a S}z$$

$$\text{Ainsi : } T(-L) = T_{\text{ext}} + \frac{NP_0}{2\lambda_a S}L$$

Q37. On cherche S tel que $T(-L) = T_{\text{max}}$:

$$S = \frac{NP_0}{2\lambda_a(T_{\text{max}} - T_{\text{ext}})}L$$

Ainsi, numériquement : $S = 138 \text{ km}^2$.

Q38. En attendant 30 ans, on diminue la quantité d'atomes radioactifs dans les échantillons. En ODG, on attend une demi-vie, on divise donc par deux le nombre d'atomes radioactifs environ, ce qui permet de diviser par deux la puissance émise et ainsi la surface nécessaire à l'enfouissement.

Q39. Il y a $N_t + 1$ points donc :

$$h = \frac{\Delta t}{N_t}$$

Q40. En raisonnant en ordres de grandeur sur l'équation de diffusion, on obtient :

$$\frac{\Delta T}{\tau} = D_a \frac{\Delta T}{L^2} \quad \text{ainsi} \quad \tau = \frac{L^2 \rho_a c_a}{\lambda_a}$$

Ainsi, l'application numérique donne : $\tau = 2,0 \cdot 10^1 \text{ s} = 6,3 \cdot 10^3 \text{ an}$

Q41. Par définition de la dérivée :

$$\frac{\partial T}{\partial z}(z, t) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{T(z + \frac{k}{2}, t) - T(z - \frac{k}{2}, t)}{k}$$

Soit, à l'ordre 1 en k :

$$\frac{\partial T}{\partial z}(z, t) \approx \frac{T(z + \frac{k}{2}, t) - T(z - \frac{k}{2}, t)}{k}$$

De même, pour la dérivée seconde :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}(z, t) \approx \frac{\frac{\partial T}{\partial z}(z + \frac{k}{2}, t) - \frac{\partial T}{\partial z}(z - \frac{k}{2}, t)}{k} \approx \frac{\frac{T(z + k, t) - T(z, t)}{k} - \frac{T(z, t) - T(z - k, t)}{k}}{k}$$

Soit :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}(z, t) \approx \frac{T(z + k, t) - 2T(z, t) + T(z - k, t)}{k^2}$$

Enfin, d'après l'approximation numérique donnée dans l'énoncé : $\tilde{T}_n^i = T(z_n, t_i)$, on en déduit donc :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}(z_n, t_i) = \frac{\tilde{T}_{n+1}^i - 2\tilde{T}_n^i + \tilde{T}_{n-1}^i}{k^2}$$

Q42. *Fonction assert hors-programme*

La ligne 12 permet d'assurer la stabilité du schéma numérique. Si la grandeur r venait à ne pas vérifier la condition imposée, le code renverrait un *bug*.

La ligne 15 permet d'imposer la valeur $T_{\text{ext}} + \frac{NP_0}{2\lambda_a S}L$ en $z = -L$ à l'instant initial. La ligne 20 permet de faire de même aux instants ultérieurs. Ces lignes correspondent à la gestion de la condition aux limites en flux thermique.

Q43. Le code de la ligne 19 complété est le suivant :

$$\text{_____} T[t+1][x] = T[t][x] + D_a * h / k ** 2 * (T[t][x+1] - 2 * T[t][x] + T[t][x-1])$$

Q44. *Deuxième partie de question à revoir... ? Ce qui est dit ici n'est pas très fou fou...*

Entre des trois premiers instants, le gradient de température évolue davantage qu'entre τ et 3τ . La convergence vers le régime permanent est ainsi d'autant plus lente que le système en est proche.

Une critique possible est que la personne qui a rédigé le code n'a pas précisé les unités des grandeurs utilisées en commentaires.

CCINP PSI 2020 – Modélisation

Equation de Poisson

II.3 – Détermination du champ de température dans l'échangeur

Q24. En reprenant la démarche de l'énoncé, on écrit :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x, y) &= \frac{1}{h} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \left(x + \frac{h}{2}, y \right) - \frac{\partial T}{\partial x} \left(x - \frac{h}{2}, y \right) \right) \\ &= \frac{1}{h} \left(\frac{1}{h} (T(x+h, y) - T(x, y)) - \frac{1}{h} (T(x, y) - T(x-h, y)) \right)\end{aligned}$$

$$\text{D'où : } \boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x, y) = \frac{1}{h^2} (T(x+h, y) - 2T(x, y) + T(x-h, y))}$$

$$\text{Et de même : } \boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial y^2}(x, y) = \frac{1}{h^2} (T(x, y+h) - 2T(x, y) + T(x, y-h))}$$

Q25. D'après Q24, on obtient :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 y}{\partial y^2}(x, y) = 0 \Leftrightarrow T(x-h, y) + T(x+h, y) + T(x, y-h) + T(x, y+h) - 4T(x, y) = 0$$

$$\text{En identifiant avec l'expression de l'énoncé : } \boxed{a=b=c=d=1 \text{ et } e=-4}$$

Q26. En écrivant les équations pour les 3 couples (i, j) demandés, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} T_{(0,1)} + T_{(2,1)} + T_{(1,0)} + T_{(1,2)} - 4T_{(1,1)} = 0 \\ T_{(0,2)} + T_{(2,2)} + T_{(1,1)} + T_{(1,3)} - 4T_{(1,2)} = 0 \\ T_{(0,3)} + T_{(2,3)} + T_{(1,2)} + T_{(1,4)} - 4T_{(1,3)} = 0 \end{cases}$$

Or d'après les conditions limites imposées, on a :

$$T_{(0,1)} = T_{(0,2)} = T_{(0,3)} = T_{(1,0)} = T_{(1,4)} = T_{(2,1)} = T_{(2,2)} = T_{(2,3)} = T_1 \text{ et } T_{(1,0)} = T_2$$

D'où le système se réécrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} 4.T_{(1,1)} - 1.T_{(1,2)} + 0.T_{(1,3)} = 2.T_1 + T_2 \\ -1.T_{(1,1)} + 4.T_{(1,2)} - 1.T_{(1,3)} = 2.T_1 \\ 0.T_{(1,1)} - 1.T_{(1,2)} + 4.T_{(1,3)} = 3.T_1 \end{cases}$$

Q27. En identifiant le système précédent avec la forme donnée dans l'énoncé, on obtient :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 2.T_1 + T_2 \\ 2.T_1 \\ 3.T_1 \end{pmatrix}$$

Q28. Par lecture graphique, on lit directement qu'obtenir une erreur de 5% nécessite d'avoir $n = 6.10^2$ nœuds.

Q29. Comme on veut une incertitude sur la température la plus faible possible ($\|\delta T\|$ faible) il est nécessaire d'avoir une matrice A de conditionnement « faible » également. Parmi les valeurs proposées, on choisirait : $\boxed{\text{cond}(A) = 1}$

Q30. Pour la matrice A, on obtient : $\boxed{\|A\|_\infty = 234}$ (dernière ligne)

Pour la matrice A^{-1} , on obtient : $\boxed{\|A^{-1}\|_\infty = 99}$ (1^{ère} ligne)

Q31. $\boxed{\text{cond}(A) = 234 \times 99 = 23\,166}$ la matrice est donc mal conditionnée.

E3A PSI 2013 Physique-modélisation. partie informatique
Magnétomètre à vanne de flux

```
G1) def f(x, y, z):
    # Attention, fonction non définie en (0,0,0)
    return x**2 / (x**2 + y**2)**2

G2) def Choisir(a, b):
    return a + random() * (b - a)
    # donne a si random() donne 0
    # et b si random() donne 1

G3) def Est_dans_tore(x, y, z):
    global a, R
    # cette ligne n'est pas obligatoire
    return (sqrt(x**2 + y**2) - R)**2 + z**2 <= a**2
    # la réponse est un booléen, on ne rajoute pas de == True.

G4) def Choisir_point():
    x = Choisir(-(R+a), R+a)
    y = Choisir(-(R+a), R+a)
    z = Choisir(-a, a)
    return x, y, z

G5) I, I2 = 0, 0
Npts = 0
# nb de points dans le tore
while Npts <= N:
    # on s'arrête quand on a N points dans le tore
    x, y, z = Choisir_point()
    if Est_dans_tore(x, y, z):
        # Pas de == True
        Npts = Npts + 1
        ff = f(x, y, z)
        # pas de problème avec (0,0,0) qui est hors du tore
        I = I + ff
        I2 = I2 + ff**2
        # "rien" on ne fait rien.
    # quand on a calculé  $I = \sum_{i=1}^N f(n_i)$ ,  $I2 = \sum_{i=1}^N f^2(n_i)$  et N.
    V = 2 * pi**2 * R * a**2
    # le volume
```

$\alpha = V * I / N$ # I/N est $\langle f \rangle$
 $moycarr. = I2 / N$ # c'est $\langle f^2 \rangle$
 $erreur = V * sqrt((moycarr. - (I/N)**2) / N)$

```
H1) def Produit(sx, sy):
    rep = []
    # la fonction renvoie 1 liste
    for i in range(len(sx)):
        # même longueur que sy
        rep.append(sx[i] * sy[i])
    return rep

ou alors, par compréhension de liste.
def Produit(sx, sy):
    rep = [sx[i] * sy[i] for i in range(len(sx))]
    return rep

H2) def Moyenne(L):
    rep = 0
    l = len(L)
    for elm in L:
        rep = rep + elm
    # on fait la somme de tous les éléments
    return rep / l
    # somme / nb de termes = la moyenne

H3) def Valeur_max(L):
    prov = L[0]
    # c'est le maximum provisoire.
    for elm in L:
        # on va tester L[0], mais ça ne prend pas trop de temps.
        if elm > prov:
            prov = elm
        # on change le max provisoire si l'élément est plus que l'ancien max provisoire
    return prov
```

H4] def Moyenne-nulle (L):

$\Pi = \text{Moyenne}(L)$

return [elm - Π for elm in L] # on décale tous les points de la valeur moyenne.

H5] def Intercorr_n(x, y, n): # on suppose les groupes de moyenne nulle.

C = 0

fonction
intermédiaire
qui calcule
C(n)

for k in range(l, ll):

boucle for (1)

C = C + x[k] * y[k-n]

return C

def Intercorr(x, y):

return [Intercorr_n(x, y, n) for n in range(0, l)]

H6] Il y a l'éléments.

On va calculer la complexité en nombre de multiplications, qui est l'opération la plus lente ici:

Pour chaque passage dans la boucle for (1): 1 multiplication

Pour chaque utilisation de Intercorr_n: l multiplications (l passages)

Pour Intercorr (l utilisations de Intercorr_n): l^2 multiplications.

Cela fait une complexité de l^2 en nombre de multiplications

Centrale PC 2023

I. Une première évolution de la forme du casque : du casque classique vers le casque profilé en goutte d'eau

IA – Évaluation du gain en puissance par une approche empirique

IA.1) Étude de la phase de démarrage

Q1. Le nombre de Reynolds $Re = \frac{\rho v L}{\eta}$ caractérise la nature de l'écoulement (laminaire ou turbulent).

Avec L une distance caractéristique des variations de v.

Prenons L = 0,5 m (largeur d'épaule) : $Re = \frac{1,225 \cdot 40 \cdot 1,8}{1,8 \cdot 10^{-5}} = 4 \cdot 10^5$.

On est dans l'intervalle proposé, on pourra donc supposer le modèle adapté.

Q2. Bilan des actions sur le système cycliste + vélo : $\vec{P}, \vec{N}, \vec{F}_r, \vec{F}_N$

On applique le théorème du centre de masse au système cycliste + vélo :

Projection sur Ox :

$$m \frac{dv}{dt} = m g \sin \alpha - \mu_r N - \frac{1}{2} \rho S C_x v^2$$

Projection sur Oy

$$0 = m g \cos \alpha - N$$

D'où

$$\frac{dv}{dt} + \frac{\rho S C_x}{2m} v^2 = g(\sin \alpha - \mu_r \cos \alpha)$$

$$a = \frac{\rho S C_x}{2m} = \frac{1,225 \cdot 0,30}{2 \cdot 80} = 2,3 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}; \quad b = g(\sin \alpha - \mu_r \cos \alpha) = 9,8(\sin 0,1 - 6,4 \cdot 10^{-3} \cdot \cos 0,1) = 0,92 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

Q3. En régime permanent $\frac{dv}{dt} = 0$

d'où

$$v_{\text{lim}}^2 = b/a = \frac{2mg(\sin \alpha - \mu_r \cos \alpha)}{\rho S C_x}$$

$$K = \frac{2mg(\sin \alpha - \mu_r \cos \alpha)}{\rho}$$

Q4. $v_{\text{lim}} = \sqrt{b/a} = \sqrt{0,92/2,3 \cdot 10^{-3}} = 20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 72 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ plutôt rapide mais plausible.

Q5. Lignes 1 et 2 : importation des bibliothèques.

Ligne 3 à 7 : définit une fonction r ayant comme arguments f, v et t.

L'argument t est la liste des instants successifs, v est la vitesse initiale, et f l'accélération.

Cette fonction renvoie la liste des vitesses V aux instants successifs de la liste t à partir de la

méthode d'Euler appliquée à l'équation différentielle (I.1) discrétisée.

Lignes 8 et 9 : Renvoie F/m = $0,92 - 2,2 \cdot 10^{-3} v^2$ fonction trouvée en Q2

Ligne 10 définit une liste des temps

Ligne 11 : calcule la liste des vitesses avec les données de l'exercice.

Lignes 12 et 13 : tracé du graphe v(t)

Q6. Le vecteur x est un array numpy qui contient 1000 valeurs du temps également réparties entre 0 et 120 (secondes)

Courbe 1 : échantillonnage correct, correspond à la courbe cherchée, $v_{\text{lim}} = 20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

Courbe 2 : échantillonnage 100 fois plus faible que le précédent, on obtient une courbe affine de 12 morceaux,

Courbe 3 : échantillonnage correct, mais un intervalle de temps 10 fois plus faible que celui de la courbe 1, la vitesse limite n'est pas atteinte.

Courbe 4 : échantillonnage trop faible, courbe à 10 segments, intervalle de temps plus important, sur le 1^{er} segment la vitesse finale est supérieure à la vitesse limite, donc sur le 2^e segment l'accélération est négative, d'où la courbe en dents de scie. La méthode d'Euler ne converge pas.

Q7. $L_{RP} = \int_0^{t_f} v(t) dt$ où t_f est environ égal à 40 s si on se place à 95% de v_{lim} , soit $v = 19 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

En assimilant l'accélération en régime transitoire à une constante d'après la courbe 3

$$V = a \cdot t; \quad L_{RP} = a \cdot t^2 / 2 = (10/12) \cdot 40^2 / 2 = 670 \text{ m}$$

Cette valeur surestime LRP, c'est un majorant.

On peut calculer un minorant en assimilant la courbe 1 à une courbe affine entre les points $t = 0, v = 0$ et $t = 40 \text{ s}, v = 38 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

On a alors : $L_{RP} = 40 \cdot 19 / 2 = 380 \text{ m}$.

Q8. def LRP(v,t):

L=0

i=0

while v[i]<.95*v[-1]:#v[-1] est la vitesse limite.

L+=v[i+1]*(t[i+1]-t[i])

i+=1

return L

Remarque : ce script suppose que la vitesse limite est atteinte ! Avec les valeurs du texte, il calcule : $L_{RP} = 506 \text{ m}$ pour 95 % de V_{limite} . C'est à peu près la moyenne des deux valeurs que nous avons à la question précédente.

IA.2) Étude du régime permanent dans la descente de Laffrey

Q9. Sur le tableur de la calculatrice pour chaque valeur de T_c pour le casque classique il faut calculer $v_c = L' / T_c$; résultats affichés $\langle v_c \rangle = 18,526 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ et l'écart-type affiché est $\sigma_v = 0,1143 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ d'où :

$$u(\langle v_c \rangle) = \sigma_v / \sqrt{10} = 0,036 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\text{soit } \langle v_c \rangle = 18,526 \pm 0,036 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Q10. Les histogrammes donnés peuvent être approximés à une gaussienne de valeur centrale 18,5 pour le casque classique et de demi-largeur à mi-hauteur $(18,7-18,4)/2 = 0,15 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, proche de l'incertitude type calculée précédemment sur une mesure.

Remarque : en toute rigueur, la largeur à mi-hauteur d'une gaussienne est liée à l'écart type par :

$$\Delta v = 2\sqrt{2 \ln(2)} \sigma \approx 2,36 \sigma$$

Les étudiants doivent-ils savoir cela ?

Pour le casque profilé la valeur centrale est 19,3 et a largeur à mi-hauteur $(19,4-19,1)/2 = 0,15 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, ce qui correspond à une valeur de l'incertitude-type $u(\langle v \rangle) = 0,15/10^{0,5} = 0,047 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, proche de la valeur donnée dans l'énoncé.

Conclusion : La démarche expérimentale est pertinente, que l'incertitude type soit évaluée comme de type A ou de type B, car l'écart entre les deux valeurs moyennes $19,25-18,53=0,72 \text{ m.s}^{-1}$ est plus de 15 fois plus élevé que la plus grande des incertitudes type sur la moyenne, ce qui valide la démarche expérimentale.

Remarque : on ne comprend pas bien ce que demande cette question : doit-on vérifier que la variabilité observée expérimentalement est cohérente avec la simulation, ou que l'écart entre les deux valeurs de vitesse est significatif ?

Q11. $AN K = b \cdot 2m / \rho = 0,916 \cdot 2 \cdot 80 / 1,225 = 119,6 \text{ m}^4 \cdot \text{s}^{-2}$.

```
import numpy.random as rd
import numpy as np
```

```
def MonteCarlo2(
    vitesseMoyenne:float, # vitesse moyenne du cycliste (m/s)
    incertitudeType:float, # incertitude type sur la vitesse (m/s)
    N:int, # nombre d'échantillons à produire
    K:float, # constante dans vlim
) -> [float]: # tableau de N valeurs de Scx simulées
    generateur = rd.default_rng()
    V = generateur.normal(vitesseMoyenne, incertitudeType, N) # on génère les valeurs de v
    SCx = K/V**2
    return (np.mean(SCx), np.std(SCx))
```

```
print(MonteCarlo2( 18.52 , 0.041 , 10000 , 119.6))
print(MonteCarlo2(19.25, 0.036, 10000, 119.6))
```

Réponse de la console :
 (0.3484668177681698, 0.0013612509872095047)
 (0.32275327064773107, 0.0013836612783945698)

D'où $SCx(\text{classique}) = 0,3484 \pm 0,0013 \text{ m}^2$
 $SCx(\text{profilé}) = 0,3227 \pm 0,0014 \text{ m}^2$

Je ne trouve pas les mêmes résultats que l'énoncé.

Q12 : Puissance du poids $P_p = m\vec{g} \cdot \vec{v} = mgv \sin \alpha$;
 Puissance de $\vec{N}$ $P_N = 0$ (perpendiculaire au mouvement)
 Puissance de $\vec{F}_r$ $P_r = -\mu_r mg \cos \alpha \cdot v$
 Puissance de $\vec{F}_T$ $P_T = \frac{1}{2} \rho SC_x v^3$

Q13. Le gain en puissance n'est pas défini ; disons qu'il s'agit de calculer pour la vitesse donnée, constante, la différence relative :

$$G = [P_T(\text{classique}) - P_T(\text{profilé})] \cdot 100 / P_T(\text{classique})$$

$$= [SC_x(\text{classique}) - SC_x(\text{profilé})] \cdot 100 / SC_x(\text{classique})$$

$$= [0,3484 - 0,3227] \cdot 100 / 0,3484 = 7,4 \%$$

Le « gain en puissance » du au casque profilé est 7,4 %, cohérent avec les 2 à 8% de l'introduction.

Cette valeur n'a en réalité pas de sens, puisque la valeur de SC_x ne dépend pas uniquement du casque, mais également de la vitesse (cf courbe de C_x pour une balle, seule au programme de PC).

Faut-il supposer que les valeurs du tableau 2 donnent des valeurs de SC_x à même vitesse ?

Pour l'incertitude type sur ce résultat, on fait une composition des incertitudes :

$$\frac{u(G)}{G} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{u(SC_x(\text{classique}))^2 + u(SC_x(\text{profilé}))^2}}{SC_x(\text{classique}) - SC_x(\text{profilé})} \right)^2 + \left(\frac{u(SC_x(\text{classique}))}{SC_x(\text{classique})} \right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{0,0036^2 + 0,0037^2}}{0,3051 - 0,2937} \right)^2 + \left(\frac{0,0036}{0,3051} \right)^2} = 0,45$$

L'incertitude type est donc de 45 %, ce qui rend le résultat plus que douteux.